

## O LINIOWYCH ZAGADNIENIACH DYSKRETNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI. I

S. KONIECZNY (ŁÓDŹ), F. PIETRAS i Cz. WOŹNIAK (WARSZAWA)

### WSTĘP

Tematem pracy jest zastosowanie równań dyskretnej teorii sprężystości (podanych w pracy [1]) do opisu współdziałających układów dynamicznych złożonych z ciał sztywnych, w których pojawiają się tylko niewielkie przesunięcia i obroty względem wyróżnionego układu odniesienia. Układy te m.in. są modelami dynamicznymi konstrukcji prętowych o sztywnych węzłach. Rozpatrywanie tych układów w ramach dyskretnej teorii sprężystości dostarcza algorytmów obliczeniowych dla różnych zagadnień szczególnych oraz pozwala na dosyć ogólne formułowanie problemów kształtowania i optymalizacji. Ponadto dla siatkowych dźwigarów powierzchniowych, dających się opisać w sposób przybliżony za pomocą równań różniczkowych cząstkowych [3], na podstawie dyskretnej teorii sprężystości łatwo określić kryteria stosowalności tychże równań. W przypadku szczególnym, gdy równania dyskretnej teorii sprężystości są równaniami różnicowymi [1], to równania statyki układów prętowych rozważanych w tej pracy są formalnie równoważne równaniom wyprowadzonym i stosowanym w pracy [2].

Praca składa się z dwóch części. W niniejszej, pierwszej części pracy podano ogólny układ równań i warunków brzegowych dyskretnej teorii sprężystości, układ równań różnicowych i układ równań różniczkowych dyskretnej teorii sprężystości, a następnie wyprowadzono równania ogólne, różnicowe i różniczkowe teorii infinitezymalnej dla układu ciał sztywnych (punkty 1–3)<sup>(1)</sup>. W punktach 4–5 rozpatrywano liniowo-sprężyste układy prętów przyrządowych o masie zaczepionej wyłącznie w sztywnych węzłach, podając ogólną postać równań ruchu i równań konstytutywnych dla takich układów, następnie równania różnicowe i różniczkowe dla regularnych siatek prętowych oraz równania dla zagadnienia płaskiego w przypadku, gdy dzieli się ono na dwa niezależne zagadnienia: płytowe i tarczowe. Druga część pracy zawiera analizę numeryczną stosowalności równań różniczkowych cząstkowych do opisu tarcz i płyt siatkowych, obliczenia porównawcze pewnych powłok siatkowych z punktu widzenia zagadnienia kształtowania oraz przykład obliczenia nieregularnych siatek prętowych wraz z zagadnieniem optymalizacji.

Oznaczenia stosowane w pracy są analogiczne do oznaczeń w [1]. Wskaźniki  $a, b, \dots$  przebiegają ciąg 1, 2, ...,  $n$ , wskaźniki  $A, \Phi, \dots$  ciąg I, II, ...,  $m$ , wskaźniki

<sup>(1)</sup> W punktach 1 i 2 zestawiono zależności i równania wyprowadzone w pracy [1].

$\alpha, \beta, \dots$  ciąg 1, 2, ...,  $n$  oraz wskaźniki  $K, L$  ciąg 1, 2, ...,  $N$ . Dodatkowo występujące wskaźniki  $k, l, m, \dots$  przebiegające w punktach 1–6 ciąg 1, 2, 3 oraz w p. 7 ciąg 1, 2. Wskaźniki  $\kappa, \lambda, \mu, \dots$  przebiegają natomiast ciąg 1, 2, 3. Stosujemy konwencję sumacyjną. Różniczkowanie względem czasu oznaczono kropką, względem pozostałych zmiennych przecinkiem.

## 1. OGÓLNE RÓWNANIA DYSKRETNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Oznaczmy przez  $D$  przeliczalny zbiór układów dynamicznych  $d \in D$ , z których każdy ma tę samą liczbę stopni swobody  $n$ . Ruch każdego układu jest więc określony  $n$  funkcjami  $q^a(d, \tau)$  gładkimi w przedziale  $\tau_0 < \tau < \tau_1$ , gdzie  $\tau$  jest współrzędną czasu. Zakładamy ponadto, że dla każdego  $d \in D$  oraz każdego  $\tau$  ciąg liczb  $q^a(d, \tau)$  wyznacza wektor  $q(d, \tau)$  w pewnej  $n$ -wymiarowej przestrzeni wektorowej  $V^n$ ,  $q(d, \tau) \in V^n$ .

Niech  $m \geq 1$  będzie daną liczbą naturalną oraz niech  $D = D_A \cup D_{-A}$  dla każdego  $A$ , gdzie  $D_A$  i  $D_{-A}$  są równolicznymi podzbiórmi zbioru  $D$ . Każdy ciąg  $m$  różnowartościowych funkcji  $f_A: D_A \rightarrow D_{-A}$ , spełniających warunki  $f_A(d) \neq d$ ,  $f_\Phi(f_A(d)) \neq d$ ,  $f_A(d) = f_\Phi(d) \Rightarrow A = \Phi$  dla każdego  $d \in D_A \cap D_\Phi$ ,  $f_A(d) \in D_\Phi$  oraz każdego  $A$  i  $\Phi$ , wyznacza na  $D$  strukturę różnicową rzędu  $m$  [1]. Oznacza to, że gdy dana jest dowolna funkcja  $\varphi: D \rightarrow R$ , gdzie  $R$  jest zbiorem liczb rzeczywistych, to istnieje  $2m$  funkcji  $A_A \varphi: D_A \rightarrow R$ ,  $\bar{A}_A \varphi: D_{-A} \rightarrow R$  zwanych odpowiednio prawymi i lewymi różnicami funkcji  $\varphi$ , danych przez  $A_A \varphi(d) = \varphi(f_A(d)) - \varphi(d)$ ,  $d \in D_A$  oraz  $\bar{A}_A \varphi(d) = \varphi(d) - \varphi(f_{-A}(d))$ ,  $d \in D_{-A}$ . Podzbiór  $D' = \bigcap_{A=1}^m (D_A \cap D_{-A})$  nazywamy wnętrzem zbioru  $D$ ; gdy  $D' \neq \emptyset$ , to dla każdego  $d \in D'$  istnieje dokładne  $m$  prawych różnic oraz  $m$  lewych różnic dowolnej funkcji  $\varphi: D \rightarrow R$ . Podzbiór  $\partial D = D \setminus D'$  nazywamy brzegiem zbioru  $D$ ; gdy  $\partial D \neq \emptyset$ , to dla każdego  $d \in \partial D$  i każdego  $A$  istnieje albo prawa, albo lewa różnica funkcji  $\varphi$ . Pojęcia wnętrza i brzegu zbioru  $D$  są określone wyłącznie dla danej struktury różnicowej na zbiorze  $D$ . Dokładniejsze omówienie pojęcia struktury różnicowej podano w [4].

Oznaczmy przez  $T(d, \tau, q(d, \tau), \dot{q}(d, \tau))$  energię kinetyczną układu dynamicznego  $d \in D$  oraz przez  $\pi$  potencjał zbioru  $D$  układów dynamicznych. Gdy na zbiorze  $D$  istnieje struktura różnicowa, przy pomocy której potencjał  $\pi$  da się przedstawić w postaci

$$(1.1) \quad \pi = \sum_{d \in D} \varepsilon_0(d, q(d, \tau), [A_A q(d, \tau)])$$

(gdzie prawe różnice  $A_A q(d, \tau)$  są określone dla każdego  $d \in D_A$ ), to zbiór  $D$  nazywamy dyskretnym układem sprężystym, a każde  $\varepsilon_0(d, \dots)$  potencjałem sprężystym w elemencie  $d \in D$ . Zakładając, że  $D' \neq \emptyset$ , równania ruchu układu dyskretnego napiszemy w postaci [1]

$$(1.2) \quad \bar{A}_A T_a^A(d, \tau) + t_a(d, \tau) + f_a(d, \tau) = z_a(d, \dots), \quad d \in D', \quad \tau_0 < \tau < \tau_1,$$

gdzie  $f_a(d, \tau)$  są siłami zewnętrznymi względem  $D$ , działającymi na element  $d \in D$ ,  $z_a(d, \dots)$  są siłami bezwładności [1],

$$(1.3) \quad z_a(d, \dots) = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial T(d, \dots)}{\partial \dot{q}^a(d, \tau)} - \frac{\partial T(d, \dots)}{\partial q^a(d, \tau)}, \quad d \in D, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$$

oraz  $T_a^A(d, \tau)$ ,  $t_a(d, \tau)$  są składowymi stanu napięcia między elementami  $d \in D$ :

$$(1.4) \quad T_a^A(d, \tau) = \frac{\partial \varepsilon_0(d, \dots)}{\partial \Delta_A q^a(d, \tau)}, \quad d \in D_A, \quad t_a = -\frac{\partial \varepsilon_0(d, \dots)}{\partial q^a(d, \tau)}, \quad d \in D, \\ \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1.$$

Równania (1.4) nazywamy równaniami konstytutywnymi dyskretnej teorii sprężystości [1]. Równania ruchu (1.2), równania konstytutywne (1.4) oraz warunki brzegowe

$$(1.5) \quad q^a(d, \tau) = g^a(d, \tau), \quad d \in \partial D, \quad \tau_0 < \tau < \tau_1$$

i początkowe

$$(1.6) \quad q^a(d, \tau) = g_0^a(d), \quad \dot{q}^a(d, \tau) = v_0^a(d), \quad \tau = \tau_0, \quad d \in D',$$

w których  $g^a(d, \tau)$ ,  $d \in \partial D$ ,  $g_0^a(d)$ ,  $v_0^a(d)$ ,  $d \in D'$  są danymi funkcjami, tworzą podstawowy układ równań dyskretnej teorii sprężystości, wyprowadzony w [1]. Warunki brzegowe w przypadku ogólnym mają bardziej złożoną postać niż (1.5), którą podano w [1].

W powyższych równaniach funkcje zmiennej  $\tau$ :  $q^a(d, \tau)$ ,  $d \in D$ ,  $\Delta_A q^a(d, \tau)$ ,  $d \in D_A$  są dla każdego odpowiedniego  $d$  składowymi wektorów w  $n$ -wymiarowej przestrzeni wektorowej  $V^n$ , natomiast  $T_a^A(d, \tau)$ ,  $d \in D_{-A}$ ,  $\bar{\Delta}_A T_a^A(d, \tau)$ ,  $d \in D'$ ,  $t_a(d, \tau)$ ,  $f_a(d, \tau)$  oraz  $z_a(d, \dots)$  są również dla każdego odpowiedniego  $d$ , składowymi kowektorów w przestrzeni dualnej  $\dot{V}^n$ . W wielu zagadnieniach jest rzeczą celową wprowadzenie wiązki przestrzeni wektorowych  $V^n(d)$ ,  $\dot{V}^n(d)$ ,  $d \in D$ . Oznaczając przez  $A_a^\alpha(d)$ ,  $d \in D$  elementy nieosobliwych macierzy oraz przez  $A_\alpha^a(d)$ ,  $d \in D$ , elementy macierzy odwrotnych,  $A_a^\alpha(d) A_\alpha^a(d) = \delta_\beta^\alpha$ , otrzymujemy następujące składowe wektorów w  $V^n(d)$ :

$$q^\alpha(d, \tau) = A_a^\alpha(d) q^a(d, \tau), \quad d \in D, \\ \delta_A q^\alpha(d, \tau) = A_a^\alpha(d) \Delta_A q^a(d, \tau), \quad d \in D_A$$

oraz odpowiednie składowe wektorów w  $\dot{V}^n(d)$ :

$$T_\alpha^A(d, \tau) = A_\alpha^a(d) T_a^A(d, \tau), \quad d \in D_A, \\ \bar{\delta}_A t_\alpha^A(d, \tau) = A_\alpha^a(d) \bar{\Delta}_A t_a^A(d, \tau), \\ t_\alpha(d, \tau) = A_\alpha^a(d) t_a(d, \tau), \\ f_\alpha(d, \tau) = A_\alpha^a(d) f_a(d, \tau), \\ z_\alpha(d, \dots) = A_\alpha^a(d) z_a(d, \dots).$$

Równania ruchu (1.2) dyskretnej teorii sprężystości można teraz przekształcić do postaci [1]

$$(1.7) \quad \bar{\delta}_A T_\alpha^A(d, \tau) + t_\alpha(d, \tau) + f_\alpha(d, \tau) = z_\alpha(d, \dots), \quad d \in D', \quad \tau_0 < \tau < \tau_1,$$

a równania konstytutywne (1.4) sprowadzają się do równań [1]

$$(1.8) \quad T_\alpha^A(d, \tau) = \frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial \delta_A q^\alpha(d, \tau)}, \quad d \in D_A, \quad t_\alpha(d, \tau) = -\frac{\partial \varepsilon(d, \dots)}{\partial q^\alpha(d, \tau)}, \quad d \in D,$$

gdzie

$$\varepsilon(d, [q^\alpha(d, \tau)], [\delta_A q^\alpha(d, \tau)]) = \varepsilon_0(d, [A_\alpha^a(d) q^\alpha(d, \tau)], [A_\alpha^a(d) \delta_A q^\alpha(d, \tau)])$$

jest potencjałem sprężystym w elemencie  $d \in D$ . Warunki brzegowe i początkowe są następujące:

$$(1.9) \quad q^\alpha(d, \tau) = g^\alpha(d, \tau), \quad d \in \partial D, \quad \tau_0 < \tau < \tau_1$$

oraz

$$(1.10) \quad q^\alpha(d, \tau) = g_0^\alpha(d), \quad \dot{q}^\alpha(d, \tau) = v_0^\alpha(d), \quad \tau = \tau_0, \quad d \in D'.$$

Wektory o składowych  $\delta_A q^\alpha(d, \tau)$ ,  $d \in D_A$  oraz  $\bar{\delta}_A T_\alpha^A(d, \tau)$ ,  $d \in D_{-A}$  nazywamy prawymi i lewymi różnicami absolutnymi pól wektorów o składowych  $q^\alpha(d, \tau)$ ;  $T_\alpha^A(d, \tau)$  odpowiednio, gdzie

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \delta_A q^\alpha(d, \tau) &= \Delta_A q^\alpha(d, \tau) + G_{A\beta}^\alpha(d) q^\beta(f_A d, \tau), \\ \bar{\delta}_A T_\alpha^A(d, \tau) &= \bar{\Delta}_A T_\alpha^A(d, \tau) + G_{\alpha A}^* (d) T_\beta^A(f_A d, \tau) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} G_{A\beta}^\alpha(d) &= A_\alpha^a(d) \Delta_A A_\beta^a(d), \quad d \in D_A, \\ G_{A\alpha}^* (d) + G_{A\alpha}^\beta(d) + G_{A\alpha}^\mu(d) G_{A\mu}^\beta(d) &= 0, \quad d \in D_A, \\ G_{\alpha A}^* (d) + G_{A\gamma}^* (f_{-A} d) G_{\alpha A}^\gamma(d) &= G_{A\alpha}^* (f_{-A} d), \quad d \in D_{-A}. \end{aligned}$$

Macierze  $n \times n$  o składowych  $G_{A\beta}^\alpha(d)$ ,  $d \in D_A$  określają koneksję w wiązce przestrzeni wektorowych  $V^n(d)$ ,  $d \in D$ .

## 2. RÓWNIANIA RÓŻNICOWE I RÓŻNICZKOWE DYSKRETNEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Oznaczmy przez  $t_1, \dots, t_N$  bazę w przestrzeni  $E^N$  oraz przez  $A_\alpha$  zbiór wszystkich punktów w  $R^N$  «postaci»  $x = a + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_N t_N$ , gdzie  $a$  jest danym wektorem oraz  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  są dowolnymi liczbami całkowitymi. Niech  $N < m$  oraz niech  $t_A = \alpha_A^K t_K$  dla  $A = N+1, \dots, m$ , gdzie  $\alpha_A^K$  są danymi liczbami całkowitymi, przy czym  $\alpha_A^K = \delta_A^K$  dla  $A \leq N$ . Jeżeli istnieje różnowartościowe odwzorowanie  $\xi$ , gdzie  $\xi^{-1}: D \rightarrow A_\alpha$ , spełniające warunek  $\xi^{-1}(f_A d) - \xi^{-1}(d) = t_A$  dla każdego  $d \in D_A$  i każdego  $A$ , to równania dyskretnej teorii sprężystości dają się przedstawić w postaci równań

różnicowych. Funkcję  $\xi$  nazywamy parametryzacją zbioru  $D$  dla danej struktury różnicowej tego zbioru. Równania ruchu (1.7) mają wtedy postać

$$(2.1) \quad \bar{\delta}_A T_a^A(x, \tau) + t_a(x, \tau) + f_a(x, \tau) = z(x, \dots), \quad x \in \xi(D'), \quad \tau_0 < \tau < \tau_1,$$

a równania konstytutywne sprowadzają się do równań

$$T_a^A(x, \tau) = \frac{\partial \varepsilon(x, \dots)}{\partial \delta_A q^a(x, \tau)}, \quad x \in \xi(D_A),$$

$$t_a(x, \tau) = -\frac{\partial \varepsilon(x, \dots)}{\partial q^a(x, \tau)}, \quad x \in \xi(D), \quad \tau_0 < \tau < \tau_1,$$

gdzie  $\varepsilon(x, \dots) = \varepsilon(\xi^{-1}(x), \dots)$ ,  $x \in \xi(D)$ . W warunkach (1.9) i (1.10) należy także zastąpić argument  $d$  przez argument  $x = \xi(d)$ . Dyskretne układy sprężyste, dopuszczające istnienie parametryzacji, nazywamy układami regularnymi [1]. Należy zaznaczyć, że także pewne układy nieregularne można opisać za pomocą równań różnicowych; wymaga to jednak wprowadzenia więcej niż jednej parametryzacji [1 i 4].

Oznaczmy przez  $A$  zbiór wszystkich punktów w  $E^N$  takich, że  $a \in A$ , tylko gdy  $a = \mu_1 t_1 + \dots + \mu_N t_N$ , gdzie  $\mu_1, \dots, \mu_N$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunki  $-0,5 \leq \mu_k \leq 0,5$ . Rozpatrzmy rodzinę  $(D_a)_{a \in A}$  dyskretnych regularnych układów sprężystych o tej samej liczbie elementów i taką, że dla każdego  $D_a$  istnieje parametryzacja  $\xi_a$ , gdzie  $\xi_a^{-1}: D_a \rightarrow A_a$  spełniająca warunek  $\xi_a^{-1}(f_a^a d) - \xi_a^{-1}(d) = t_a$  dla każdego  $d \in D_{aa}$  oraz dla  $A = I, \dots, m$  (ciąg wektorów  $t_1, \dots, t_m$  jest taki sam dla każdego  $a \in A$  oraz  $f_a^a: D_{a, A} \rightarrow D_{a, -A}$  określa strukturę różnicową na  $D_a$ ). Oznaczmy  $\bar{\Omega} = \bigcup \xi_a^{-1}(D_a)$ , przy czym  $\bar{\Omega}$  składa się z obszaru  $\Omega$  w  $E^N$  oraz jego brzegu  $\partial\Omega$ . Oznaczmy ponadto przez  $\Omega_A$  podobszar w  $\Omega$  taki, że  $x \in \Omega_A$  tylko, gdy  $x + t_A \in \Omega$ . Podobnie niech  $x \in \Omega_{-A}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x - t_A \in \Omega$  oraz niech  $\Omega' = \bigcap_{A=1}^m (\Omega_A \cap \Omega_{-A}) \neq \emptyset$ .

Równania ruchu (1.2) dla rozważanej rodziny  $(D_a)_{a \in A}$  mają postać

$$(2.3) \quad \bar{\Delta}_A T_a^A(x, \tau) + t_a(x, \tau) + f_a(x, \tau) = z_a(x, \dots), \quad x \in \Omega', \quad \tau_0 < \tau < \tau_1,$$

a równania konstytutywne (1.4) sprowadzają się do równań

$$(2.4) \quad T_a^A(x, \tau) = \frac{\partial \varepsilon_0(x, \dots)}{\partial \Delta_A q^a(x, \tau)}, \quad x \in \Omega_A, \quad t_a(x, \tau) = -\frac{\partial \varepsilon_0(x, \dots)}{\partial q^a(x, \tau)}, \quad x \in \Omega,$$

$$\tau_0 < \tau < \tau_1.$$

Ograniczmy się następnie do rozważania tylko takich rodzin  $(D_a)_{a \in A}$  dyskretnych układów sprężystych, dla których dowolna funkcja  $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{E} \subset \Omega$  występująca w (2.3) i (2.4) jest różniczkowalną funkcją argumentu  $x$  w obszarze  $\mathcal{E}$ , a ponadto spełnia warunki postaci

$$(2.5) \quad \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \approx \varphi_{,K}(x) \Delta x^K, \quad \varphi(x + \Delta x) \simeq \varphi(x)$$

dla każdego  $x \in \mathcal{E}$ ,  $x + \Delta x \in \mathcal{E}$  oraz każdego wektora  $\Delta x$ , dla którego  $|\Delta x| \leq \leq \max |t_A|$ . Oznaczmy przez  $\text{vol } A$  objętość obszaru  $A \subset E^N$  i wprowadźmy funkcję

$$(2.6) \quad \varepsilon(x, [q^a(x, \tau)], [q^a, \kappa(x, \tau)] t_A^K) = \frac{\varepsilon_0(x, [q^a(x, \tau)], [q^a, \kappa(x, \tau)] t_A^K)}{\text{vol } A},$$

gdzie  $t_A^K$  są składowymi wektora  $t_A$  w przestrzeni  $E^N$ . Zgodnie z (2.3)–(2.6) otrzymujemy wtedy następujące równania ruchu:

$$(2.7) \quad T_{a, \kappa}^K(x, \tau) + T_a(x, \tau) + F_a(x, \tau) = Z_a(x, \dots), \quad x \in \Omega, \quad \tau_0 < \tau < \tau_1,$$

w których  $F_a(x, \tau) = f_a(x, \tau) (\text{vol } A)^{-1}$ ,  $Z_a(x, \dots) = z_a(x, \dots) (\text{vol } A)^{-1}$ , oraz równania konstytutywne postaci

$$(2.8) \quad T_{a, \kappa}^K(x, \tau) = \frac{\partial \varepsilon(x, \dots)}{\partial q^a, \kappa(x, \tau)}, \quad T_a(x, \tau) = \frac{\partial \varepsilon(x, \dots)}{\partial q^a(x, \tau)}, \quad x \in \Omega, \quad \tau_0 < \tau < \tau_1.$$

Równania (2.7) i (2.8) wraz z warunkami brzegowymi

$$(2.9) \quad q^a(x, \tau) = g^a(x, \tau), \quad x \in \partial\Omega, \quad \tau_0 < \tau < \tau_1$$

oraz warunkami początkowymi

$$(2.10) \quad q^a(x, \tau) = g_0^a(x), \quad \dot{q}^a(x, \tau) = v_0^a(x), \quad x \in \Omega, \quad \tau = \tau_0$$

opisują rozważaną rodzinę dyskretnych układów sprężystych. Równania (2.7) i (2.8) są równaniami różniczkowymi cząstkowymi dyskretniej teorii sprężystości.

Szczegółowe omówienie ogólnych równań dyskretniej teorii sprężystości (1.7)–(1.8) oraz równań różnicowych (2.1)–(2.2) i różniczkowych (2.7)–(2.8) podano w pracy [1].

### 3. DYSKRETNE UKŁADY SPRĘŻYSTE CIAŁ SZTYWNYCH. TEORIA INFINITEZYMALNA

Założmy teraz, że każdy z układów dynamicznych  $d \in D$  jest ciałem sztywnym o sześciu stopniach swobody, które może ulegać tylko niewielkim odchyleniom od danej konfiguracji, zwanej konfiguracją odniesienia. Przyjmijmy następnie, że w chwili  $\tau_0$  układ dyskretny znajduje się w konfiguracji odniesienia, przy czym dla  $\tau = \tau_0$  mamy  $e(d, \dots) = 0$  dla każdego  $d \in D$ . Przyjmijmy

$$(3.1) \quad q^a(d, \tau) = \delta_k^a u^k(d, \tau) + \delta_k^{a-3} v^k(d, \tau), \quad a = 1, 2, \dots, 6,$$

gdzie  $u^k(d, \tau)$  są składowymi wektora przesunięcia oraz  $v^k(d, \tau)$  składowymi wektora małego obrotu względem konfiguracji odniesienia. Składowe obu tych wektorów przyjmujemy jako wyrażone w prostokątnym układzie kartezjańskim ( $z^k$ ) parametryzującym przestrzeń fizyczną oraz traktujemy formalnie jako infinitezmalne. Potencjał sprężysty  $e(d [q^a(d, \tau)], [\Delta_A q^a(d, \tau)])$  jest wtedy jednorodną kwadratową funkcją swoich argumentów, a ze względu na warunki niezmienniczości [5] musi mieć postać

$$(3.2) \quad e = \frac{1}{2} A_{kl}^{A\Phi}(d) \eta_A^k \eta_\Phi^l + B_{kl}^{A\Phi}(d) \eta_A^k \kappa_\Phi^l + \frac{1}{2} F_{kl}^{A\Phi}(d) \kappa_A^k \kappa_\Phi^l, \quad d \in D,$$

w której

$$A_{kl}^{A\Phi}(d) = B_{kl}^{A\Phi}(d) = F_{kl}^{A\Phi}(d) = 0 \quad \text{dla} \quad d \notin D_A \cap D_\Phi,$$

oraz

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \eta_A^k &= \eta_A^k(d, \tau) = A_A u^k(d, \tau) + \varepsilon_{kp}^r l_A^p(d) v^r(d, \tau), \\ \kappa_A^k &= \kappa_A^k(d, \tau) = A_A v^k(d, \tau), \quad d \in D_A, \end{aligned}$$

gdzie  $l_A^p(d)$  są składowymi wektora w przestrzeni odniesienia, łączącymi środek masy ciała sztywnego  $d$  ze środkiem masy ciała sztywnego  $f_A d$  w konfiguracji odniesienia. Gdy  $d \notin D_A$ , przyjmujemy  $\eta_A^k(d, \tau) = \kappa_A^k(d, \tau) = 0$ . W rozważanym przypadku  $t_a(d, \tau) = \delta_{a-3}^k \varepsilon_{kp}^r l_A^p(d) T_r^A(d, \tau)$ , a równanie ruchu (1.2) sprowadza się do postaci:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \bar{A}_A T_k^A(d, \tau) + f_k(d, \tau) &= z_k(d, \tau), \\ \bar{A}_A M_k^A(d, \tau) + \varepsilon_{kp}^r l_A^p(d) T_r^A(d, \tau) + m_k(d, \tau) &= J_k(d, \tau), \quad d \in D', \end{aligned}$$

gdzie  $T_a^A = \delta_a^k T_k^A + \delta_{a-3}^k M_k^A$ ,  $f_a = \delta_a^k f_k + \delta_{a-3}^k m_k$  oraz  $z_a = \delta_a^k z_k + \delta_{a-3}^k J_k$ . Równania konstytutywne (1.4), zgodnie z (3.2), mają postać

$$(3.5) \quad \begin{aligned} T_k^A(d, \tau) &= A_{kl}^{A\Phi}(d) \eta_\Phi^l(d, \tau) + B_{kl}^{A\Phi}(d) \kappa_\Phi^l(d, \tau), \\ M_k^A(d, \tau) &= F_{kl}^{A\Phi}(d) \kappa_\Phi^l(d, \tau) + B_{lk}^{A\Phi}(d) \eta_\Phi^l(d, \tau), \quad d \in D_A, \end{aligned}$$

w której wielkości  $A_{kl}^{A\Phi}(d)$ ,  $B_{kl}^{A\Phi}(d)$  i  $F_{kl}^{A\Phi}(d)$  charakteryzują własności sprężyste rozważanego układu dyskretnego. Równania ruchu (3.4), równania konstytutywne (3.5), równania geometryczne (3.3) wraz z warunkami brzegowymi (por. (1.5))

$$(3.6) \quad u^k(d, \tau) = u_0^k(d, \tau), \quad v^k(d, \tau) = v_0^k(d, \tau), \quad d \in \partial D, \quad \tau_0 < \tau < \tau_1$$

oraz początkowymi (por. (1.6))

$$(3.7) \quad \begin{aligned} u^k(d, \tau) &= 0, \quad \dot{u}^k(d, \tau) = v_0^k(d), \quad \tau = \tau_0, \\ v^k(d, \tau) &= 0, \quad \dot{v}^k(d, \tau) = w_0^k(d), \quad d \in D' \end{aligned}$$

opisują rozpatrywany sprężysty układ dyskretny.

Oznaczmy, dla każdego  $d \in D$ , przez  $A_k^k(d)$  elementy nieosobliwej macierzy  $3 \times 3$  oraz przez  $A_k^k(d)$  — elementy macierzy odwrotnej,  $A_k^k(d) A_k^l(d) = \delta_k^l$ ,  $d \in D$ .

Zgodnie z metodą przedstawioną w p. 1 przyjmijmy

$$(3.8) \quad [A_a^a(d)] = \begin{bmatrix} [A_k^k(d)] & [0] \\ [0] & [A_k^k(d)] \end{bmatrix},$$

gdzie  $[0]$  oznacza macierz o wymiarach  $3 \times 3$  utworzoną z samych zer. Równania (3.3), (3.4) i (3.5) przybierają wtedy kolejno postać

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \eta_A^k(d, \tau) &= \delta_A u^k(d, \tau) + \varepsilon_{\lambda\mu}^k l_A^\lambda(d) v^\mu(d, \tau), \\ \kappa_A^k(d, \tau) &= \delta_A v^k(d, \tau), \quad d \in D_A; \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{\delta}_A T_k^A(d, \tau) + f_k(d, \tau) &= z_k(d, \dots), \\ \bar{\delta}_A M_k^A(d, \tau) + \varepsilon_{\lambda\mu}^k l_A^\lambda(d) T_\mu^A(d, \tau) + m_k(d, \tau) &= J_k(d, \dots), \quad d \in D'; \end{aligned}$$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} T_k^A(d, \tau) &= A_{\kappa\lambda}^{A\Phi}(d) \eta_\Phi^\lambda(d, \tau) + B_{\kappa\lambda}^{A\Phi}(d) \kappa_\Phi^\lambda(d, \tau), \\ M_k^A(d, \tau) &= F_{\kappa\lambda}^{A\Phi}(d) \kappa_\Phi^\lambda(d, \tau) + B_{\lambda\kappa}^{A\Phi}(d) \eta_\Phi^\lambda(d, \tau), \end{aligned}$$

gdzie  $\epsilon_{\lambda\mu}^{\kappa}(d) = A_k^{\kappa}(d) A_{\lambda}^l(d) A_{\mu}^m(d) \epsilon_{lm}^{\kappa}$  są składowymi trójwektora Ricciego. Równania ruchu (3.10) są szczególną postacią równań (1.7), podobnie równania konstytutywne (3.11) są szczególną postacią równań (1.8). Różnice absolutne występujące w (3.9) i (3.10) zgodnie z (1.11) mają postać

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \delta_A u^{\kappa}(d, \tau) &= A_A u^{\kappa}(d, \tau) + G_{A\lambda}^{\kappa}(d) u^{\lambda}(f_A d, \tau), \\ \bar{\delta}_A T_{\kappa}^A(d, \tau) &= \bar{A}_A T_{\kappa}^A(d, \tau) + G_{\kappa A}^*(d) T_{\lambda}^A(f_{-A} d, \tau), \end{aligned}$$

gdzie  $G_{A\lambda}^{\kappa}(d) = A_k^{\kappa}(d) A_A A_{\lambda}^k(d)$ ,  $d \in D_A$  oraz  $G_{A\lambda}^{\kappa}(d) + G_{A\lambda}^{\mu}(d) + G_{A\lambda}^{\mu}(d) G_{A\mu}^{\kappa}(d) = 0$ . Różnice absolutne  $\delta_A v^{\kappa}(d, \tau)$ ,  $\bar{\delta}_A M_{\kappa}^A(d, \tau)$  wyrażają się oczywiście podobnie jak różnice absolutne (3.12).

Jeżeli rozważany układ dyskretny jest regularny, to po wprowadzeniu parametryzacji  $\xi, \xi: D \rightarrow A_n$ , spełniającej warunki podane w poprzednim punkcie pracy, otrzymamy równania różnicowe. W formułach (3.2)–(3.7) oraz (3.8)–(3.12) można wtedy zastąpić argument  $d$  przez  $x = \xi^{-1}(d)$  oraz zastąpić zbiory  $D, D', D_A$  odpowiednio przez zbiory  $\xi^{-1}(D), \xi^{-1}(D'), \xi^{-1}(D_A)$ .

Podajmy teraz postać równań różniczkowych rozważanego zagadnienia stosowanych, gdy zachodzą warunki (2.5). Zgodnie z (2.5)–(2.8), (3.3)–(3.5) oraz wprowadzonymi w tym punkcie oznaczeniami otrzymamy następujące równania ruchu:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} T_{k, \kappa}^K(x, \tau) + F_k(x, \tau) &= Z_k(x, \dots), \\ M_{k, \kappa}^K(x, \tau) + \epsilon_{kl}^m l_A^l(x) t_K^A T_m^K(x, \tau) + M_k(x, \tau) &= Y_k(x, \dots), \end{aligned}$$

równania konstytutywne

$$(3.14) \quad \begin{aligned} T_k^K(x, \tau) &= A_{kl}^{KM}(x) \eta_M^l(x, \tau) + B_{kl}^{KM}(x) \kappa_M^l(x, \tau), \\ M_k^K(x, \tau) &= F_{kl}^{KM}(x) \kappa_M^l(x, \tau) + B_{lk}^{MK}(x) \eta_M^l(x, \tau) \end{aligned}$$

oraz równania geometryczne

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \eta_M^l(x, \tau) &= u_{,M}^l(x, \tau) + \epsilon_{,br}^l l_A^p(x) t_M^A v^r(x, \tau), \\ \kappa_M^l(x, \tau) &= v_{,M}^l(x, \tau), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.16) \quad \begin{aligned} A_{kl}^{KM}(x) &= A_{kl}^{A\Phi}(x) t_A^K t_{\Phi}^M (\text{vol } A)^{-1}, \\ B_{kl}^{KM}(x) &= B_{kl}^{A\Phi}(x) t_A^K t_{\Phi}^M (\text{vol } A)^{-1}, \\ F_{kl}^{KM}(x) &= F_{kl}^{A\Phi}(x) t_A^K t_{\Phi}^M (\text{vol } A)^{-1}. \end{aligned}$$

Równania (3.13)–(3.15) powinny być spełnione w obszarze  $\Omega \subset E^N$  oraz dla każdego  $\tau$ ,  $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ . Warunki brzegowe mają teraz postać

$$(3.17) \quad u^k(x, \tau) = \hat{u}_0^k(x, \tau), \quad v^k(x, \tau) = \hat{v}_0^k(x, \tau), \quad x \in \partial\Omega, \quad \tau_0 < \tau < \tau_1,$$

a warunki początkowe sprowadzają się do warunków [por. (3.6) i (3.7)]

$$(3.18) \quad \begin{aligned} u^k(x, \tau) &= 0, \quad v^k(x, \tau) = 0, \\ \dot{u}^k(x, \tau) &= v_0^k(x), \quad \dot{v}^k(x, \tau) = v_0^k(x), \quad \tau = \tau_0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

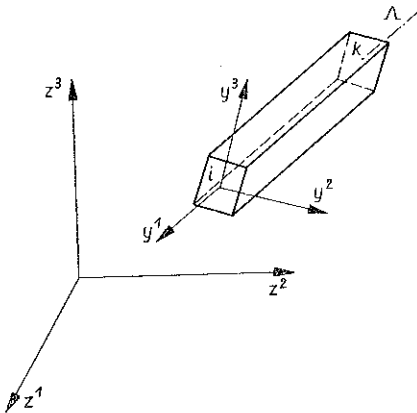


## 4. RÓWNIANIA RÓŻNICOWE SIATEK REGULARNYCH

W punkcie tym zajmiemy się wyprowadzeniem równań konstytutywnych w postaci różnicowej dla regularnych układów prętów. Rozważania ograniczymy do siatek prętowych, których fragment przedstawia rys. 1. Jako układy dynamiczne  $d \in D'$  przyjmujemy sztywne węzły siatki, a potencjał sprężysty  $e(d, \dots)$  jest potencjałem sprężystym prętów łączących węzeł  $d$  z węzłami  $f_A d$  [na rys. 1 potencjał  $e(d, \dots)$  jest potencjałem trzech prętów, potencjały  $e(d', \dots)$ ,  $e(d'', \dots)$  są potencjałami jednego pręta oraz  $e(d''', \dots) = 0$ ]. Zagadnienie traktujemy jako liniowo sprężyste.

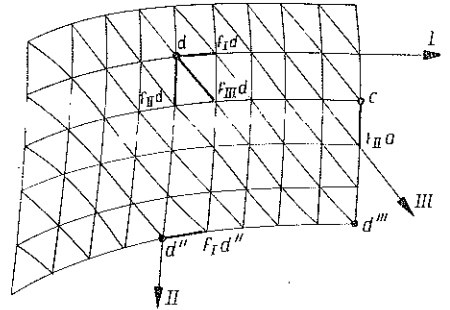
Niech  $(z^k)$  oznacza dowolny prostokątny układ współrzędnych w przestrzeni fizycznej, natomiast przez  $(y^i)$  oznaczymy taki prostokątny układ współrzędnych, którego początek leży w środku ciężkości przekroju dowolnego pręta, a osie pokrywają się z głównymi centralnymi osiami bezwładności (rys. 2). Załóżmy, że oś  $y$  pręta oraz główne centralne osie  $y^2, y^3$  przekroju pręta są określone względem układu współrzędnych  $z^k$  za pomocą kosinusów kierunkowych

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \cos(y^1, z^1) &= t_1, \\ \cos(y^1, z^2) &= t_2, \\ \cos(y^1, z^3) &= t_3, \\ \cos(y^2, z^1) &= 't_1, \\ \cos(y^2, z^2) &= 't_2, \\ \cos(y^2, z^3) &= 't_3, \\ \cos(y^3, z^1) &= ''t_1, \\ \cos(y^3, z^2) &= ''t_2, \\ \cos(y^3, z^3) &= ''t_3. \end{aligned}$$



Ry. 2

Oznaczmy następnie przez  $u_i, u_k$  wektory przemieszczenia węzłów  $i$  i  $k$ , natomiast przez  $v_i, v_k$  wektory obrotów węzłów  $i$  i  $k$  (odniesienie do układu  $z^k$ ; rys. 2). Korzystając ze wzorów transformacyjnych dla prętów pryzmatycznych oraz wykorzystując (4.1) momenty skręcające, momenty zginające, siły normalne oraz siły tnące w przekroju połowiącym pręt i zorientowanym zewnętrzną dodatnią osią  $y^1$  można



Rys. 1

wyrazić następującymi wzorami (w dalszym tekście argumenty występujące w tych funkcjach, które są takie same jak w punktach 2–3, nie są wypisane):

$$(4.2) \quad \begin{aligned} M_{ik}^{(1)} &= \frac{C}{l_A} \kappa_A^k \tilde{t}_k^A, & M_{ik}^{(2)} &= \frac{EI'_A}{l_A} \kappa_A^k 't_k^A, & M_{ik}^{(3)} &= \frac{EI''_A}{l_A} \kappa_A^k ''t_k^A, \\ T_{ik}^{(1)} &= \frac{EA_A}{l_A} \eta_A^k \tilde{t}_k^A, \\ T_{ik}^{(2)} &= \frac{12EI'_A}{l_A^3} (\eta_A^k 't_k^A - 0,5l_A \kappa_A^k ''t_k^A), \\ T_{ik}^{(3)} &= \frac{12EI''_A}{l_A^3} (\eta_A^k ''t_k^A + 0,5l_A \kappa_A^k 't_k^A), \end{aligned}$$

gdzie

$$\eta_A^k = \Delta_A u^k + \varepsilon_{pr}^k l_A^p v^r, \quad \kappa_A^k = \Delta_A v^k,$$

[por. (3.3)]. We wzorach (4.2)  $E$ ,  $A_A$ ,  $I'_A$ ,  $I''_A$  i  $C_A$  oznaczają moduł Younga, pole przekroju poprzecznego, głównie centralne momenty bezwładności i sztywność skrętną pręta  $i$ - $k$ . Długość tego pręta oznaczamy przez  $l_A$ .

Dla wyprowadzenia równań konstytutywnych należy znać funkcję energii sprężystej układu prętowego, którą możemy obliczyć z następującego znanego wzoru:

$$(4.3) \quad e(d, \dots) = \frac{1}{2} \sum_A \int_{-0,5 l_A}^{0,5 l_A} \left[ \frac{(M_{ik}^{(1)})^2}{C_A} + \frac{(T_{ik}^{(1)})^2}{E} + \frac{(M_{ik}^{(2)} - T_{ik}^{(3)} \xi)^2}{EI'_A} + \frac{(M_{ik}^{(3)} - T_{ik}^{(2)} \xi)^2}{EI''_A} \right] d\xi.$$

Wskaźnik sumacyjny  $A$  przebiega wszystkie pręty łączące węzeł  $d$  z węzłami  $f_A$   $d$  (rys. 1). Podstawiając (4.2) do (4.3) oraz wykonując całkowanie otrzymamy poszukiwane wyrażenie na energię sprężystą:

$$(4.4) \quad e = \frac{1}{2} A_{kl}^{A\Phi} \eta_A^k \eta_\Phi^l + B_{kl}^{A\Phi} \eta_A^k \kappa_\Phi^l + \frac{1}{2} F_{kl}^{A\Phi} \kappa_A^k \kappa_\Phi^l,$$

a występujące w (4.4) wielkości  $A_{kl}^{A\Phi}$ ,  $B_{kl}^{A\Phi}$  i  $F_{kl}^{A\Phi}$  charakteryzują własności sprężyste rozważanych siatek i mają postać

$$(4.5) \quad \begin{aligned} A_{kl}^{A\Phi} &= \delta^{A\Phi} \left( \frac{EA_A}{l_A} \tilde{t}_k^A \tilde{t}_l^A + \frac{12EI'_A}{l_A^3} ''t_k^A ''t_l^A + \frac{12EI''_A}{l_A^3} 't_k^A 't_l^A \right), \\ B_{kl}^{A\Phi} &= \delta^{A\Phi} \left( \frac{6EI'_A}{l_A^2} ''t_k^A 't_l^A - \frac{6EI''_A}{l_A^2} 't_k^A ''t_l^A \right), \\ F_{kl}^{A\Phi} &= \delta^{A\Phi} \left( \frac{C_A}{l_A} \tilde{t}_k^A \tilde{t}_l^A + \frac{4EI'_A}{l_A} 't_k^A 't_l^A + \frac{4EI''_A}{l_A} ''t_k^A ''t_l^A \right). \end{aligned}$$

Równania ruchu (3.4) i równania konstytutywne (3.5), w których wielkości  $A_{kl}^{A\Phi}$ ,  $B_{kl}^{A\Phi}$  i  $F_{kl}^{A\Phi}$  są określone wzorami (4.5)<sup>(2)</sup>, stanowią podstawowy układ równań różnicowych regularnych siatek prętowych.

### 5. ALTERNATYWNA POSTAĆ RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

Przedstawmy teraz alternatywną postać podstawowego układu równań podanego w poprzednim punkcie. W tym celu zamiast składowych odkształcenia  $\eta_A^k$  i  $\kappa_A^k$  wprowadzimy nowe składowe stanu odkształcenia  $\gamma_A^k$  i  $\kappa_A^k$ , gdzie

$$(5.1) \quad \gamma_A^k = \eta_A^k + \frac{1}{2} \varepsilon_{,rm}^k l_A^r \kappa_A^m.$$

Oznaczając

$$\pi = \pi(d, \gamma_A^k, \kappa_A^k) \equiv e \left( d, \gamma_A^k - \frac{1}{2} \varepsilon_{,rm}^k l_A^r \kappa_A^m, \kappa_A^k \right),$$

zgodnie z (4.4) i (4.5) otrzymamy

$$(5.2) \quad \pi = \frac{1}{2} A_{kl}^{A\Phi} \gamma_A^k \gamma_A^l + \frac{1}{2} C_{kl}^{A\Phi} \kappa_A^k \kappa_A^l,$$

gdzie

$$(5.3) \quad \begin{aligned} A_{kl}^{A\Phi} &= \delta^{A\Phi} \left( \frac{EA_A}{l_A} \bar{t}_k^A \bar{t}_l^A + \frac{12EI_A'}{l_A^3} {}''t_k^A {}''t_l^A + \frac{12EI_A''}{l_A^3} {}'t_k^A {}'t_l^A \right), \\ C_{kl}^{A\Phi} &= \delta^{A\Phi} \left( \frac{C_A}{l_A} \bar{t}_k^A \bar{t}_l^A + \frac{EI_A'}{l_A} {}'t_k^A {}'t_l^A + \frac{EI_A''}{l_A} {}''t_k^A {}''t_l^A \right). \end{aligned}$$

Potencjał sprężysty  $\pi$  w przeciwieństwie do potencjału  $e$  nie zawiera iloczynów  $\gamma_A^k \kappa_A^k$ .

Korzystając ze wzorów (3.5) oraz (5.1) otrzymamy

$$\begin{aligned} T_k^A &= A_{kl}^{A\Phi} \left( \gamma_A^l - \frac{1}{2} \varepsilon_{,rm}^l l_\Phi^r \kappa_\Phi^m \right) + B_{kl}^{A\Phi} \kappa_\Phi^l = \\ &= A_{kl}^{A\Phi} \gamma_A^l + \left( -\frac{1}{2} A_{kl}^{A\Phi} \varepsilon_{,rm}^l l_\Phi^r + B_{km}^{A\Phi} \right) \kappa_\Phi^m = A_{kl}^{A\Phi} \gamma_A^l, \end{aligned}$$

gdych

$$-\frac{1}{2} A_{kl}^{A\Phi} \varepsilon_{,rm}^l l_\Phi^r + B_{km}^{A\Phi} = 0$$

zgodnie z (4.5).

Oznaczając

$$\begin{aligned} G_k^A &= \frac{\partial \pi}{\partial \kappa_A^k} = M_k^A - \frac{1}{2} T_m^A \varepsilon_{,tk}^m l_A^l, \\ \bar{T}_m^A(x) &\equiv T_m^A(x - t^A), \quad \bar{l}_A(x) \equiv l_A(x - t_A) \end{aligned}$$

(<sup>2</sup>) Bardziej ogólną postać energii sprężystej, uwzględniającej wpływ sił tnących na stan odkształcenia prętów, podano w pracy [6].

równania ruchu napiszemy w następującej postaci:

$$(5.4) \quad \bar{A}_A G_k^A + \frac{1}{2} \varepsilon_{kl}^m (I_A^l T_m^A + I_A^l \bar{T}_m^A) + M_k = y_k, \quad \bar{A}_A T_k^A + F_k = Z_k.$$

Powyższe równania wraz z równaniami konstytutywnymi

$$(5.5) \quad T_k^A = A_{kl}^{A\Phi} \gamma_\Phi^l, \quad G_k^A = C_{kl}^{A\Phi} \kappa_\Phi^l$$

są alternatywną postacią równań różnicowych rozważanego zagadnienia.

Wielkości  $M_k^A$  są składowymi wektora momentu działającego na pręt łączący węzły  $d$  i  $f_A d$  w przekroju przy węźle  $f_A d$ . Wielkości  $G_k^A$  są składowymi wektora momentu, działającego w przekroju połowiącym pręt łączący węzły  $d$  i  $f_A d$  na część związaną z węzłem  $d$ . Wyprowadzone wzory w punktach 4 i 5 dotyczą przypadku, w którym obciążone są tylko węzły a nie pręty. Tym samym składowe wektora siły  $T_k^A$  możemy traktować jako działające w przekroju przywęzłowym jak w przekroju połowiącym pręt.

## 6. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE SIATEK REGULARNYCH

W poprzednich punktach pracy podano równania równowagi, związki geometryczne i fizyczne w postaci różniczkowej dla współdziałających układów dynamicznych ciał sztywnych oraz dwie alternatywne postacie równań różnicowych dla regularnych układów prętowych. W tym punkcie zajmiemy się wyprowadzeniem równań postaci różniczkowej dla wyżej omawianych układów prętowych. Wykorzystując warunek (2.5)<sub>2</sub> oraz wzór (5.1) otrzymamy  $\gamma_A^k \approx \eta_A^k$ , z czego wynika, że  $e \approx \pi$ . Przybliżona równość potencjałów  $e$  i  $\pi$  warunkuje  $G_k^A \approx M_k^A$ , z czego wynika następnie, że obie postacie równań różnicowych (punkty 4 i 5) prowadzą do tej samej postaci równań różniczkowych. Równania konstytutywne (3.14) oraz związki geometryczne (3.15), zgodnie z (5.5) oraz  $\gamma_A^k \approx \eta_A^k$ ,  $M_k^A \approx G_k^A$ , przybiorą teraz postać

$$(6.1) \quad T_k^K = A_{kl}^{KM} \gamma_M^l, \quad M_k^K = C_{kl}^{KM} \kappa_M^l;$$

$$(6.2) \quad \gamma_M^l = u_{,M}^l + \varepsilon_{pr}^l I_A^p t_M^A v^r, \quad \kappa_M^l = v_{,M}^l.$$

Na podstawie wzorów (3.16) i (5.3) oraz związku  $C_{kl}^{KM} = C_{kl}^{A\Phi} t_A^K t_\Phi^M (\text{vol } A)^{-1}$  otrzymamy następujące wyrażenie na wielkości  $A_{kl}^{KM}$  i  $C_{kl}^{KM}$ :

$$(6.3) \quad A_{kl}^{KM} = \sum \frac{t_A^K t_A^M}{l_A^2} \left( \frac{EA_A}{F_A} t_k^A t_l^A + \frac{12EI_A'}{l_A^2 F_A} {}''t_k^A {}''t_l^A + \frac{12EI_A''}{l_A^2 F_A} t_k^A t_l^A \right),$$

$$C_{kl}^{KM} = \sum \frac{t_A^K t_A^M}{l_A^2} \left( \frac{C_A}{F_A} t_k^A t_l^A + \frac{EI_A'}{F_A} {}'t_k^A t_l^A + \frac{EI_A''}{F_A} {}''t_k^A {}''t_l^A \right),$$

gdzie

$$(6.4) \quad F_A = (\text{vol } A) l_A^{-1}.$$

Równania ruchu (3.13), równania konstytutywne (6.1) oraz związki geometryczne (6.2) stanowią podstawowy układ równań różniczkowych dla regularnych siatek prętowych.

Równania (3.13), (6.1), (6.2), (6.3) są przedstawione w opisie materialnym. Obecnie przedstawimy powyższe równania w opisie przestrzennym, tj. będziemy odnosić wszystkie wielkości do obszarów zajmowanych przez układ w czasie jego ruchu. Niech ruch węzłów rozważanych siatek w przestrzeni fizycznej  $E$  określają funkcje  $z^k = \chi^k(x^K, \tau)$ ,  $(x^K) \in \Omega \subset R^3$ , spełniające warunek (2.5)<sub>1</sub>. Wykorzystując (2.5)<sub>1</sub>, wektor łączący węzeł  $d$  z węzłem  $f_A d$  (rys. 1) możemy przedstawić jako  $\chi_{,K}^k t_A^K$ . Z kolei korzystając z otrzymanej wyżej zależności, wektor  $t_A$  będzie miał składowe  $t_A^k \approx \chi_{,K}^k t_A^K I_A^{-1}$ . Wykonując proste przekształcenia równań (6.1), (6.2), (6.3) i (6.13) otrzymamy je w opisie przestrzennym w następującej postaci:

$$(6.5) \quad t_k^m + b_k = z_k, \quad m_{k,l} + \varepsilon_{km}^n t_n^m + h_k = y_k;$$

$$(6.6) \quad t_k^m = A_{kl}^{mn} \gamma_l^n, \quad m_k^m = C_{kl}^{mn} \kappa_l^n;$$

$$(6.7) \quad \gamma_m^k = u_{,m}^k + \varepsilon_{mn}^k v^n, \quad \kappa_m^k = v_{,m}^k,$$

gdzie

$$(6.8) \quad \begin{aligned} t_k^m &\equiv I^{-1} T_k^K \chi_{,K}^m, & m_k^l &\equiv I^{-1} M_k^K \chi_{,K}^l, \\ b_k &\equiv I^{-1} F_k, & h_k &\equiv I^{-1} M_k, \\ z_k &\equiv I^{-1} Z_k, & y_k &\equiv I^{-1} Y_k, & I &= \det(\chi_{,K}^k). \end{aligned}$$

Natomiast  $A_{kl}^{mn}$  i  $C_{kl}^{mn}$  wyrażają się następującymi wzorami:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} A_{kl}^{mn} &= \sum_A t_A^m t_A^n \left( \frac{EA_A}{f_A} \bar{t}_k^A \bar{t}_l^A + \frac{12EI_A''}{I_A^2 f_A} {}'t_k^A {}'t_l^A + \frac{12EI_A'}{I_A^2 f_A} {}''t_k^A {}''t_l^A \right), \\ C_{kl}^{mn} &= \sum_A t_A^m t_A^n \left( \frac{C_A}{f_A} \bar{t}_k^A \bar{t}_l^A + \frac{EI_A'}{f_A} {}'t_k^A {}'t_l^A + \frac{EI_A''}{f_A} {}''t_k^A {}''t_l^A \right), \end{aligned}$$

gdzie  $f_A \equiv IF_A$ .

Otrzymany układ równań (6.5)–(6.7) oraz (6.9) jest już znanym w literaturze układem równań włóknistego ośrodka Cosseratów jako model ciągły siatek prętowych [3].

## 7. ZAGADNIENIE PŁASKIE. RÓWNIANIA RÓŻNICOWE I RÓŻNICZKOWE

W dotychczasowych rozważaniach pręty omawianych siatek były dowolnie położone w przestrzeni. Z kolei zajmujemy się szczególnym przypadkiem, w którym zakładać będziemy, że osie wszystkich prętów leżą przed odkształceniem w jednej płaszczyźnie, a jedna z centralnych osi każdego przekroju dowolnego pręta jest do tej płaszczyzny prostopadła. Oddzielnie zostaną podane równania dla zagadnienia tarczowego oraz oddzielnie dla płytowego. W pierwszej kolejności rozpatrzmy zagadnienie tarczowe [3]. Dla tego zagadnienia równania równowagi, związki geo-

metryczne i fizyczne w postaci różnicowej wyrażają się następującymi wzorami [por. (3.3)–(3.5)]:

$$(7.1) \quad \bar{A}_A T_k^A + f_k = z_k, \quad \bar{A}_A M^A + \varepsilon_s^n l_A^s T_n^A + m = y;$$

$$(7.2) \quad \eta_A^k = A_A u^k + \varepsilon_{,s}^k l_A^s v, \quad \kappa_A = A_A v;$$

$$(7.3) \quad T_k^A = A_{kl}^{A\Phi} \eta^l_\Phi + B_k^{A\Phi} \kappa_\Phi, \quad M^A = F^{A\Phi} \kappa_\Phi + B_l^{A\Phi} \eta^l_\Phi,$$

przy czym wskaźniki  $k, s$  i  $n$  powyżej oraz we wszystkich dalszych wzorach przybierają wartości 1, 2; wskaźnika 3 nie wyszczególniono ( $v^3 \equiv v$ ,  $\kappa_A^3 \equiv \kappa_A$ ,  $F_{33}^{A\Phi} \equiv F^{A\Phi}$ ,  $B_{k3}^{A\Phi} \equiv B_k^{A\Phi}$ ). Wyrażenia na  $A_{kl}^{A\Phi}$ ,  $B_k^{A\Phi}$ ,  $F^{A\Phi}$  mają postać

$$(7.4) \quad A_{kl}^{A\Phi} = \delta^{A\Phi} \left( \frac{EA_A}{l_A} \bar{t}_k^A \bar{t}_l^A + \frac{12EI_A''}{l_A^3} {}'t_k^A {}'t_l^A \right),$$

$$B_k^{A\Phi} = -\frac{6EI_A''}{l_A^2} {}'t_k^A \delta^{A\Phi}, \quad F^{A\Phi} = \frac{4EI_A''}{l_A} \delta^{A\Phi}.$$

W analogiczny sposób otrzymujemy alternatywną postać równań różnicowych dla tarcz siatkowych.

Aby opisać zagadnienie tarczowe w postaci równań różniczkowych wystarczy skorzystać z równań wyprowadzonych w poprzednim punkcie. Dla tego zagadnienia równania równowagi, równania konstytutywne oraz związki geometryczne będą miały postać (por. [3]).

$$(7.5) \quad t_{k,m}^m + b_k = z_k, \quad m^l_{,l} + \varepsilon_m^n t_m^n + h = y;$$

$$(7.6) \quad t_k^m = A_{kl}^{mn} \gamma_n^l, \quad m^l = C^{ln} \kappa_n;$$

$$(7.7) \quad \gamma_m^k = u^k_{,m} + \varepsilon_{,m}^k v, \quad \kappa_m = v_{,m}.$$

Występujące w (7.6) wyrażenia na składowe tensorów sztywności sprężystej wyrażają się następującymi wzorami [3]:

$$(7.8) \quad A_{kl}^{mn} = \sum_A \bar{t}_A^m \bar{t}_A^n \left( \frac{EA_A}{f_A} \bar{t}_k^A \bar{t}_l^A + \frac{12EI_A''}{l_A^2 f_A} {}'t_k^A {}'t_l^A \right),$$

$$C^{mn} = \sum_A \frac{EI_A''}{f_A} \bar{t}_A^m \bar{t}_A^n.$$

Rozpatrzmy następnie zagadnienie płytowe. Aby opisać takie zagadnienie w postaci różnicowej skorzystajmy z równań (3.3), (3.4) i (3.5). Dla płytowego zagadnienia równania równowagi równania konstytutywne oraz związki geometryczne przyjmują postać

$$(7.9) \quad \bar{A}_A T^A + f = z, \quad \bar{A}_A M_k^A + \varepsilon_{kp} l_A^p T^A + m_k = y_k;$$

$$(7.10) \quad T^A = A^{A\Phi} \gamma_\Phi + B_l^{A\Phi} \kappa^l_\Phi, \quad M_k^A = F_{kl}^{A\Phi} \kappa^l_\Phi + B_k^{A\Phi} \gamma_\Phi;$$

$$(7.11) \quad \gamma_A = A_A u + \varepsilon_{pr} l_A^p v^r, \quad \kappa_A^k = A_A v^k,$$

gdzie

$$u \equiv u^3, \quad T^A \equiv T_3^A, \quad A^{A\Phi} \equiv A_{33}^{A\Phi}, \quad f \equiv f_3, \quad z \equiv z_3.$$

Występujące w (7.10) wyrażenia  $A^{A\Phi}$ ,  $B_k^{A\Phi}$ ,  $F_{kl}^{A\Phi}$  mają następującą postać:

$$(7.12) \quad \begin{aligned} A^{A\Phi} &= \frac{12EI'_A}{l_A^3} \delta^{A\Phi}, & B_l^{A\Phi} &= \frac{6EI'_A}{l_A^2} {}_l t_l^A \delta^{A\Phi}, \\ F_{kl}^{A\Phi} &= \delta^{A\Phi} \left( \frac{C_A}{l_A} \bar{t}_k^A \bar{t}_l^A + \frac{4EI'_A}{l_A} {}_l t_k^A {}_l t_l^A \right). \end{aligned}$$

W celu przedstawienia równań opisujących zagadnienie płytowe w ujęciu różniczkowych wystarczy również skorzystać z równań podanych w poprzednim punkcie. Równania równowagi, równania konstytutywne oraz związki geometryczne dla rozpatrywanego zagadnienia będą miały postać

$$(7.13) \quad t_{,m}^m + b = z, \quad m_{k,l}^l + \varepsilon_k^n t_n + h_k = y_k;$$

$$(7.14) \quad t^m = A^{mn} \gamma_n, \quad m_k^m = C_{kl}^{mn} \kappa_{,n}^l;$$

$$(7.15) \quad \gamma_m = u_{,m} + \varepsilon_{mn} v^n, \quad \kappa_{,m}^k = v_{,m}^k,$$

gdzie wyrażenia na składowe tensorów sztywności sprężystej mają postać

$$(7.16) \quad \begin{aligned} A^{mn} &= \sum_A \frac{12EI'_A}{l_A^2 f_A} \bar{t}_A^m \bar{t}_A^n, \\ C_{kl}^{mn} &= \sum_A \bar{t}_A^m \bar{t}_A^n \left( \frac{C_A}{f_A} \bar{t}_k^A \bar{t}_l^A + \frac{EI'_A}{f_A} {}_l t_k^A {}_l t_l^A \right). \end{aligned}$$

Otrzymane w tej pracy równania różniczkowe siatek prętowych są identyczne z równaniami wyprowadzonymi w pracy [3].

Zastosowanie równań różniczkowych wyprowadzonych w tej pracy można znaleźć w pracy [3]. W drugiej części niniejszej pracy zostaną podane niektóre zastosowania wyprowadzonych równań różniczkowych oraz zostaną podane obliczenia porównawcze dla różnicowego i różniczkowego modelu siatek prętowych.

#### LITERATURA

1. CZ. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., 6, 23, 1971.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1971.
3. CZ. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigiary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
4. CZ. WOŹNIAK, *Basic concepts of difference geometry*, Ann. Polon. Math., vol. 28.
5. CZ. WOŹNIAK, *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa 1969.
6. M. KLEIBER, *Statyka powłok siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.

## Резюме

## О ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. I

В работе дается общая система уравнений и краевых условий дискретной теории упругости, для описания совместно действующих динамических систем, состоящих из жестких тел, подвергающихся только небольшим передвижениям и оборотам по отношению к выделенной конфигурации отнесения. Такие модели могут быть моделями динамических стержневых конструкций с жесткими узлами. Благодаря обсуждению этих систем, в рамках дискретной теории упругости, можем получить расчетные алгоритмы для разных особых задач, а также дает возможность довольно общей формулировки задач по определении формы и оптимализации.

В пунктах 1-3 дается общая система уравнений и краевых условий дискретной теории упругости, а также выводятся общие разностные и дифференциальные уравнения инфинитизимальной теории для системы жестких тел. В пунктах 4-7 рассматривались последовательно линейно-упругие системы призматических стержней с массой приложенной исключительно в узлах, приводя общий вид уравнений движения и определяющих уравнений для таких систем. Затем приводятся разностные и дифференциальные уравнения для задач, касающихся плоской задачи, когда оно делится на две независимые задачи пластинок, нагруженных в плоскости и перпендикулярно к плоскости.

## SUMMARY

## ON LINEAR PROBLEMS IN DISCRETE THEORY OF ELASTICITY. I

The paper presents the general system of equations and boundary conditions of the discrete theory of elasticity describing the behaviour of interacting dynamic systems consisting of rigid bodies subject to small rotations and displacements from a definite reference configuration. Such systems may serve as dynamic models of rod structures with rigid nodes (joints). Consideration of these systems within the framework of the discrete theory of elasticity yields the necessary algorithms for the calculation of various particular cases and allows for a rather general formulation of the problems of optimum design of structures.

In Secs. 1-3 given is the general system of equations and boundary conditions of the discrete theory of elasticity as also the general, differential and difference, equations for a system of rigid bodies. In Secs. 4-7 considered are linear elastic systems of prismatic rods with the masses concentrated at the nodes, the general form of the equations of motion and the constitutive equations being given. The difference and differential equations for the plane problem are given, the cases of a disc (plane state of stress) and of a plate being analyzed separately.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA  
INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 lipca 1971 r.*