ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 20, 3, 343-350, 1972, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIEŃ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH METODĄ LOKALNYCH WARIACJI*

F. L. CZERNOUSKO

Metoda lokalnych wariacji, przedstawiona przez autora w pracy [1], ma szerokie zastosowanie do numerycznego rozwiązywania zagadnień teorii sprężystości i plastyczności. Wyniki zawarte w [1] były otrzymane przez autora i jego współpracowników: N. M. Baniczuka, W. M. Kartweliszwili, I. A. Kryłowa i W. M. Pietrowa; częściowo były opublikowane w pracach [1 - 11].

1. Postawienie problemu i algorytm lokalnych wariacji

Metoda lokalnych wariacji jest metodą numeryczną służącą do rozwiązywania dość ogólnej postaci zagadnień wariacyjnych. Ideę metody przedstawimy na prostym zagadnieniu wariacyjnym. Mamy znaleźć funkcję $u(x, y)$ określoną w obszarze zamkniętym D płaszczyzny x, y, która spełniałaby ograniczenia

$$u^-(x, y) \leqslant u(x, y) \leqslant u^+(x, y) \tag{1.1}$$

i dawałaby minimum funkcjonału

$$J = \int\int_D f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{1.2}$$

gdzie u^-, u^+ i f są z góry danymi funkcjami. Zauważmy, że ograniczenia (1.1) pozwalają na uwzględnienie warunków brzegowych typu Dirichleta. W tym celu przyjmijmy na brzegu obszaru D $u^+ = u^- = u^0(x, y)$, gdzie funkcja $u^0(x, y)$ jest równa danej wartości poszukiwanej funkcji $u(x, y)$ na brzegu.

Przyjmijmy dla prostoty, że obszar D jest prostokątem o bokach równoległych do osi współrzędnych. Pokryjmy ten prostokąt siatką prostokątną o wymiarach oczka siatki Δx, Δy i oznaczmy przez x_j, y_k współrzędne wierzchołków oczek siatki. Wskaźniki j, k przebiegają wartości $j=0, 1, 2, ..., m$; $k=0, 1, 2, ..., n$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Całkę (1.2) zamieńmy w sposób przybliżony przez sumę

$$J = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x \Delta y f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}, \frac{u_{jk} + u_{j+1,k} + u_{j,k+1} + u_{j+1,k+1}}{4},\right.$$
$$\left.\frac{u_{j+1,k+1} + u_{j+1,k} - u_{j,k+1} - u_{jk}}{2\Delta x}, \frac{u_{j+1,k+1} + u_{j,k+1} - u_{j+1,k+1} - u_{jk}}{2\Delta y}\right), \quad u_{jk} = u(x_j, x_k). \tag{1.3}$$

(*) Praca referowana na XIV Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego w Krościenku n/Dunajcem (2 - 11 wrzesień 1971 r).

Z rosyjskiego przełożył Józef Bejda.

Zamiast wyjściowego zagadnienia wariacyjnego (1.1) – (1.2) będziemy rozważać teraz zagadnienie znalezienia tablicy liczb u_{jk}, dla których suma (1.3) osiąga minimum przy ograniczeniach typu

$$(1.4) \qquad u^-(x_j, y_k) \leqslant u_{jk} \leqslant u^+(x_j, y_k), \quad j=0, 1, \ldots, m; \quad k=0, 1, \ldots, n$$

wynikających z (1.1). Algorytm metody lokalnych wariacji jest następujący. Najpierw obieramy pewne przybliżenie początkowe, tzn. tablicę liczb u_{jk}, spełniające ograniczenia (1.4). Algorytm «wykonuje» kolejne iteracje i podczas każdej z nich przebiega wszystkie węzły siatki. W każdym węźle algorytm porównuje wartości u_{jk}, u_{jk+h} i u_{jk-h}, gdzie h jest ustalonym krokiem. Za nową wartość funkcji u i v w danym węźle wybieramy tę, której odpowiada najmniejsza wartość funkcjonału (1.3). Dla sprawdzenia każdej wartości trzeba policzyć nie więcej niż cztery wyrazy sumy (1.3).

Spełnienie ograniczeń (1.4) nie przedstawia trudności. Przy zmianie u_{jk} odrzucamy te wariacje, które prowadzą do naruszenia nierówności (1.4).

Proces iteracyjny przedłużamy dotąd, aż wartości u_{jk} we wszystkich punktach będą takie same. Następnie zmniejszamy krok h dwa razy i obliczenia iteracji zaczynamy od nowa. Gdy krok h osiągnie małą wartość, zmniejszamy wymiary siatki, tzn. liczby Δx i Δy, i znowu rozpoczyna się proces iteracyjny ze stopniowym zmniejszaniem kroku h.

Przedstawiony wyżej schemat algorytmu jest najprostszy. W pracy [1] opisano metodę, która daje najekonomiczniejszą liczbę operacji. Bardziej szczegółowe przedstawienie algorytmu i różnych jego modyfikacji można znaleźć w pracach [1, 4, 10 i 11]. W tych samych pracach podano uogólnienie algorytmu lokalnych wariacji na następujące przypadki:

1) obszar D jest dowolny;

2) minimalizujący funkcjonał zawiera całkę po brzegu obszaru D; podobne funkcjonały występują przy rozpatrywaniu zagadnień wariacyjnych z warunkami brzegowymi posiadającymi pochodną funkcji u;

3) na funkcję u nałożone są różnego typu warunki brzegowe;

4) funkcja u jest funkcją wektorową;

5) funkcja podcałkowa w (1.2) zależy od drugich i wyższych pochodnych funkcji u;

6) funkcjonał J ma postać

$$(1.5) \qquad J = F(J_1, \ldots, J_r),$$

gdzie $J_1, \ldots, J_r$ oznaczają funkcjonały całkowe typu (1.2), a F jest daną funkcją; podobne zagadnienie występuje przy rozpatrywaniu niektórych zagadnień stateczności oraz zagadnień na wartości własne;

7) funkcja u zależy od trzech i więcej zmiennych niezależnych;

8) funkcja wektorowa u zależy od jednej zmiennej niezależnej, ale spełnia dodatkowo inny układ równań różniczkowych (zagadnienie optymalnego sterowania; por. [2, 8]).

Metoda lokalnych wariacji z pewnymi udoskonaleniami i modyfikacjami była realizowana w postaci szeregu standardowych programów. Opis niektórych programów w języku ALGOL-60 jest zamieszczony w pracach [2, 8 i 11]. Struktura programów standardowych jest taka, że dla rozwiązania konkretnego zadania programista powinien zaprogramować tylko niektóre funkcje. Na przykład dla rozwiązania zagadnienia (1.1) i (1.2) należy zestawić podprogramy dla obliczenia funkcji u^+, u^- i f, a następnie wykorzystać standardową procedurę z pracy [11].

2. Zbieżność metody

Algorytm metody lokalnych wariacji ma tę własność, że wartość minimalizującego funkcjonału J po każdej iteracji nie może wzrastać. Wynika stąd, że przy ustalonych wartościach Δx, Δy, h po skończonej liczbie iteracji następuje koniec procesu wariacyjnego, tzn. w wyniku wariacji wartość funkcji u w żadnym punkcie nie będzie się zmieniać. Można wykazać, że otrzymane w ten sposób rozwiązanie przybliżone posiada następujące własności:

1. Jeśli ograniczenia (1.1) nie są spełnione, to otrzymane rozwiązanie spełnia w sposób przybliżony różnicowe równanie Eulera

$$\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)=0 \tag{2.1}$$

dla funkcjonału (1.2). Błąd aproksymacji, z jakim spełnione jest równanie różnicowe, odpowiadające równaniu różniczkowemu (2.1), jest rzędu h/δ^2, gdzie

$$\delta=\min(\Delta x, \Delta y).$$

Dowód podany jest w pracy [4], a dla funkcjonału ogólniejszej postaci w [10]. Wynika z niego, że metoda jest zbieżna do pewnej ekstremali funkcjonału (1.2). Jasne jest, że w ogólnym przypadku metoda może być «zbieżna» nie do absolutnego minimum funkcjonału, a do pewnego minimum lokalnego. Dlatego ważną rolę odgrywa wybór pierwszego przybliżenia. Przy wyborze pierwszego przybliżenia dla rozwiązania złożonego problemu zwykle wykorzystuje się różne przesłanki fizykalne.

2. Niech ograniczenia (1.1) nie będą spełnione, a wyrażenia podcałkowe w (1.2) będą funkcją kwadratową postaci

$$f=a_1(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+a_2(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+a_3(x,y)u^2+a_4(x,y)u.$$

Niech poszukiwana funkcja u spełnia warunek Dirichleta na brzegu C obszaru D, a funkcje $a_i(x, y)$ spełniają warunki

$$a_1>0, \quad a_2>0, \quad a_1+a_2\geqslant a_4/2>0, \quad a_4\geqslant 4a_3\geqslant 0.$$

Wtedy, jeśli wielkości Δx, Δy, h dążą do zera tak, że $h=O(\delta^2)$, gdzie $\delta=\min(\Delta x, \Delta y)$, to rozwiązanie u otrzymane metodą lokalnych wariacji dla wszystkich ustalonych wartości Δx, Δy, h dąży do funkcji, dla której funkcjonał (1.2) osiąga absolutne minimum.

3. Bardziej złożony jest problem zbieżności lokalnych wariacji przy ograniczeniach (1.1). Przytoczymy niektóre rezultaty dla tego przypadku dla jednowymiarowego zagadnienia wariacyjnego o minimalizacji funkcjonału

$$J=\int_a^b f(x,u,u_x)\,dx,\qquad u_x=\frac{du}{dx} \tag{2.2}$$

z ograniczeniami

$$u^-(x)\leqslant u(x)\leqslant u^+(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b; \tag{2.3}$$

poszukiwana funkcja $u(x)$ jest określona na odcinku $[a, b]$ osi x. Prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE. *Jeśli spełnione są warunki*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_x^2}\geqslant 0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\geqslant 0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u_x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial x}\right)^2\geqslant 0, \tag{2.4}$$

to przy rozwiązaniu zagadnienia wariacyjnego (2.2) *i* (2.3) *metodą lokalnych wariacji przy ustalonym kroku* Δx *zbieżność funkcjonału jest rzędu* $h/(\Delta x)^2$. *Jeżeli wzmocnić trochę warunki* (2.4), *to zbieżność funkcjonału będzie rzędu* $h^2/(\Delta x)^5$, *a rozwiązania rzędu* $h/(\Delta x)^{5/2}$ *(przy ustalonej wartości* Δx*).*

Analogiczne oszacowania zachodzą również dla zagadnień dwuwymiarowych postaci (1.2) i (1.1).

W praktyce wymiary oczka siatki $\Delta x, \Delta y$ wybieramy z początku większe, tak że w obszarze mamy od 4 do 16 oczek. Proces iteracyjny na takiej siatce jest bardzo szybki. Następnie zmniejszamy wymiary oczek dzieląc je na połowy dopóty, dopóki tablica rozwiązania u_{jk} może jeszcze pomieścić się w pamięci operacyjnej maszyny. Dla wszystkich ustalonych wartości $\Delta x, \Delta y$ liczba h zmniejsza się przez podzielenie jej na pół, od wartości $h\approx\delta=\min(\Delta x, \Delta y)$ do $h\ll\delta^2$. Dla wszystkich ustalonych wartości $\Delta x, \Delta y, h$ kontynuujemy proces iteracyjny aż do zupełnej zbieżności.

3. ZASTOSOWANIE DO ZAGADNIEŃ MECHANIKI

Jak wiadomo, wiele zagadnień mechaniki (w szczególności zagadnienia równowagi i stacjonarnego płynięcia) może być sformułowanych w postaci wariacyjnej. Zatem metoda lokalnych wariacji może mieć zastosowanie dla szerokiej klasy problemów mechaniki ośrodka ciągłego, w tym również do zagadnień nieliniowych dla obszarów o złożonym kształcie i z ograniczeniami typu (1.1). W ciągu ostatnich lat za pomocą tej metody rozwiązano szereg nieliniowych zagadnień mechaniki. Rozmiary tej pracy nie pozwalają na szczegółowe przedstawienie wszystkich rezultatów i dlatego omówimy je tylko pobieżnie.

1. *Zginanie prętów.* Problem określenia stanu równowagi pręta poddanego działaniu zewnętrznych sił potencjalnych może być sprowadzony do następującego zagadnienia wariacyjnego: należy znaleźć minimum energii potencjalnej pręta, składającej się z jego energii sprężystej i potencjalnej energii sił zewnętrznych. Każdemu minimum energii potencjalnej odpowiada pewien stateczny stan równowagi

pręta. Za pomocą metody lokalnych wariacji można rozwiązać zarówno liniowe jak i nieliniowe problemy zginania prętów. Nie sprawia również trudności rozwiązanie tych zagadnień przy ograniczeniach typu nierówności, nałożonych na położenie pręta (sztywne ścianki). Niektóre zagadnienia zginania prętów były rozwiązane metodą lokalnych wariacji w pracy [2].

2. *Membrana sprężysta.* W przypadku najprostszego zagadnienia wariacyjnego z dwoma zmiennymi niezależnymi rozpatrzmy problem ugięcia membrany sprężystej równomiernie obciążonej i ograniczonej sztywną ścianką. Zagadnienie to może być sprowadzone do minimalizacji funkcjonału (energii)

$$J = \iint_D \left[\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2) - u\right] dx\,dy \tag{3.1}$$

z ograniczeniami

$$u(x,y) \leqslant a \quad \text{w} \quad D, \quad a>0 \tag{3.2}$$

oraz

$$u=0 \quad \text{na} \quad C. \tag{3.3}$$

Symbol $u(x, y)$ oznacza tu wielkość ugięcia membrany, D obszar membrany oraz a jest odległością od sztywnej płaszczyzny do płaszczyzny, w której znajduje się brzeg membrany. Zakłada się, że membrana jest zamocowana na brzegu C (brzegu obszaru D) i obciążona równomiernie. Równanie Eulera dla funkcjonału (3.1) ma postać

$$\Delta u = -1. \tag{3.4}$$

Równanie to jest spełnione w tej części obszaru D, gdzie $u<a$, tzn. gdy membrana nie styka się ze ścianką ograniczającą. Problem (3.1) - (3.3) był rozwiązany w pracy [4] dla membrany kwadratowej przy różnych wielkościach parametru a.

3. *Płyty sprężyste.* Problem równowagi płyt sprężystych, obciążonych potencjalnymi siłami zewnętrznymi, może być również sformułowany jako zagadnienie wariacyjne na minimum energii potencjalnej, składającej się z energii sprężystej i energii sił zewnętrznych. Metodą lokalnych wariacji można rozwiązać liniowe i nieliniowe zagadnienia z ograniczeniami typu (1.1), które odpowiadają sztywnym powierzchniom ograniczającym ugięcia płyty. W zależności od zagadnienia (3.1) - (3.3) minimalizujący funkcjonał (energia) dla płyty zależy od drugich pochodnych poszukiwanych funkcji. Niektóre zagadnienia deformacji płyt przy różnych ograniczeniach typu (1.1) były rozwiązane w pracy [7].

4. *Skręcanie sprężysto-plastycznych prętów.* Rozpatrzmy zagadnienie skręcania pryzmatycznego pręta, którego przekrój poprzeczny stanowi obszar D. Problem określenia pola naprężeń sprowadza się do znalezienia funkcji skręcania, która w obszarze sprężystym spełnia równanie Poissona (3.4), a na brzegu C obszaru D warunek brzegowy (3.3). Oprócz tego funkcja skręcania spełnia w obszarze D nierówność

$$u_x^2+u_y^2 \leqslant \alpha^{-2}, \quad \alpha = 2GI\theta/k. \tag{3.5}$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia: α jest bezwymiarowym parametrem, G modułem ścinania, l liniowym charakterystycznym wymiarem przekroju, θ kątem skręcania pręta odniesionym do jednostki długości, a k stałą plastyczności. Funkcja naprężenia u jest również wyrażona w postaci bezwymiarowej. Nierówność (3.5) wyraża warunek plastyczności. Znak równości w (3.5) obowiązuje w strefie plastycznej, a znak ostrej nierówności w strefie sprężystej. W wariacyjnym sformułowaniu zagadnienie skręcania sprężysto-plastycznego pręta sprowadza się do znalezienia funkcji u, spełniającej warunki (3.3) i (3.5) i minimalizującej funkcjonał (3.1). Algorytm rozwiązania (por. [4]) różni się nieco od rozwiązania zagadnienia (1.1) i (1.2), ponieważ nierówność (3.5) zawiera pochodne poszukiwanej funkcji. Inna metoda rozwiązania zagadnienia skręcania polega na znalezieniu minimum funkcjonału (3.1) przy warunkach (3.3) i ograniczeniu

$$u(x, y) \leqslant u_p(x, y) \quad \text{w} \quad D,$$

gdzie $u_p(x, y)$ jest funkcją skręcania dla problemu plastycznego. Funkcja ta powinna być określona wstępnie.

Metoda lokalnych wariacji pozwala rozwiązać zagadnienia skręcania dla prętów o dowolnym przekroju poprzecznym, określać granicę oddzielającą obszar sprężysty i plastyczny i obliczać sumaryczny moment skręcający. Szereg rezultatów numerycznych dla skręcania sprężysto-plastycznych prętów o dowolnym kształcie przedstawiono w [4 i 6]. Ostatnio rozwiązano nowe problemy, w szczególności dla prętów, których przekrój poprzeczny jest kołem z wycięciem wzdłuż promienia.

5. *Dwuwymiarowe zagadnienia sprężysto-plastyczne.* Algorytm metody lokalnych wariacji może być zastosowany do rozwiązania ogólnego dwuwymiarowego (płaskiego lub osiowo-symetrycznego) zagadnienia równowagi dla ciała sprężystego lub sprężysto-plastycznego. Rozwiązanie sprężystych zagadnień równowagi otrzymuje się na podstawie znanej zasady wariacyjnej w przemieszczeniach. Dla rozwiązania zagadnienia sprężysto-plastycznego korzystamy z teorii płynięcia Prandtla-Reussa i warunku plastyczności Hubera-Misesa. Jeśli rozważać quasi-statyczny proces obciążania i oznaczyć przez δu, δv przyrosty składowych wektora przemieszczenia w małym przedziale czasu δt, to obliczenie funkcji δu, δv sprowadza się do zagadnienia wariacyjnego za pomocą zasady wariacyjnej teorii plastycznego płynięcia (por. [12 i 13]). Metodą lokalnych wariacji były rozwiązane płaskie i osiowo-symetryczne zagadnienia sztywnego stempla wciskanego w ośrodek sprężysto-plastyczny. Rezultaty obliczeń dla zagadnienia płaskiego zostały opublikowane w pracy [9].

6. *Płynięcie ośrodka lepko-plastycznego.* Zagadnienie stacjonarnego płynięcia ośrodka lepko-plastycznego w rurze grubościennej może być również sformułowane jako zagadnienie wariacyjne na minimum funkcjonału (por. [14])

$$J = \iint_D \left[a_1 (u_x^2 + u_y^2) + a_2 \sqrt{u_x^2 + u_y^2} - a_3 u\right] dx\, dy \tag{3.6}$$

z warunkiem brzegowym (3.3). Obszar D oznacza tu przekrój poprzeczny rury, a_1, a_2 i a_3 są stałymi dodatnimi, a $u(x, y)$ oznacza prędkość płynięcia ośrodka. Zagadnienie to nie odnosi się do wielu klasycznych zagadnień wariacyjnych, ponieważ funkcja podcałkowa w (3.6) jest nieróżniczkowalna przy $u_x = u_y = 0$. Nie zważając na to, podobne zagadnienia były rozwiązywane metodą lokalnych wariacji (por. [5]).

7. *Minimalne powierzchnie i swobodne powierzchnie cieczy.* Zagadnienie powierzchni o minimalnym polu, naciągniętej na dany kontur, sprowadza się do zagadnienia na minimum funkcjonału

$$J = \iint_D \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy$$

z warunkiem granicznym typu Dirichleta. Podobne zadania były rozwiązywane w [4]. Bliskimi, lecz bardziej złożonymi problemami są zadania dotyczące kształtu swobodnej powierzchni cieczy zawartej w naczyniu o danym kształcie i znajdującej się pod działaniem sił ciężkości oraz napięcia powierzchniowego. Rozwiązanie tych zagadnień hydrostatycznych metodą lokalnych wariacji jest dane w pracach [3 i 10].

Ponadto metoda lokalnych wariacji była stosowana do rozwiązania szeregu zagadnień teorii sprężystości, przewodnictwa ciepła, optymalnego sterowania i do zagadnień na wartości własne.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Ф. Л. Черноусько, *Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач*, ЖВМ и МФ, **5**, 4, 749 - 754, 1965.
2. И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько, *Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций*, ЖВМ и МФ, **6**, 2, 203 - 217.
3. В. М. Петров, Ф. Л. Черноусько, *Об определении формы равновесия жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения*, Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 5, 152 - 156, 1966.
4. Н. В. Баничук, В. М. Петров, Ф. Л. Черноусько, *Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций*, ЖВМ и МФ, **6**, 6, 947 - 961, 1966.
5. Н. В. Баничук, *Расчет течения вязко-пластической среды в трубах методом локальных вариаций*. Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 6, 197 - 200, 1966.
6. Н. В. Баничук, *Расчет упруго-пластического кручения стержней методом локальных вариаций*, Механика твердого тела, 1, 145 - 148, 1967.
7. Н. В. Баничук, *Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями*, Механика твердого тела, 4, 138 - 142, 1967.
8. Н. В. Баничук, И. А. Крылов, В. М. Петров, Ф. Л. Черноусько, *Алгоритм метода локальных вариаций для решения вариационных задач с одной независимой переменной*, Алгоритмы и алгоритмические языки, Вычислительный центр АН СССР, 4, 64 - 76, 1969.
9. Н. В. Баничук, *Расчет нагружения упруго-пластического тела*, Механика твердого тела, 1, 128 - 135, 1969.
10. Н. В. Баничук, В. М. Петров, Ф. Л. Черноусько, *Метод локальных вариаций для вариационных задач с неаддитивными функционалами*, ЖВМ и МФ, **9**, 3, 548 - 557, 1969.
11. Н. В. Баничук, В. М. Петров, Ф. Л. Черноусько, *Алгоритм метода локальных вариаций для задач с частными производными*, Институт проблем механики АН СССР, Препринт, 4, Москва 1971.

12. P. Hodge, W. Prager, *A variational principle for plastic materials with strain-hardening*, J. Math. and Phys., **27**, p. 1, 1948.
13. H. J. Greenberg, *Complementary minimum principles for an elastic plastic material*, Quart. Appl. Math., 7, p. 85, 1949.
14. П. П. Мосолов, В. П. Мясников, *Вариационные методы в теории течения вязко-пластической среды*, Прикл. мат. мех., **29**, 3, 1965.

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ

Работа посвящена методу локальных вариаций для численного решения вариационных задач и приложениям этого метода к задачам теории упругости и пластичности.

Summary

NUMERICAL SOLUTION OF ELASTICITY AND PLASTICITY PROBLEMS BY MEANS OF METHOD OF LOCAL VARIATIONS

The paper is devoted to the method of local variations for numerical solution of variational problems and to some applications of this method to the problems of elasticity and plasticity.

INSTYTUT MECHANIKI
AKADEMII NAUK ZSRR, MOSKWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1971 r.