

WSPÓLDZIAŁANIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH FAŁ NAPRĘŻENIA Z NIEŚCIŚLIWĄ PŁASKĄ PRZEGRODĄ SPOCZYWAJĄCĄ NA PÓŁPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

ANDRZEJ PAPLIŃSKI i EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

WSTĘP 1.

W praktyce inżynierskiej, szczególnie w górnictwie, prowadzone są prace ziemne za pomocą materiałów wybuchowych. Pojawiają się wówczas problemy określania bezpiecznych odległości miejsca wybuchu od naziemnych i podziemnych obiektów w celu uniknięcia ich uszkodzeń. Odległości te określone są, oczywiście, wartościami dynamicznych obciążeń, jakie dany obiekt może wytrzymać.

Drugą klasę zagadnień związanych z tytułem pracy stanowią dynamiczne obciążenia obiektów fortyfikacyjnych, narażonych na działanie fali uderzeniowej wybuchu jądrowego. Między innymi obiekty fortyfikacyjne ze względu na maskowanie muszą być przykryte odpowiednią warstwą gruntu, umożliwiającą wegetację roślin. Ze wzrostem grubości warstwy maleją różnice między roślinami rosnącymi nad obiektem a bezpośrednim otoczeniem (polepsza się maskowanie). Z drugiej strony powstaje pytanie, w jaki sposób warstwa gruntu, znajdująca się nad obiektem, wpływa na jego ruch i dynamiczne obciążenia. W aktualnej literaturze technicznej brak jest konkretnych danych dotyczących tego problemu.

Poruszone wyżej zagadnienia sprowadzają się do trudnych zagadnień dynamiki falowej ośrodków niesprężystych. Były one już przedmiotem studiów wielu autorów [1-8]. Tym niemniej problem ten nie jest do końca rozwiązany.

Celem niniejszej pracy będzie dokładne zbadanie procesu współdziałania obiektu z niestacjonarną plastyczną falą naprężenia w ośrodku sprężysto-plastycznym. W rozważaniach pominiemy odkształcalność obiektu i efekty brzegowe. Przy tych uproszczeniach obiekt można aproksymować płaską nieściśliwą płytą o nieskończonych wymiarach, umieszczoną w gruncie na danej głębokości. Skonstruujemy analityczne rozwiązanie problemu, przeprowadzimy szczegółową analizę ilościową dynamiki płyty i opierając się na tej analizie podamy uproszczone wzory obliczeniowe dla inżynierów zajmujących się badaną problematyką.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy proces współdziałania sprężysto-plastycznej fali odciążenia z nieściśliwą masywną płytą spoczywającą na liniowo-sprężystej półprzestrzeni (całkowicie uwodnionym gruncie) i przykrytą warstwą gruntu o grubości h . Grunt w war-

stwie aproksymujemy plastycznym ośrodkiem z liniową gałęzią obciążenia i sztywnym odcieżeniem (rys. 1). W zakresie średnich technicznie ciśnień ($10\text{--}20\text{ kG/cm}^2$) jest to dobre przybliżenie fizyko-mechanicznych własności suchych gruntów piaszczystych [9 i 10].

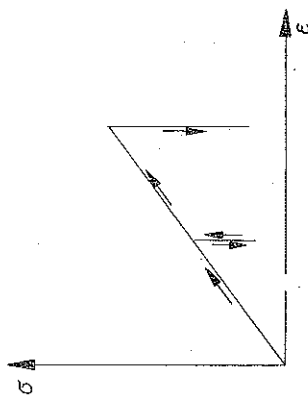
Falę naprężeń generuje równomiernie rozłożone na powierzchni warstwy ciśnienie $p(t)$, przyłożone w sposób nagły i następnie malejące do zera wg następującej funkcji

$$(2.1) \quad p(t) = \begin{cases} p_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, & \text{jeśli } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{jeśli } t \geq \tau. \end{cases}$$

Impedancję warstwy i ośrodka oznaczymy odpowiednio przez $\rho_1 a_1$ i $\rho_2 a_2$. Założymy przy tym, że

$$(2.2) \quad \rho_2 a_2 \geq \rho_1 a_1,$$

co stanowi najczęściej spotykany w praktyce przypadek. Masę wyodrębnionego myślowo z płyty słupka o jednostkowym przekroju oznaczymy przez m .



Rys. 1

Dla tak sformułowanych warunków w warstwie i w ośrodku leżącym pod płytą wytworzy się jednoosiowy stan odkształcenia, a problem będzie przestrzennie jednowymiarowy. Rozważania prowadzić będziemy we współrzędnych Lagrange'a x, t , przy czym oś x -ów z początkiem umieszczonym na powierzchni warstwy skierujemy w głąb ośrodka.

W indeksowych oznaczeniach zmiennych niezależnych przyjmujemy zasadę, że wartość indeksu będzie odpowiadać numerowi danego obszaru na płaszczyźnie fizycznej x, t . Ponadto parametry na frontach fal oznaczać będziemy podwójnym indeksem składającym się ze znaku 0 i cyfry odpowiadającej numerowi danego obszaru. Np. $v_{01}(t)$ oznacza prędkość masową cząstek na froncie fali od strony obszaru I.

W strefach odcieżenia zgodnie z przyjętym modelem (rys. 1) prędkość masowa cząstek nie zależy od współrzędnej x , tj.

$$(2.3) \quad v_i(x, t) = v_{0i}(t).$$

W związku z tym ruch ośrodka jest tutaj określony za pomocą równania

$$(2.4) \quad \sigma_i(x, t) = \rho_1 x v'_{0i}(t) + C(t),$$

przy czym na swobodnej powierzchni mamy

$$(2.5) \quad \sigma_i(0, t) = -p(t) = \begin{cases} -p_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, & \text{jeśli } t \leq \tau, \\ 0, & \text{jeśli } t > \tau. \end{cases}$$

Poza tym przyjmujemy, że badany układ w chwili początkowej był niezaburzony,

$$(2.6) \quad \sigma_i(0, 0) = 0 \quad \text{i} \quad v_i(0, 0) = 0.$$

Dla domknięcia matematycznego sformułowania wyżej podanego problemu należy wykorzystać odpowiednie warunki graniczne na frontach fal silnej nieciągłości i na granicy ośrodków. Będziemy je precyzować w następnym punkcie w trakcie rozwiązywania problemu.

3. ANALITYCZNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU

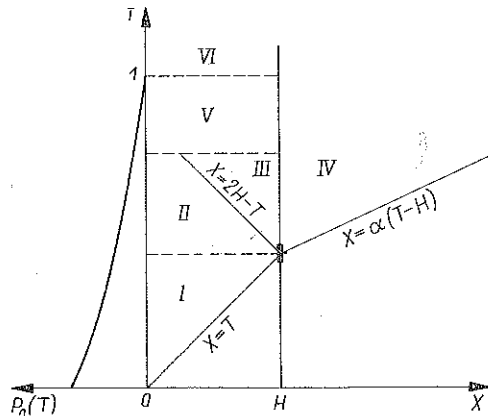
Dla otrzymania wyników w postaci dogodnej dalsze rozważania prowadzić będziemy w następujących wielkościach bezwymiarowych:

$$(3.1) \quad T = \frac{t}{\tau}, \quad X = \frac{x}{a_1 \tau}, \quad H = \frac{h}{a_1 \tau}, \quad \alpha = \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1},$$

$$P_i = \frac{\sigma_i}{p_m}, \quad P_0 = \frac{p(T)}{p_m}, \quad R_1 = \frac{r_1}{p_m}, \quad R_2 = \frac{r_2}{p_m}, \quad M = \frac{m}{\rho_1 a_1 \tau},$$

$$U = \frac{\rho_1 a_1}{p_m \tau} u, \quad V = \frac{\rho_1 a_1}{p_m} v, \quad W = \frac{\rho_1 a_1 \tau}{p_m} w.$$

Dla warunków podanych w p. 2 obraz falowy rozwiązania przyjmuje postać pokazaną na rys. 2.



Rys. 2

Z równań (2.3) i (2.4) wynika, że znajomość prędkości $v_{0i}(t)$ pozwala w łatwy sposób określić jednoznacznie pozostałe wielkości problemu, mianowicie przemieszczenie i przyspieszenie wg. następujących wzorów:

$$(3.2) \quad u(x, t) = \int_0^t v_{0i}(\xi) d\xi, \quad w(x, t) = v'_{0i}(t),$$

a naprężenie z równania (2.4) uzupełnionego odpowiednimi warunkami brzegowymi. Dlatego w dalszym ciągu rozważań ograniczymy się do wyprowadzenia analitycznych wzorów tylko na bezwymiarowy współczynnik prędkości $V_{0i}(T)$.

Na froncie padającej fali odciążenia $X=T$ występuje silna nieciągłość generowana przez nieciągły warunek brzegowy (2.1). Zatem uwzględniając zerowe warunki początkowe (2.6) mamy

$$(3.2)' \quad P_{01}(T) = -V_{01}(T),$$

a dla chwili początkowej $T=0$

$$(3.3) \quad V_{01}(0) = -P_{01}(0) = 1.$$

Powyższe związki uzupełniają układ warunków dla równania ruchu (2.4) w obszarze I.

Podstawiając (2.4) do (2.5) otrzymamy

$$(3.4) \quad C(t) = -p_m(t).$$

Wykorzystując dalej (3.2) i (3.4) dostaniemy

$$(3.5) \quad V_{01}'(T) + \frac{1}{T} V_{01}(T) = \frac{1}{T} P_0(T)$$

lub

$$(3.6) \quad V_{01}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T P_0(\xi) d\xi.$$

Wprowadzając z kolei (2.1) do (3.6) po wykonaniu całkowania otrzymamy wzór na $V_{01}(T)$:

$$(3.7) \quad V_{01}(T) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{T} [1 - (1-T)^{n+1}] = -P_{01}(T).$$

Fala odciążenia po dotarciu do płyty ulega odbiciu. Z przyjętego modelu ośrodka (rys. 1) wynika, że na każdej głębokości X , do której dochodzi fala odbita, naprężenie przed frontem fali musi wzrosnąć do maksymalnej wartości osiągniętej na froncie fali padającej. Mamy zatem

$$P_{02}(X) = P_{01}(X)$$

lub

$$P_{02}(T) = P_{01}(2H-T),$$

a po wykorzystaniu (3.7)

$$(3.8) \quad P_{02}(T) = -\frac{1}{(n+1)(2H-T)} [1 - (1-2H+T)^{n+1}].$$

Dalej z (2.4) i (3.4) mamy

$$(3.9) \quad V_{02}(T) = \int_H^T \frac{P_{02}(\xi) + P_0(\xi)}{2H-\xi} d\xi + V_{01}(H).$$

Stąd po podstawieniu (3.8) i (2.5) oraz scałkowaniu otrzymamy

$$(3.10) \quad V_{02}(T) = \mathbf{1}(1-T) \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-2H)^k}{n-k} [(1-T)^{n-k} - (1-H)^{n-k}] + \right. \\ \left. + (1-2H)^n \ln \left(2 - \frac{T}{H} \right) \right\} + \mathbf{1}(T-1) \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-2H)^k}{n-k} (1-H)^{n-k} - \right. \\ \left. - (1-2H)^k \ln \left(2 - \frac{1}{H} \right) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1-k} [(1-2H+T)^{n+1-k} - \right. \\ \left. - (1-H)^{n+1-k}] + \ln \left(2 - \frac{T}{H} \right) + \frac{1}{n+1} \frac{T}{H} [1 - (1-H)^{n+1}] \right\},$$

gdzie $\mathbf{1}(T)$ jest funkcją Heavyside'a.

Zgodnie z [7 i 11] za frontem fali odbitej występuje proces odciażenia. W związku z tym ruchem ośrodka rządzi tutaj równanie (2.4) z następującymi warunkami na granicach obszaru:

na froncie fali odbitej

$$(3.11) \quad P_{03}(T) - P_{02}(T) = V_{03}(T) - V_{02}(T);$$

na granicy ośrodków

$$(3.12) \quad MV'_{03}(T) = R_1(T) - R_2(T),$$

gdzie R_1 i R_2 są odpowiednio bezwymiarowymi współczynnikami ciśnienia działającego odpowiednio na górną i dolną stronę przegrody. Wykorzystując warunki (3.11) i (3.12) oraz następujące zależności:

$$(3.13) \quad V_{03}(T) = V_4(H, T) = R_2(T)/\alpha, \\ P_3(H, T) = -R_1(T)$$

z (2.4) na funkcję $V_{03}(T)$ otrzymujemy następujące równanie:

$$(3.14) \quad V'_{03}(T) + \frac{\alpha+1}{M+T} V_{03}(T) = \frac{V_{02}(T) - P_{02}(T)}{M+T},$$

a po rozwiązaniu

$$(3.15) \quad V_{03}(T) = \frac{1}{(M+T-H)^{\alpha+1}} \int_H^T (M+\xi-H)^\alpha [V_{02}(\xi) - P_{02}(\xi)] d\xi.$$

Podstawiając do (3.15) wyrażenia (3.8) i (3.10) i wykonując zaznaczone całkowanie otrzymujemy bezpośredni wzór na prędkość poruszania się przegrody:

$$(3.16) \quad V_{03}(T) = - \sum_{k=1}^n \frac{(1-2H)^{k-1}}{(n-k+1)(\alpha+1)} \left\{ \mathbf{1}(1-T)(1-T)^{n-k+1} - \right. \\ \left. - \left[\mathbf{1}(1-T) \left(\frac{M}{M-T-H} \right)^{\alpha+1} + \mathbf{1}(T-1) \left(\frac{M}{M+1-H} \right)^{\alpha+1} \right] (1-H)^{n-k+1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
(3.16) \quad & + \sum_{r=2}^{n-k+2} \frac{(n-k+1)(n-k) \dots (n-k-r+2)}{(\alpha+2) \dots (\alpha+r)} \left\{ \mathbf{1}(1-T)(T-H+M)^{r-1} \times \right. \\
& \times (1-T)^{n-k-r+2} - \left[\mathbf{1}(1-T) \left(\frac{M}{M+T-H} \right)^{r-1} + \mathbf{1}(T-1) \left(\frac{M}{M+1-H} \right)^{r-1} \right] \times \\
& \times (1-H)^{n-r-k+2} \left. \right\} - \frac{1}{\alpha+1} \left[1 - \left(\frac{M}{M+T-H} \right)^{\alpha+1} \right] (1-H)^{n-k+1} + \\
& + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n-k+1)(\alpha+1)} \left\{ (1-2H+T)^{n-k+1} - (1-H)^{n-k+1} + \right. \\
& + \sum_{r=2}^{n-k+2} (-1)^{r-1} \frac{(n-k+1)(n-k) \dots (n-k-r+2)}{(\alpha+2) \dots (\alpha+r)} \left[(M+T-H)^{r-1} \times \right. \\
& \times (1-2H+T)^{n-k-r+2} - \left. \left(\frac{M}{T-H+M} \right)^{\alpha+1} M^{r-1} (1-H)^{n-k-r+2} \right] \left. \right\} - \\
& - (1-2H)^n \frac{1}{\alpha+1} \left\{ \left[1 - \left(\frac{M+H}{M+T-H} \right)^{\alpha+1} \right] \left[\mathbf{1}(1-T) \ln \left(2 - \frac{T}{H} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbf{1}(T-1) \ln \left(2 - \frac{1}{H} \right) \right] - \mathbf{1}(1-T) \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{(M+H)^i}{\alpha+1-i} \left[(T-H+M)^i - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{M}{T-H+M} \right)^{\alpha+1} M^{-i} \right] + \mathbf{1}(T-1) \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{(M+H)^i}{\alpha+1-i} \left[(1-H+M)^{-i} - \right. \right. \\
& \left. \left. - M^{-i} \left(\frac{M}{1-H+M} \right)^{\alpha+1} \right] \right\} - \frac{1}{\alpha+1} \left\{ \left[1 - \left(\frac{M+H}{M+T-H} \right)^{\alpha+1} \right] \ln \left(2 - \frac{T}{H} \right) - \right. \\
& \left. - \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{(M+H)}{\alpha+1-i} \left[(1-H+M)^{-i} - M^{-i} \left(\frac{M}{1-H+M} \right)^{\alpha+1} \right] \right\} + \\
& + \sum_{q=2}^{n+1} \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-q+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q} \frac{(-1)^{q-1}}{\alpha+1} \left\{ (2H-T)^{q+1} + \left(\frac{M}{T-H+M} \right)^{\alpha+1} \times \right. \\
& \times \left(\frac{H}{T} \right)^{q-1} + \sum_{p=2}^q \frac{(q-1)(q-2) \dots (q-p+1)}{(\alpha+2) \dots (\alpha+p)} \left[(T-H+M)^{p-1} (2H-T)^{q-p} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{M}{T-H+M} \right)^{\alpha+1} M^{p-1} H^{q-p} \right] \left. \right\} + \left[1 - \left(\frac{M}{T-H+M} \right)^{\alpha+1} \right] V_{01}(H) \alpha + 1.
\end{aligned}$$

Pozostajacy przed frontem fali odbitej ośrodek wytraca stopniowo swojã prędkość aż do momentu, w którym następuje zrównanie prędkości przed i za frontem fali silnej nieciągłości. Nieciągłość wówczas zanika i cała warstwa ośrodka sprężysto-

plastycznego zaczyna się poruszać jako sztywna całość. Chwilę wyrównania prędkości oznaczamy przez T_k i określamy ją z następującej zależności:

$$(3.17) \quad V_{03}(T_k) = V_{02}(T_k).$$

Wzór (3.16) odnosi się oczywiście do przedziału

$$(3.18) \quad H < T \leq T_k.$$

Natomiast dla

$$(3.19) \quad T_k \leq T \leq 1$$

postępując podobnie jak wyżej otrzymujemy

$$(3.20) \quad V_{05}(T) = e^{-\frac{\alpha}{M+H}(T-T_k)} \left[\int_{T_k}^T \frac{P_0(\xi)}{M+H} e^{\frac{\alpha}{M+H}(\xi-T_k)} d\xi + V_{03}(T_k) \right].$$

Stąd po wykorzystaniu (2.1) i scałkowaniu mamy

$$(3.21) \quad V_{05}(T) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \left(\frac{\alpha}{M+H} \right)^{i-n} [(1-T)^i + (1-T_k)^i e^{-\frac{\alpha}{M+H}(T-T_k)}] + \\ + V_{03}(T_k) e^{-\frac{\alpha}{M+H}(T-T_k)}.$$

Dla pozostałego zakresu czasu $T \geq 1$ znajdziemy

$$(3.22) \quad V_{06}(T) = V_{05}(1) e^{-\frac{\alpha}{M+H}(T-1)}.$$

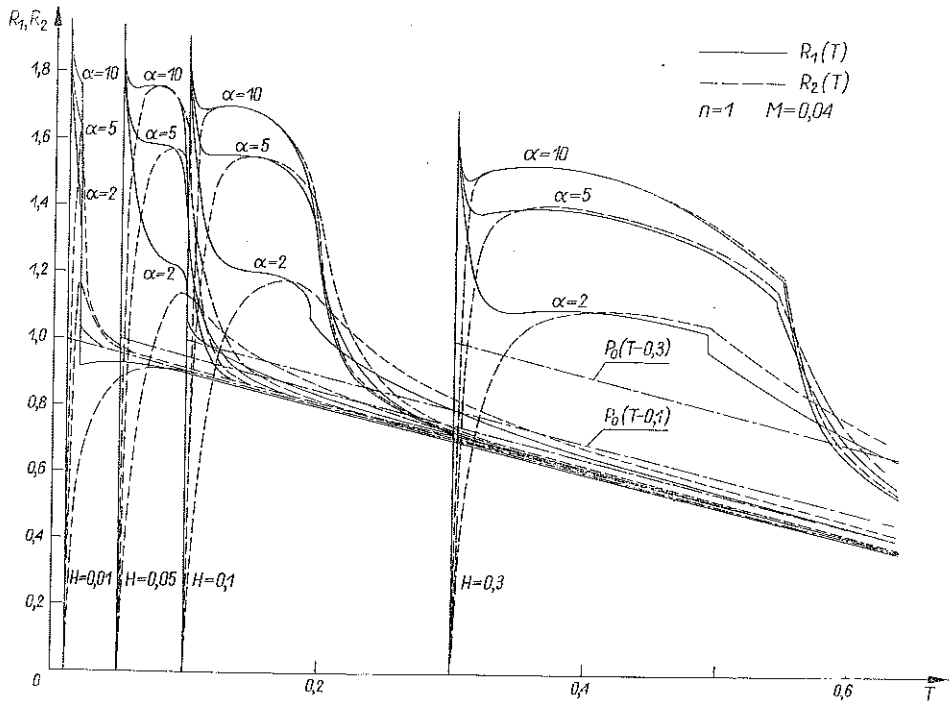
Reakcje na płycie i pod płytą określamy ze wzorów typu (3.13), które odnoszą się do całego zakresu zmiany zmiennej T . Tym samym problem został do końca rozwiązany. Obecnie przejdziemy do numerycznej analizy problemu.

4. ANALIZĄ NUMERYCZNA PARAMETRÓW RUCHU PRZEGRODY

Skonstruowane w poprzednim punkcie rozwiązanie analityczne pozwala na dokładny liczbowy opis ruchu badanej przegrody. Analizując wyprowadzone wzory można stwierdzić, że najbardziej istotnymi parametrami określającymi ruch przegrody są reakcje, działające na nią od strony warstwy sprężysto-plastycznej $R_1(T)$ i od strony półprzestrzeni sprężystej $R_2(T)$. Z ich wartościami i przebiegami w czasie w prosty sposób łączą się parametry ruchu przegrody:

$$(4.1) \quad W(T) = \frac{R_1(T) - R_2(T)}{M}, \\ V(T) = \frac{1}{\alpha} R_2(T), \\ U(T) = \frac{1}{\alpha} \int_H^T R_2(\xi) d\xi.$$

Dlatego w dalszym ciągu rozważań skupimy się głównie na analizie funkcji $R_1(T)$ i $R_2(T)$. Z wyprowadzonych wzorów wynika, że reakcje $R_1(T)$ i $R_2(T)$ zależą od czterech następujących parametrów: n wykładnika obciążenia, α stosunku impedancji ośrodków, H bezwymiarowego współczynnika grubości warstwy oraz M bezwymiarowego współczynnika masy przegrody.



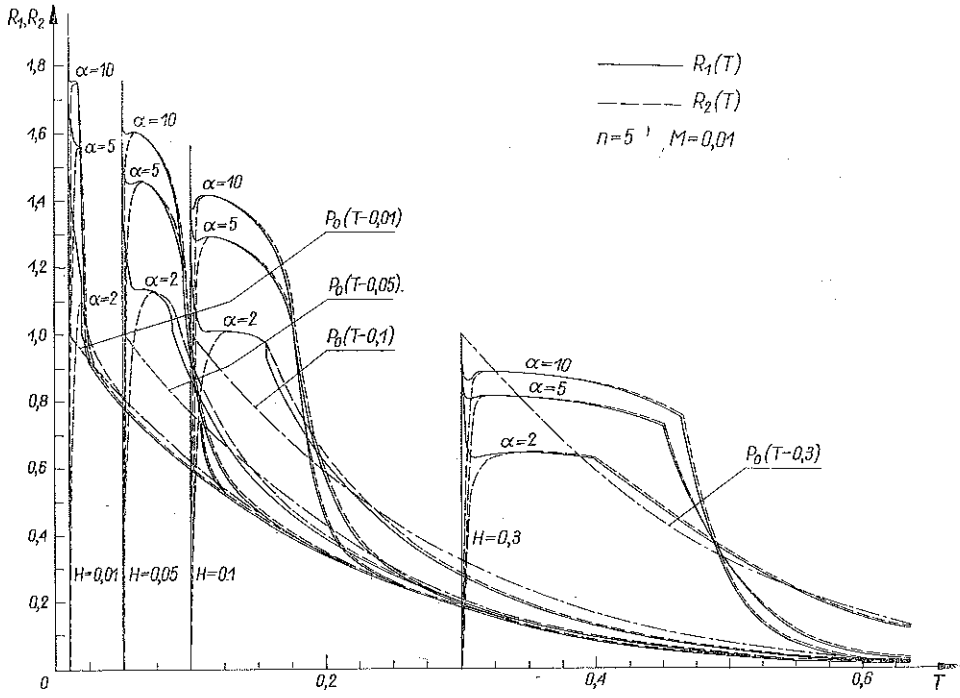
Rys. 3a

Charakter wpływu tych parametrów na zmianę funkcji $R_1(T)$ i $R_2(T)$ w czasie przedstawiony jest na rys. 3a–3i (dane liczbowe na wykresach). Na tych samych rysunkach dla graficznego porównania zamieszczono zmianę obciążenia zewnętrznego jako funkcji czasu (linia złożona z kresek i kropek). Czas odmierzano w tym przypadku od chwili dotarcia czoła fali padającej do przegrody, tj. $P_0(T_H) = P_0(T-H) = (1-T+H)^n$.

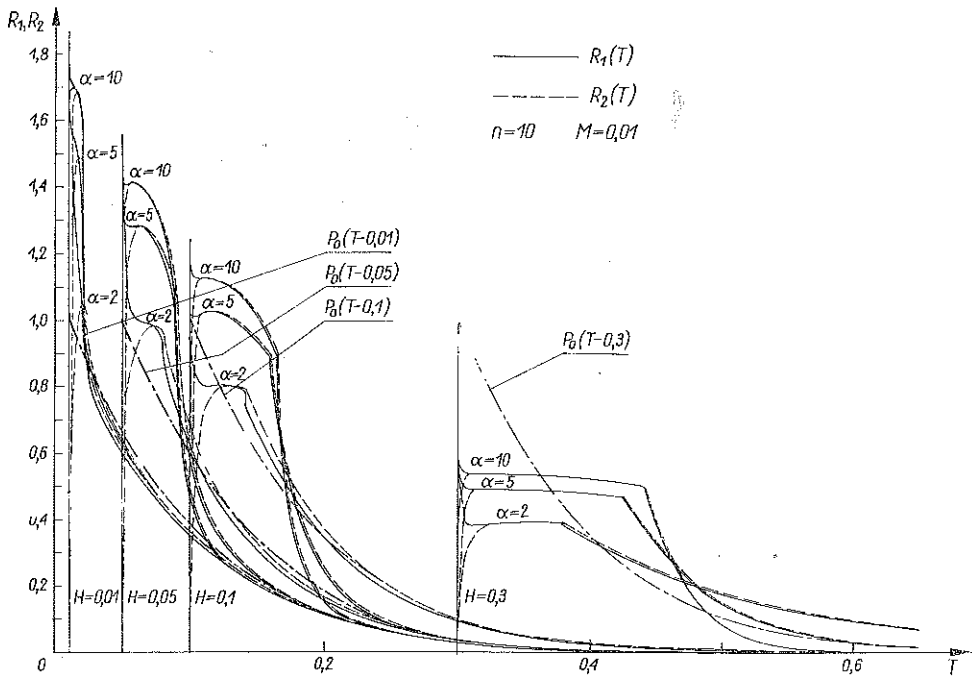
Początkowe ciśnienie $R_1(H) = P_{0H}$, działające na przegrodę od strony warstwy w momencie odbicia, jest dwukrotnie większe od ciśnienia padającego. Określamy je z następującego wzoru:

$$(4.2) \quad P_{0H} = R_1(H) = -2P_{01}(H) = 2 \frac{1 - (1-H)^{n+1}}{(n+1)H}.$$

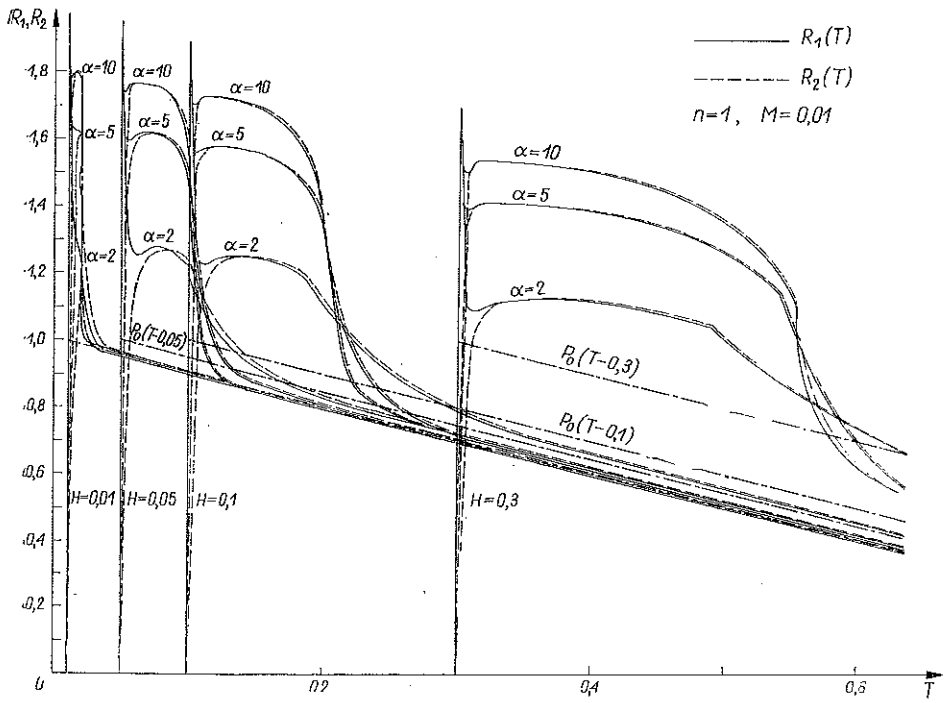
Następnie reakcja $R_1(T)$ intensywnie maleje, natomiast reakcja pod płytą $R_2(T)$ szybko rośnie od zera do maksymalnej wartości. Bardzo duży gradient zmniejszania się $R_1(T)$ powodowany jest oddziaływaniem swobodnej powierzchni warstwy. Z kolei intensywność narastania reakcji $R_2(T)$ zależy w sposób istotny od para-



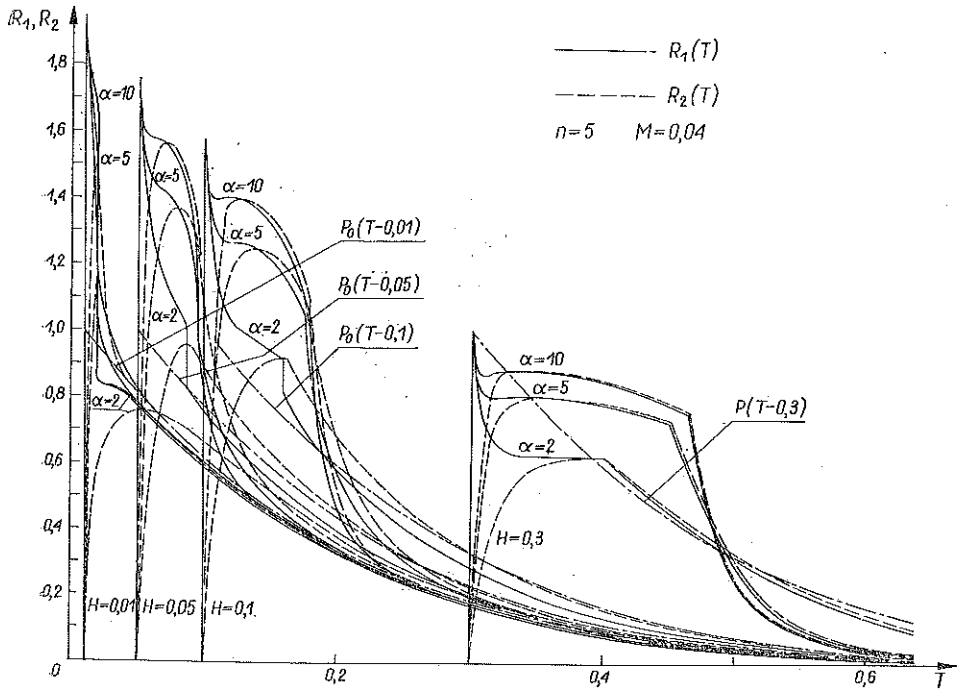
Rys. 3b



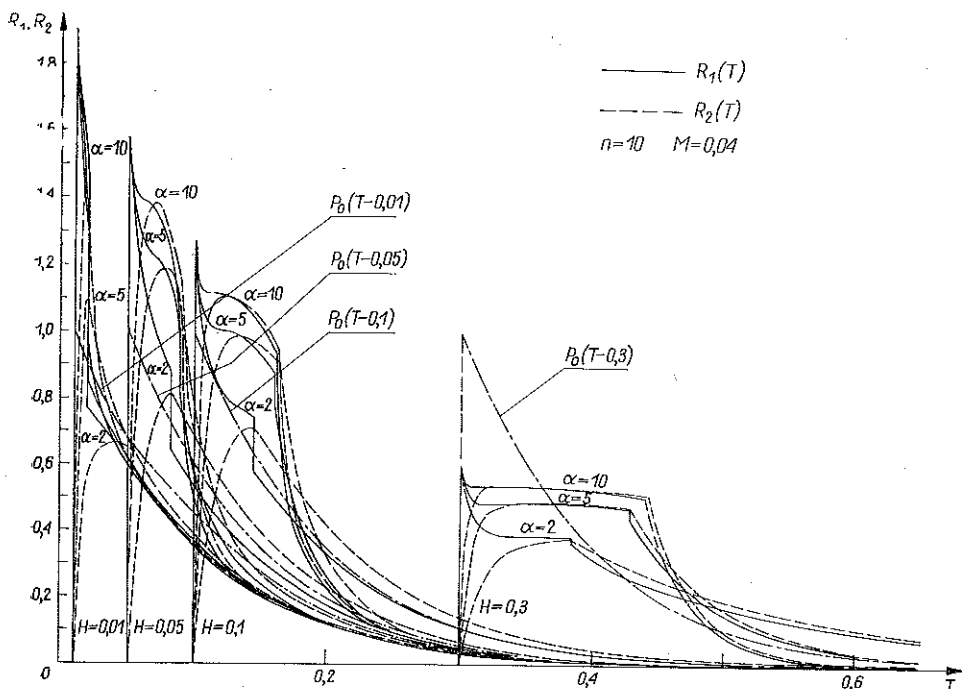
Rys. 3c



Rys. 3d



Rys. 3e



Rys. 3f

metrów α , H i M . Im większa jest masa przegrody M i głębokość jej zanurzenia H oraz im mniejsza jest różnica między impedancjami ośrodków położonych nad i pod przegrodą, tym łagodniejsze jest narastanie reakcji $R_2(T)$. Czas narastania dla realnie występujących w praktyce inżynierskiej wartości parametrów n , α , H i M jest rzędu 0,01–0,1 czasu trwania obciążenia zewnętrznego. Po tych szybkich zmianach następuje okres powolnej zmiany obydwu reakcji: pojawia się odcinek typu «plateau», który rozbudowuje się w miarę wzrostu głębokości H . Przyczyną tego faktu jest bezwładność usztywnionej części warstwy zawartej między przegrodą i frontem fali odbitej. Masa tej części warstwy, która rośnie z upływem czasu, dołącza się do masy przegrody podtrzymując w ten sposób nacisk na półprzestrzeń sprężystą (energia odprowadzana do półprzestrzeni jest uzupełniana z warstwy). Stan taki utrzymuje się do chwili zrównania się masowych prędkości ośrodka przed i za frontem fali odbitej. W tym momencie znika silna nieciągłość na froncie fali odbitej i następuje skokowa zmiana warunku brzegowego (z warunku na froncie fali odbitej na warunek na powierzchni warstwy). Powoduje to skokową zmianę reakcji R_1 o wartość ΔR_1 , gdzie

$$(4.3) \quad \Delta R_1 = -P_{02}(T_k) \left(1 - \frac{T_k - H}{M + T_k - H} \right) - \\
 - (1 - T_k)^n \frac{M}{M + H} + V_{03}(T_k) \alpha \left(\frac{T_k - H}{M + T_k - H} - \frac{M + H}{H} \right).$$

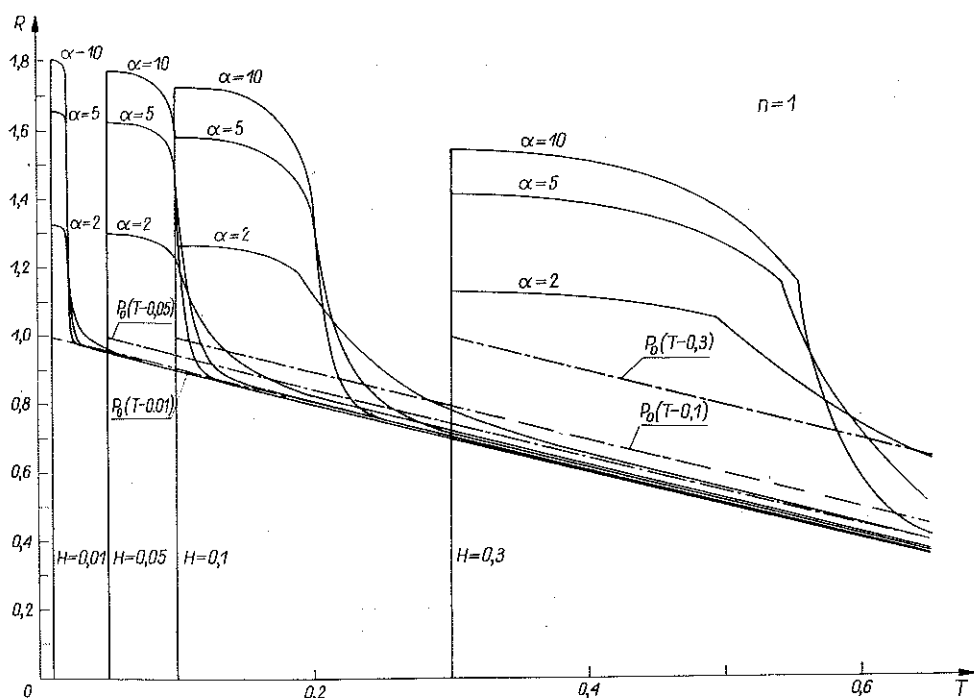
Skok ten wynika z własności modelu ze sztywnym obciążeniem. W rzeczywistości od chwili zaniknięcia silnej nieciągłości na froncie fali odbitej funkcje $R_1(T)$ i $R_2(T)$ będą intensywnie malały do wartości równej w przybliżeniu obciążeniu zewnętrznemu z przesuniętym argumentem o wartość H , tj.

$$(4.4) \quad R_1(T) \approx R_2(T) \approx P_0(T-H).$$

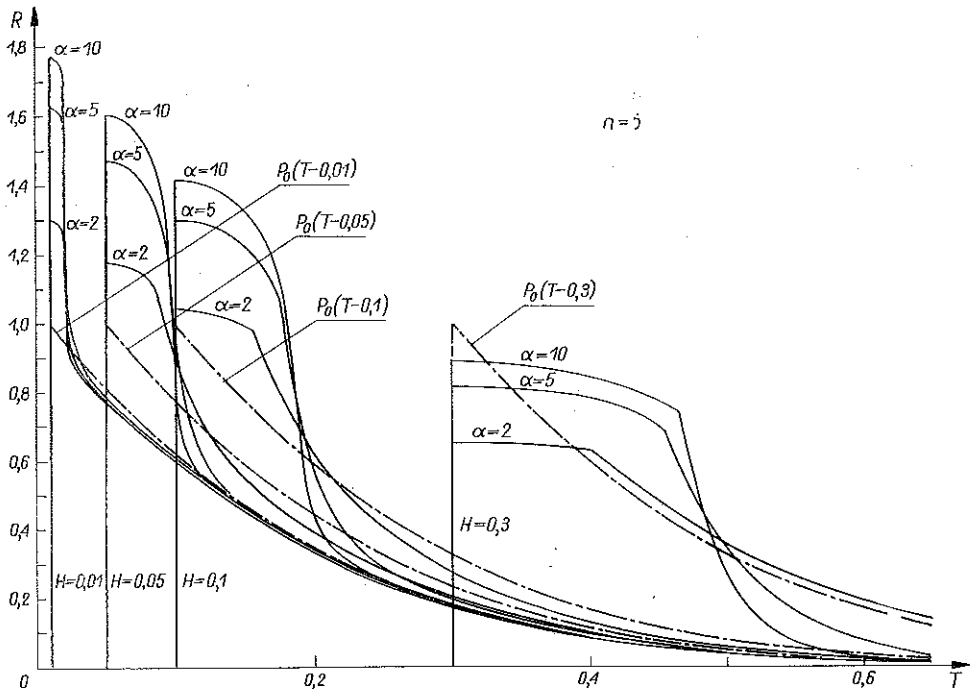
Wartości reakcji $R_1(T)$ i $R_2(T)$ w istotny sposób zależą od parametru n , szczególnie przy większych wartościach H (por. np. rys. 3a i 3c).

Ciekawe jest również porównanie wykresów zmiany reakcji $R_1(T)$ i $R_2(T)$ z przypadkiem, kiedy na granicy ośrodków nie ma przegrody (rys. 4a–4c). Widać, że umieszczenie między sprężysto-plastyczną warstwą a półprzestrzenią sprężystą masywnej, nieściśliwej przegrody w istotny sposób zmienia fizyczny charakter zjawisk zachodzących na granicy ośrodków w początkowej fazie odbicia i załamania padającej fali naprężeń. Działanie masy przegrody przejawia się w opóźnieniu zmian naprężeń i prędkości przekazywanych z warstwy do półprzestrzeni i na odwrót. Poza tym w reakcji $R_1(T)$ po odbiciu fali naprężenia od przegrody pojawia się charakterystyczny pik o dużej amplitudzie i krótkim czasie trwania, który nie występuje na granicy ośrodków bez przegrody. Zaczynając od «plateau» reakcje $R_1(T)$ i $R_2(T)$ praktycznie zmieniają się tak samo, jak ciśnienie $P_H(T)$ na granicy ośrodków bez przegrody.

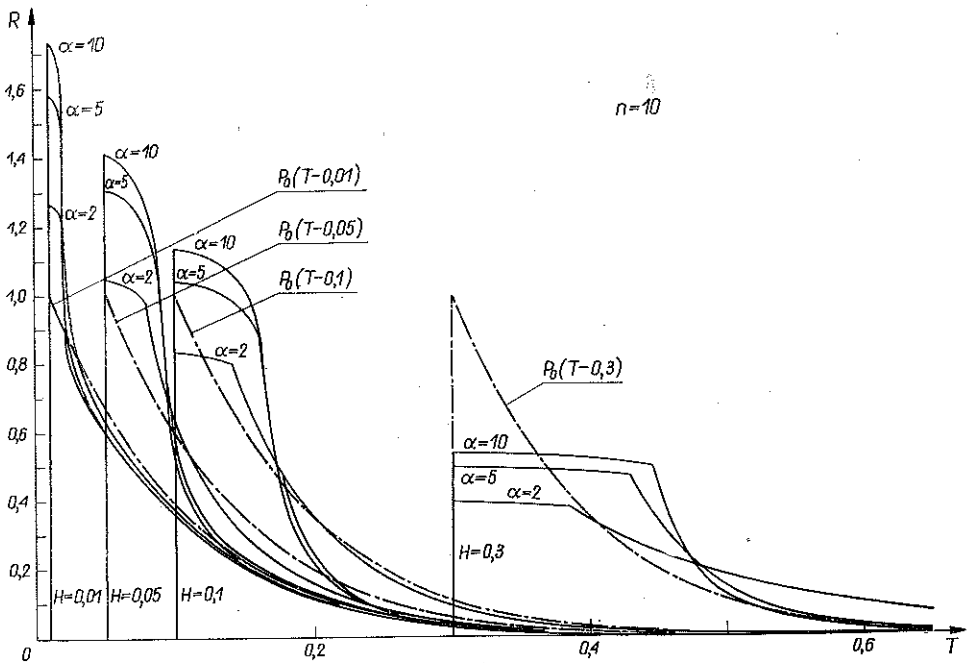
Na zakończenie należy podkreślić, że otrzymane wykresy funkcji $R_1(T)$ i $R_2(T)$ są zbliżone z wynikami eksperymentalnymi podanymi w [6].



Rys. 4a



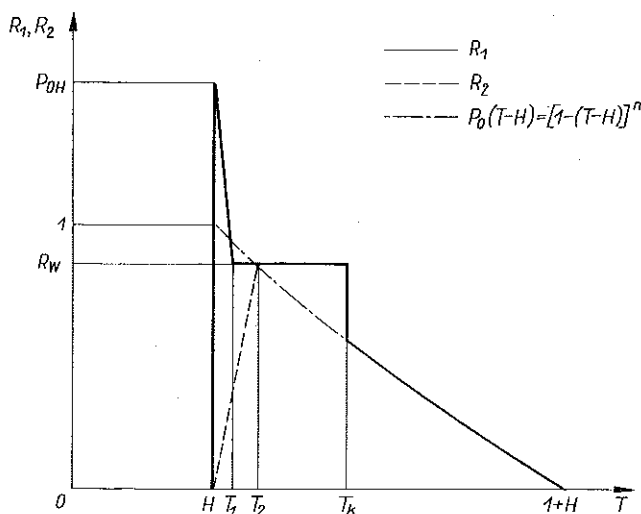
Rys. 4b



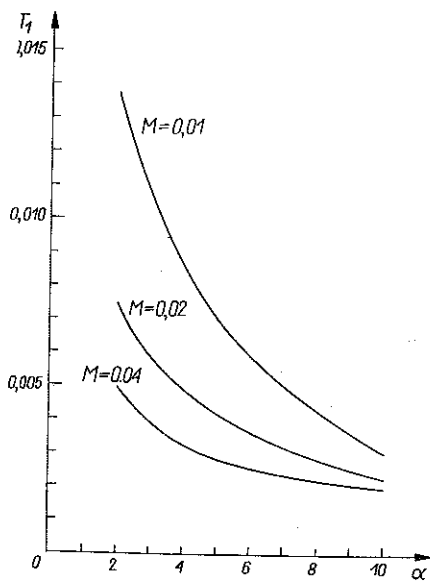
Rys. 4c

5. PRZYBLIŻONE WZORY DLA OBLICZEŃ INŻYNIERSKICH NA «REAKCJE» $R_1(T)$ I $R_2(T)$

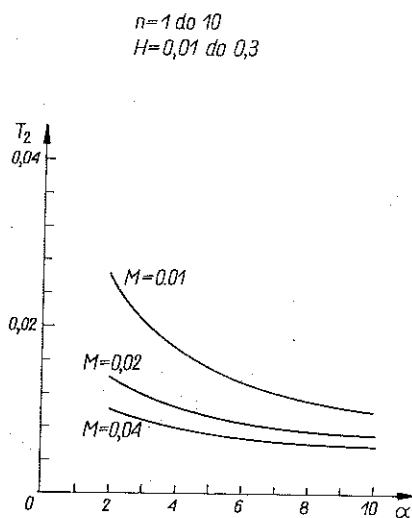
Na podstawie przeprowadzonej ścisłej analizy ilościowej problemu można dla funkcji $R_1(T)$ i $R_2(T)$ zaproponować następujące przybliżone wykresy w czasie (rys. 5). Przyjmujemy mianowicie, że po odbiciu obydwie reakcje zmieniają się liniowo dążąc do wartości R_w , przy czym $R_1(T)$ malejąc osiąga ją w czasie T_1 , a $R_2(T)$ rosnąc — w czasie T_2 . Dalej zakładamy, że obydwie reakcje są sobie równe i pozostają stałe do chwili zaniku frontu silnej nieciągłości, tj. do $T=T_k$, a następnie



Rys. 5



Rys. 6



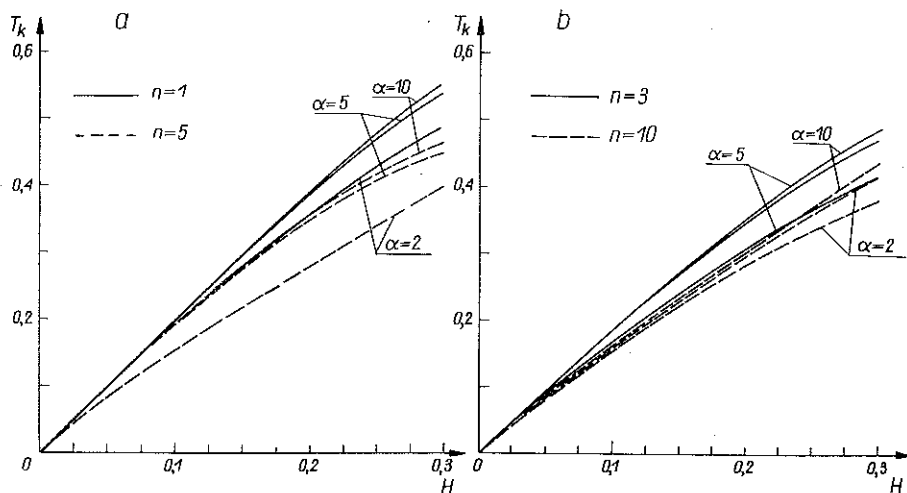
Rys. 7

zmieniają się tak samo jak zewnętrzne obciążenie z przesuniętym argumentem $P_0(T-H)$.

Maksymalną wartość $R_1(H)$ określa wzór (4.2), natomiast R_w można określić za pomocą następującego wzoru:

$$(5.1) \quad R_w = 2\alpha \frac{1 - (1-H)^{n+1}}{H(\alpha+1)(n+1)}$$

Powyższy wzór daje wartości nieco większe od rzeczywistych (1-7%).



Rys. 8

Wartości T_1 , T_2 i T_k określamy z wykresów zamieszczonych na rys. 6, 7 i 8a-8b. Szacunkowo wartość T_1 i T_k można określić ze wzorów następujących:

$$(5.2) \quad T_1 \approx H + \frac{M}{\alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \leq 5$$

oraz

$$(5.3) \quad T_k \approx H \quad \text{dla} \quad H \leq 0,1.$$

W ten sposób dość złożony problem mechaniki falowej został sprowadzony do prostych formuł nadających się do stosowania w biurach projektowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. KALISKI, J. OSIECKI, *Problem odbicia się fali odciążenia od sztywnej ściany dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia*, Biul. WAT, Nr 2(85), 1959; również w Proc. Vibr. Probl., 1, 1959.
2. S. KALISKI, J. OSIECKI, *Zagadnienie odbicia się fali odciążenia od odkształcalnej podpory dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia*, Biul. WAT, Nr XLIII, 1959.
3. Н. В. Зволлинский, Г. В. Рьков, *Отражение пластической волны от преграды*, ПИММ, 27, 1, 1963.

4. Г. М. Ляхов, *Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах*, Изд. Недра, Москва 1964.
5. Г. М. Ляхов, *Взаимодействие ударной волны в пластической среде с сооружением*, Материалы всесоюзного симпозиума по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах, Баку 1966.
6. З. В. Нарожная, *Отражение плоской взрывной волны в грунте от подстилающего слоя*, Изд. Недра, Москва 1964.
7. Н. В. Зволянский, *Отражение и преломление плоской пластической волны при наличии граничной плоскости*, ПММ, **31**, 5, 1967.
8. S. KALISKI, E. WŁODARCZYK, *On certain closed-form solutions of the propagation and reflection problem of an elastic-visco-plastic waves in a bars*, Arch. Mech. Stos., **19**, 3, 1967.
9. X. A. Рахматулин, А. Я. Сагомоян, Н. А. Алексеев, *Вопросы динамики грунтов*, Изд. МГУ, Москва 1964.
10. E. WŁODARCZYK, *Wpływ liniowo-sprężystego odciążenia na parametry ruchu sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym gruncie*, Biul. WAT, Nr 7 (203), 1969.
11. E. WŁODARCZYK, *On the process loading behind fronts of reflections and refraction shock wave in plastic layer mediums*, Proc. Vibr. Probl. [in print].

Резюме

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ, С НЕСЖИМАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ПЕРЕГОРОДНОЙ, ПОКОЯЩЕЙСЯ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В работе дается аналитическое решение задачи о взаимодействии упруго-пластической волны разгрузки с несжимаемой массивной пластинкой, покоящейся на линейно-упругом полупространстве и накрытой слоем грунта толщиной h . Грунт в слое аппроксимируется пластической средой с линейной ветвью нагрузки и жесткой разгрузки (рис. 1). Выводятся аналитические замкнутые формулы для давления, действующего на пластинке и под пластинкой. Проводится обширный числовой анализ вышеприведенных реакций в функции времени. Предлагаются приближенные формулы пригодные для практических инженерных расчетов.

SUMMARY

INTERACTION OF ELASTIC-PLASTIC STRESS WAVES WITH AN INCOMPRESSIBLE PLANE WALL RESTING ON ELASTIC HALF-SPACE

The paper presents a solution of the problem of interaction between an elastic-plastic unloading wave and an incompressible massive plate resting on a linearly elastic half-space and covered by a layer of soil of thickness h . The soil layer is approximated by a plastic medium with linear loading and rigid unloading branches (Fig. 1). Closed form solutions are analytically derived for the pressure acting over and under the plate. Extensive numerical analysis of the time-dependent reactions mentioned above is given. Approximate formulae suitable for practical engineering purposes are proposed.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 września 1971 r.