ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 20, 2, 153–165, 1972, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH n-TEGO RZĘDU WYSTĘPUJĄCYCH W MECHANICE

KRZYSZTOF WIERZCHOLSKI (KIELCE)

1. Wstęp

W trakcie projektowania przy dokonywaniu koniecznych przeliczeń konstruktor napotyka na szereg problemów z takich dziedzin, jak wytrzymałość materiałów, mechanika, teoria sprężystości, termodynamika itp. Rozpatrywanie zagadnień z przytoczonych nauk sprowadza się z reguły do rozwiązywania równań różniczkowych liniowych rzędu drugiego, czwartego a czasem nawet rzędów wyższych, w których często występują zmienne współczynniki. Dla przykładu podajemy szereg problemów, w których spotykamy wymienione typy równań:

a) wyznaczanie linii ugięcia i badanie stateczności prętów, ram, płyt {[20], s. 624, wzór (2.1); [21], s. 529, wzór (1); [6], s. 395, wzór (5.1); [28], s. 324, wzór (3–223); [16], s. 311, wzór (1.1); s. 148, wzór (6.1); [10], s. 397, wzór (2.1); [17], s. 304, wzór (2.7)};

b) drgania poprzeczne prętów {[9], s. 425, wzór (1.1)};

c) równania ruchu dynamiki ciał stałych {[2], s. 374, wzór (2); s. 383, wzór (3), s. 503, wzór (54)}.

Rozwiązywanie zagadnień, które sprowadzają się do równań różniczkowych wspomnianego typu, najczęściej przekracza zakres możliwości konstruktora. Należy również zaznaczyć, że konieczna jest przy tym duża znajomość aparatu matematycznego. Ilustrują to następujące przykłady.

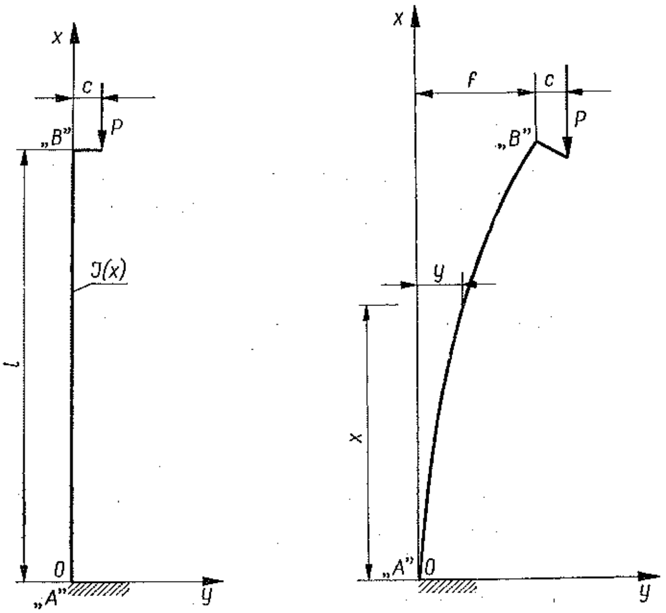
1) Pręt prosty o zmiennym momencie bezwładności utwierdzony jednym końcem i obciążony mimośrodowo na końcu swobodnym (rys. 1).

Równanie różniczkowe linii ugięcia tego pręta w układzie współrzędnych prostokątnych ma postać {[21], s. 529, wzór (1)}

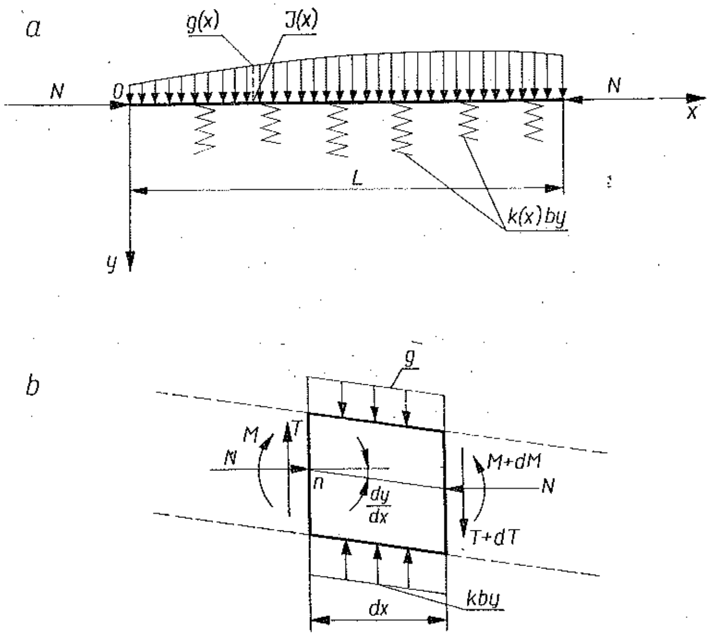
$$EJ(x)\frac{d^2y}{dx^2}-P\cdot(c+f-y)=0, \tag{1.1}$$

gdzie f oznacza wygięcie swobodnego końca pręta.

2) Belka o zmniennej sztywności zginania $EJ(x)$ na niejednorodnym podłożu sprężystym Winklera, obciążona siłą osiową N i zmiennym obciążeniem poprzecznym $g(x)$ (rys. 2).



Rys. 1. Pręt prosty o zmiennym momencie bezwładności, utwierdzony jednym końcem i obciążony mimośrodowo siłą P na końcu swobodnym



Rys. 2. Belka o zmiennym momencie bezwładności, spoczywająca na podłożu sprężystym Winklera, obciążona stałą siłą ściskającą N oraz zmiennym obciążeniem poprzecznym

Równanie różniczkowe linii ugięcia ma w tym przypadku postać {[9], s. 425, wzór (1)}

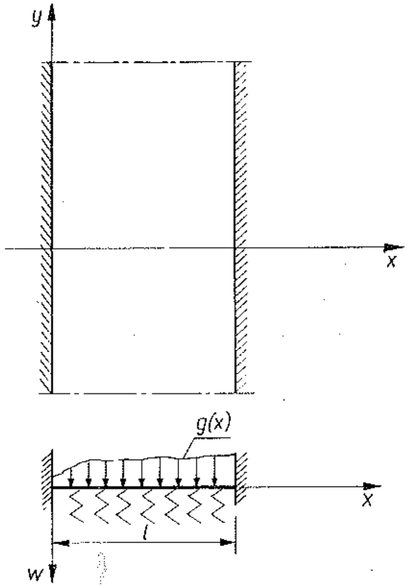
$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\right]+N\frac{d^2 y}{dx^2}+K(x)\,by=g(x), \tag{1.2}$$

gdzie $K(x)$ oznacza zmienny moduł podatności podłoża oraz b szerokość belki.

3) Pasmo płytowe spoczywające na niejednorodnym podłożu sprężystym Winklera, gdzie zmienny moduł podatności podłoża $K(x)$, sztywność $D(x)$ i obciążenie poprzeczne $g(x)$ zmieniają się tylko wzdłuż osi x (rys. 3).

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia ma postać {[13], s. 60, wzór (3-7)}

$$D(x)\frac{d^4 w}{dx^4}+K(x)\,w=g(x). \tag{1.3}$$



Rys. 3. Pasmo płytowe na podłożu sprężystym Winklera o zmiennym współczynniku podatności podłoża

Przytoczone przykłady przedstawiają wagę problemu z matematycznego punktu widzenia. Oczywiście stanowią one tylko wyrywkowy przegląd trudności, jakie musi przezwyciężać projektant w trakcie przeprowadzania niezbędnych obliczeń.

Zagadnienia powyższe rozpatrywali dotychczas między innymi: T. Iwiński {[6], s. 365–369}, A. Kacner {[9], s. 425–440}, Z. Mazurkiewicz {[20], s. 624; [21], s. 529}, A. Naleszkiewicz {[23], rozdz. I}, F. Szelągowski [31] i S. Timoshenko {[33], s. 5–153}. Wymienieni autorzy w swoich rozwiązaniach stosowali bogaty aparat matematyczny wykorzystując często funkcje Bessela i szeregi Fouriera. Czasem rozpatrywane problemy sprowadzali również do równania Riccatiego. Tak więc drogi postępowania poszczególnych autorów przy uzyskiwaniu omawianych wyników są bardzo różne. To stwarza dodatkowe trudności projektantowi usiłującemu korzystać z podanych rozwiązań. Widać więc wyraźnie, że wobec szerokiego zakresu stosowanych metod uzyskanie wyników bez pomocy matematyka jest praktycznie niemożliwe.

W przedstawionej pracy podjęto próbę podania ujednoliconej metody rozwiązywania omawianych równań za pomocą szeregów potęgowych. Należy przypuszczać, że proponowana metoda ze względu na jednolity tryb postępowania w rozmaitych przypadkach znacznie ułatwi przebieg obliczeń oraz skróci żmudny dla inżyniera okres poszukiwania rozwiązania. W niniejszej pracy nie chodzi o uzyskanie nowych rozwiązań z dziedziny mechaniki ani o oryginalne osiągnięcia matematyczne. Celem przedstawianej metody jest podanie ogólnego sposobu rozwiązywania równań różniczkowych liniowych n-tego rzędu o zmiennych współczynnikach, co może być wykorzystane przez inyżnierów praktyków przy dokonywaniu koniecznych obliczeń.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Dla sprecyzowania ujednoliconej metody rozwiązywania równań różniczkowych liniowych o zmiennych współczynnikach konieczne jest następujące postępowanie:

1. Uogólnienie podanych we wstępie równań do równania różniczkowego liniowego, niejednorodnego n-tego rzędu.

2. Wyznaczenie ścisłych rozwiązań tego równania, jeżeli zmienne współczynniki są: a) wielomianami dowolnego stopnia, b) szeregami potęgowymi zbieżnymi oraz c) funkcjami ciągłymi, które są rozwijalne w szereg potęgowy zbieżny w żądanym przedziale.

3. Wyznaczenie linii ugięcia pręta prostego o zmiennym momencie bezwładności.

Nie można korzystać z rozwiązań podanych w niniejszej pracy, jeśli zmienne współczynniki mają nieskończoną ilość punktów nieciągłości lub wahania nieskończone w rozpatrywanym przedziale.

Jeśli natomiast zmienne współczynniki podane są w postaci funkcji: a) ciągłych, rozwijalnych w szereg potęgowy rozbieżny w żądanym przedziale, b) ciągłych, nieróżniczkowalnych oraz c) nieciągłych o skończonej liczbie punktów nieciągłości i o wahaniu skończonym, to takie funkcje można przybliżyć wielomianami za pomocą metody najmniejszych kwadratów {[18], s. 115}, wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a {[22], s. 197 wzór 3}, lub Newtona {[22], s. 199}.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA n-TEGO RZĘDU

Równanie różniczkowe zwyczajne, liniowe, niejednorodne, n-tego rzędu, w którym zmienne współczynniki są wielomianami, ma postać

$$\sum_{j=0}^{n} y^{(j)}\left(\sum_{i=0}^{k_j} a_i^{[j]} x^i\right)=\sum_{i=0}^{k} b_i x^i, \qquad a_0^{[n]}\neq 0, \tag{3.1}$$

gdzie $i, j, k_j, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $n=2, 3, 4, \ldots$ oraz gdzie $[j]$ oznaczają indeksy współczynników a_i. Wielkości $a_i^{[j]}$, b_i są stałymi rzeczywistymi, które mogą być różne od zera dla $0\leqslant j\leqslant n$, $0\leqslant i\leqslant k$, natomiast $a_i^{[j]}$, $b_i=0$, gdy $j<0$, $i<0$, $i>k_j$, k, $j>n$.

Równanie (3.1), które ma współczynnik $a_0^{[n]}=0$, można przez wprowadzenie nowej zmiennej $x=t+\text{const}$ sprowadzić do równania liniowego, n-tego rzędu, gdzie $a_0^{[n]}\neq 0$.

Zakładamy, że rozwiązanie równania (3.1) ma postać szeregu potęgowego względem x o postaci

$$y(x)=\sum_{\xi=0}^{\infty} A_\xi x^\xi, \qquad \xi=0, 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

gdzie A_ξ są to stałe. Różniczkując go (formalnie) otrzymujemy

$$y^{(j)}(x)=\sum_{\xi=0}^{\infty}\frac{(j+\xi)!}{\xi!}A_{j+\xi}x^\xi, \qquad j=0, 1, 2, \ldots, n.$$

Mamy wtedy zgodnie z mnożeniem szeregów metodą Cauchy'ego {[18], s. 195} następujące zależności:

$$y^{(j)}\sum_{i=0}^{k_j} a_i^{[j]} x^i=\sum_{\xi=0}^{\infty} c_\xi^{[j]} x^\xi, \qquad j=0,1,2,\dots,n,$$

gdzie

$$c_\xi^{[j]}=\sum_{m=0}^{\xi} A_m^{[j]}\, a_{\xi-m}^{[j]}$$

oraz

$$A_m^{[j]}=\frac{(j+m)!}{m!}A_{j+m}, \quad m=0,1,2,\dots,\xi, \quad \xi=0,1,2,\dots.$$

Wstawiamy je dla poszczególnych $j=0,1,2,\dots,n$ do równania różniczkowego (3.1) i przyrównujemy stałe przy jednakowych potęgach zmiennej x. Otrzymujemy wtedy związki

$$\sum_{m=0}^{\xi}\left[\frac{(n+m)!}{m!}A_{n+m}\,a_{\xi-m}^{[n]}\right]=-\sum_{j=0}^{n-1} c_\xi^{[j]}+b_\xi, \quad \xi=0,1,2,\dots, \tag{3.3}$$

gdzie $b_\xi=0$ dla $\xi=k+1,k+2,\dots$. Współczynniki $A_0,\dots,A_{n-1}$ uważamy za stałe dowolne.

Zależności (3.3) można przedstawić jako układ o nieskończonej ilości równań liniowych, niejednorodnych z nieskończoną ilością niewiadomych $A_n, A_{n+1}, A_{n+2},\dots$ o postaci

$$\begin{array}{ll} n!\,A_n B_{0,0}^{*,n} & =-Q_0+b_0,\\ n!\,A_n B_{1,0}^{*,n}+\dfrac{(n+1)!}{1!}A_{n+1}B_{1,1}^{*,n} & =-Q_1+b_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ n!\,A_n B_{\xi,0}^{*,n}+\dfrac{(n+1)!}{1!}A_{n+1}B_{\xi,1}^{*,n}+\dots+\dfrac{(n+\xi)!}{\xi!}A_{n+\xi}B_{\xi,\xi}^{*,n} & =-Q_\xi+b_\xi,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{array} \tag{3.4}$$

gdzie

$$B_{\xi,m}^{*,n}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{\xi-m}\frac{m!\,a_i^{[n-(\xi-i)+m]}}{(\xi-i)!}, & \text{jeśli} \quad \xi\geqslant m;\\ 0, & \text{jeśli} \quad \xi<m;\end{cases} \tag{3.5}$$

$$Q_\xi=\sum_{m=0}^{\xi}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{(j+m)!}{m!}A_{j+m}\,a_{\xi-m}^{[j]}, \qquad a_\xi^{[j]}=0, \quad \text{gdy} \quad j<0.$$

Z układu (3.4) obliczamy kolejno wielkości $A_n, A_{n+1},\dots$ i wstawiamy je do wzoru (3.2). Otrzymamy stąd rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (3.1) o postaci

$$y(x)=\sum_{q=0}^{n-1} A_q\, I^{*q,n}(x)+I^{*n,n}(x), \tag{3.6}$$

gdzie $A_0, \ldots, A_{n-1}$ są to stałe dowolne. Liniowo niezależne rozwiązania szczególne równania różniczkowego jednorodnego i szczególne rozwiązania równania niejednorodnego (3.1) mają kształt

$$I^{*q,n}(x)=(1-\delta_{qn})\,x^q-(-1)^{\delta_{qn}}\sum_{\xi=0}^{\infty}\frac{\xi!\,u^{*q,n}_{n+\xi}}{(n+\xi)!\,(a_0^{[n]})^{\xi+1}}\,x^{n+\xi},\qquad a_0^{[n]}\neq 0, \tag{3.7}$$

gdzie

$$u^{*q,n}_{n+\xi}=\omega^{*q,n}_{\xi}\,(a_0^{[n]})^{\xi}-(1-\delta_{0\xi})\sum_{m=0}^{\xi-1}u^{*q,n}_{n+m}B^{*,n}_{\xi,m}(a_0^{[n]})^{\xi-m-1}, \tag{3.8}$$

$$\omega^{*q,n}_{\xi}=(1-\delta_{qn})\sum_{\tau=0}^{q}\frac{q!}{\tau!}\,a^{[q-\tau]}_{\xi-\tau}+\delta_{qn}\,b_{\xi},\qquad \xi=0,1,2,\ldots,\qquad \tau=0,1,\ldots,q \tag{3.9}$$

oraz

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0, & \text{jeśli}\quad \alpha\neq\beta;\\ 1, & \text{jeśli}\quad \alpha=\beta;\end{cases}$$

$q=0,1,\ldots,n$, $a_i^{[j]}=0$, gdy $i<0$ lub $j<0$.

Wielkości $u^{*q,n}_{n+0}$, $u^{*q,n}_{n+1}, \ldots$ można dla $q=0,1,\ldots,n$ przedstawić za pomocą wyznaczników:

$$u^{*q,n}_{n+0}=\omega_0^{*q,n},\quad u^{*q,n}_{u+1}=\begin{vmatrix}B^{*,n}_{0,0} & \omega_0^{*q,n}\\ B^{*,n}_{1,0} & \omega_1^{*q,n}\end{vmatrix},\qquad u^{*q,n}_{n+2}=\begin{vmatrix}B^{*,n}_{0,0} & 0 & \omega_0^{*q,n}\\ B^{*,n}_{1,0} & B^{*,n}_{1,1} & \omega_1^{*q,n}\\ B^{*,n}_{2,0} & B^{*,n}_{2,1} & \omega_2^{*q,n}\end{vmatrix},$$

$$u^{*q,n}_{n+3}=\begin{vmatrix}B^{*,n}_{0,0} & 0 & 0 & \omega_0^{*q,n}\\ B^{*,n}_{1,0} & B^{*,n}_{1,1} & 0 & \omega_1^{*q,n}\\ B^{*,n}_{2,0} & B^{*,n}_{2,1} & B^{*,n}_{2,2} & \omega_2^{*q,n}\\ B^{*,n}_{3,0} & B^{*,n}_{3,1} & B^{*,n}_{3,2} & \omega_3^{*q,n}\end{vmatrix},\ \ldots.$$

3.1. *Równanie różniczkowe rzędu drugiego*

Niech współczynniki $a_i^{[j]}$ występujące w równaniu różniczkowym (3.1) przybiorą następujące wartości:

$$a_i^{[j]}=\begin{cases}0, & \text{jeśli}\quad j=1,3,4,5,6,\ldots, & i=0,1,2,\ldots;\\ 1, & \text{jeśli}\quad j=2, & i=0;\\ 0, & \text{jeśli}\quad j=2, & i=1,2,3,\ldots;\\ a_i, & \text{jeśli}\quad j=0, & i=0,1,2,\ldots,k_0.\end{cases}$$

Otrzymamy wedy równanie różniczkowe 2-go rzędu o postaci

$$y''+y\sum_{i=0}^{k_0}a_i\,x^i=\sum_{i=0}^{k}b_i\,x^i. \tag{3.10}$$

Zajmiemy się szczegółowo rozwiązaniami tego równania, ponieważ każde równanie różniczkowe liniowe niejednorodne rzędu drugiego o zmiennych współczynnikach, w którym występuje pierwsza pochodna funkcji niewiadomej, można sprowadzić do równania liniowego rzędu drugiego, w którym ona nie wystąpi {[30], s. 254}.

Jeżeli założymy, że $\xi+2=p$ oraz $m+2=s$, to wtedy zgodnie ze wzorem (3.5) otrzymamy dla $p=2, 3, 4, \ldots, s=2, 3, 4, \ldots$ związek

$$(3.11)\qquad B'^{2}_{p-2,\,s-2}=\begin{cases}\delta_{(p-s)\,0}, & \text{jeśli}\quad (p-s)=\ldots-2,\,-1,0,1;\\[4pt] \dfrac{a_{p-s-2}}{s(s-1)}, & \text{jeśli}\quad (p-s)=2,3,\ldots,k_0+2;\\[4pt] 0, & \text{jeśli}\quad (p-s)>k_0+2.\end{cases}$$

Dla $p=2, 3, 4, \ldots$ zależności (3.9) upraszcza się wtedy do postaci

$$(3.12)\qquad \omega^{q,2}_{p-2}=(1-\delta_{q2})\,a_{p-2-q}+\delta_{q2}\,b_{p-2},\qquad q=0,1,2;\ a_i=0\quad \text{dla } i<0.$$

Rozwiązanie ogólne równania (3.10) ma kształt:

$$(3.13)\qquad y(x)=\sum_{q=0}^{1} A_q\, I^{q,2}(x)+I^{2,2}(x),$$

gdzie A_0, A_1 są to stałe dowolne, natomiast rozwiązania szczególne mają postać

$$(3.14)\qquad I^{q,2}(x)=(1-\delta_{q2})\,x^q-(-1)^{\delta_{q2}}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{(p-2)!}{p!}\,u^{q,2}_p\,x^p,\qquad q=0,1,2,$$

gdzie

$$(3.15)\qquad u^{q,2}_p=\begin{cases}\omega^{q,2}_{p-2}, & \text{gdy}\quad p=2,3;\\[4pt] \omega^{q,2}_{p-2}-\displaystyle\sum_{s=2}^{p-2}\frac{a_{p-s-2}}{s(s-1)}\,u^{q,2}_s, & \text{gdy}\quad p=4,5,6,\ldots.\end{cases}$$

Wielkości $u^{q,2}_4$, $u^{q,2}_5, \ldots$ dla $q=0, 1, 2$ można napisać w postaci wyznaczników:

$$u^{q,2}_4=\begin{vmatrix}1\cdot 2 & 0 & \omega^{q,2}_0\\ 0 & \dfrac{1}{1!\,2!} & \omega^{q,2}_1\\ a_0 & 0 & \omega^{q,2}_2\end{vmatrix},\qquad u^{q,2}_5=\begin{vmatrix}1\cdot 2 & 0 & 0 & \omega^{q,2}_0\\ 0 & 2\cdot 3 & 0 & \omega^{q,2}_1\\ a_0 & 0 & \dfrac{1}{2!\,3!} & \omega^{q,2}_2\\ a_1 & a_0 & 0 & \omega^{q,2}_3\end{vmatrix},\ \ldots.$$

Oznaczmy przez $\bar{\bar{u}}^{q,2}_p$ dla $q=0, 1, 2$ liczbę niezerowych wyrazów wzoru (3.15). Łatwo stwierdzić, że zachodzą następujące nierówności:

$$(3.16)\qquad \bar{\bar{u}}^{q,2}_p\leqslant \mathcal{F}_{p-1-q(1-\delta_{q2})}\quad \text{dla}\quad p=2,3,4,\ldots,\quad q=0,1,2,$$

gdzie

$$\{\mathcal{F}_p\}^{\infty}_{p=2}=\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

jest to ciąg Fibonacciego. Można zatem napisać, że {[22], str. 16}:

$$\bar{\bar{u}}_p^{q,2} < (1{,}7)^p \quad \text{dla} \quad p=2,3,4,\ldots, \quad q=0,1,2. \tag{3.17}$$

Majoranty dla $|u_p^{0,2}|$ otrzymujemy ze wzorów (3.17) i (3.15):

$$|u_p^{0,2}| < \frac{(1{,}7)^p \sqrt{C^p}}{(p-k_0-2)(p-k_0-3)(p-2k_0-4)(p-2k_0-5)\ldots R_r}, \quad p > k_0+2,$$

gdzie

$$C = \max_{0 \leqslant i \leqslant k_0} |a_i|,$$

$$R_r = \begin{cases} r(r-1), & \text{jeśli} \quad 1 < r < k_0+2; \\ r(r+1), & \text{jeśli} \quad r=1; \\ (k_0+2)(k_0+1), & \text{jeśli} \quad r=0 \end{cases}$$

oraz r jest resztą z dzielenia p przez k_0+2, a więc $0 \leqslant r < k_0+2$.

Mamy następujące ograniczenie:

$$\frac{|u_p^{0,2}|\, x^p}{p(p-1)} < \frac{(1{,}7)^p (k_0+2)! \sqrt{C^p}\, (p^{k_0})^{\frac{p}{k_0+2}}}{p!} = U_p^{0,2} \quad \text{dla} \quad p > k_0+2.$$

Jeżeli $k_0 = \text{const}$, to wtedy $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{U_{p+1}^{0,2}}{U_p^{0,2}} = 0$, a więc promień zbieżności rozwiązania $I^{0,2}(x)$ jest nieskończony. Na podstawie rekurencji (3.15) łatwo dostrzec, że ograniczenia dla $|u_p^{1,2}|$ dokonuje się analogicznie, a w przypadku szacowania wielkości $|u_p^{2,2}|$ wartości k_0 i C zamieniamy na wartości

$$\begin{aligned} k_m &= \max(k_0, k), \\ \mathfrak{C} &= \max_{0 \leqslant i \leqslant k_m} (a_i, b_i). \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.2. *Rozwiązanie równania czwartego rzędu*

Niech współczynniki $a_i^{[j]}$ występujące w równaniu różniczkowym (3.1) przybiorą następujące wartości:

$$a_i^{[j]} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad j=1,2,3,5,6,7,8,\ldots, & i=0,1,2,\ldots; \\ 1, & \text{jeśli} \quad j=4, & i=0; \\ 0, & \text{jeśli} \quad j=4, & i=1,2,3,\ldots; \\ a_i, & \text{jeśli} \quad j=0, & i=0,1,2,\ldots,k_0. \end{cases}$$

Otrzymamy wtedy równanie różniczkowe 4-go rzędu o postaci

$$y^{\mathrm{IV}} + y \sum_{i=0}^{k_0} a_i x^i = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i. \tag{3.19}$$

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo jego rozwiązania. Równania różniczkowe zwyczajne, liniowe, rzędu czwartego, które dadzą się wyrazić w postaci samosprzężonej [por. wzór (1.2)] można zawsze sprowadzić do równania rzędu czwartego, liniowego, w którym wystąpi funkcja niewiadoma oraz tylko jej czwarta pochodna {[12] s. 170 wzór (1)}.

Jeżeli założymy, że $\xi+4=p$ oraz $m+4=s$, to wtedy zgodnie ze wzorem (3.5) otrzymamy dla $p=4, 5, 6, \ldots, s=4, 5, \ldots$ związek

$$B^{,4}_{p-4,s-4}=\begin{cases}\delta_{(p-s)0}, & \text{jeśli} \quad (p-s)=\ldots,-2,-1,0,1,2,3;\\[4pt] \dfrac{a_{p-s-4}}{s(s-1)(s-2)(s-3)}, & \text{jeśli} \quad (p-s)=4,5,6,\ldots,k_0+4;\\[4pt] 0, & \text{jeśli} \quad (p-s)>k_0+4.\end{cases} \tag{3.20}$$

Dla $p=4, 5, 6, \ldots$ wzór (3.9) upraszcza się wtedy do postaci

$$\omega^{q,4}_{p-4}=(1-\delta_{q4})\,a_{p-4-q}+\delta_{q4}\,b_{p-4}, \qquad q=0,1,2,3,4, \tag{3.21}$$

gdzie $a_i=0$ dla $i<0$. Rozwiązanie ogólne równania (3.19) ma kształt

$$y(x)=\sum_{q=0}^{3} A_q\, I^{q,4}(x)+I^{4,4}(x), \tag{3.22}$$

gdzie $A_0, \ldots, A_3$ są to stałe dowolne, natomiast rozwiązania szczególne mają postać

$$I^{q,4}(x)=(1-\delta_{q4})\,x^q-(-1)^{\delta_{q4}}\sum_{p=4}^{\infty}\frac{(p-4)!}{p!}\,u^{q,4}_p\,x^p, \qquad q=0,1,2,3,4, \tag{3.23}$$

gdzie

$$u^{q,4}_p=\begin{cases}\omega^{q,4}_{p-4}, & \text{jeśli} \quad p=4,5,6,7;\\[4pt] \omega^{q,4}_{p-4}-\displaystyle\sum_{s=4}^{p-4}\frac{a_{p-s-4}\,u^{q,4}_s}{s(s-1)(s-2)(s-3)}, & \text{jeśli} \quad p=8,9,\ldots .\end{cases} \tag{3.24}$$

Wielkości $u^{q,4}_8, u^{q,4}_9, \ldots$ dla $q=0,1,2,3,4$ można napisać w postaci wyznaczników:

$$u^{q,4}_8=2!3!\begin{vmatrix}1\cdot2\cdot3\cdot4 & 0 & 0 & 0 & \omega^{q,4}_0\\ 0 & 2\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & \omega^{q,4}_1\\ 0 & 0 & 3\cdot4\cdot5\cdot6 & 0 & \omega^{q,4}_2\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{3!4!5!6!} & \omega^{q,4}_3\\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{q,4}_4\end{vmatrix},$$

$$u_9^{q,4} = 2!3! \begin{vmatrix} 1\cdot2\cdot3\cdot4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0^{q,4} \\ 0 & 2\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0 & \omega_1^{q,4} \\ 0 & 0 & 3\cdot4\cdot5\cdot6 & 0 & 0 & \omega_2^{q,4} \\ 0 & 0 & 0 & 4\cdot5\cdot6\cdot7 & 0 & \omega_3^{q,4} \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{4!5!6!7!} & \omega_4^{q,4} \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \omega_5^{q,4} \end{vmatrix}, \dots .$$

Majoranty dla $|u_p^{0,4}|$ otrzymujemy ze wzorów (3.24) podobnie jak dla przypadku równania drugiego rzędu.

4. Linia ugięcia pręta prostego o zmiennym momencie bezwładności

Rozpatrzmy pręt prosty o zmiennym momencie bezwładności $J(x)$ (rys. 1). Równanie różniczkowe jego linii ugięcia podano wzorem (1.1). Obierzmy nową zmienną $t=c+f-y$. Równanie (1.1) przyjmie wtedy postać

$$t''+R(x)\,t=0, \tag{4.1}$$

gdzie

$$R(x)=\frac{P}{EJ(x)}=a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\dots .$$

Zakłada się, że $R(x)$ jest lub da się sprowadzić do wielomianu lub szeregu potęgowego zbieżnego. Zgodnie ze wzorami (3.13) i (3.14) mamy:

$$t(x)=c+f-y=A_0\left\{1-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{u_p^{0,2}}{p(p-1)}x^p\right\}+A_1\left\{x^1-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{u_p^{1,2}}{p(p-1)}x^p\right\}. \tag{4.2}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych

$$y(0)=y'(0)=0, \quad y(l)=f$$

otrzymujemy

$$A_0=c+f, \quad A_1=0.$$

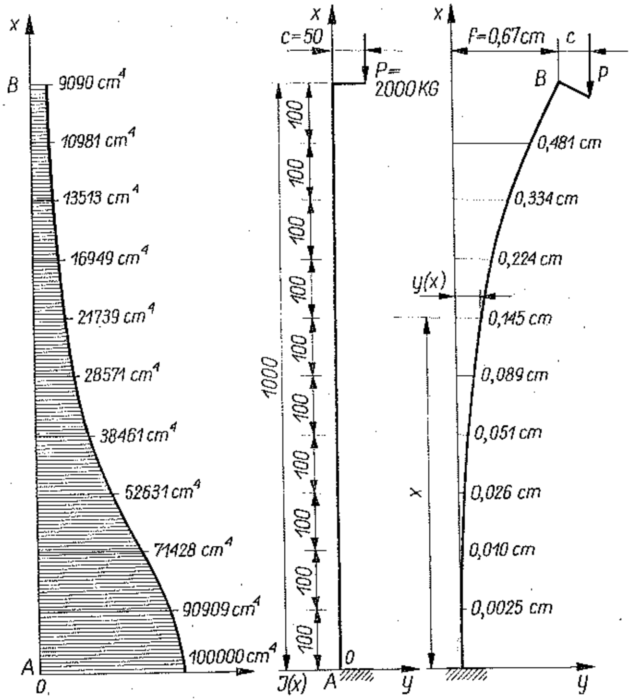
Linia ugięcia przedstawia się wzorem

$$y(x)=\frac{c}{1-\sum\limits_{p=2}^{\infty}\dfrac{u_p^{0,2}}{p(p-1)}l^p}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{u_p^{0,2}}{p(p-1)}x^p. \tag{4.3}$$

Otrzymane wyniki zastosujemy do rozwiązania przykładu liczbowego.

Przykład. Wyznaczyć linię ugięcia masztu stalowego utwierdzonego i obciążonego jak na (rys. 4). Maszt ma zmienny moment bezwładności przekroju poprzecznego, który określimy w sposób następujący:

$$J(x)=\frac{10^{10}}{10^5+x^2}.$$



Rys. 4. Zmienny moment bezwładności $J(x)=\frac{10^{10}}{10^5+x^2}$. Linia ugięcia pręta prostego o zmiennym momencie bezwładności utwierdzonego jednym końcem i obciążonego mimośrodowo na końcu swobodnym

Wyznaczamy linię ugięcia przy następujących założeniach: $E=2\cdot 10^6$ KG/cm^2, $R(x)=a_0+a_2x^2$, gdzie $a_0=10^{-8}$, $a_2=10^{-13}$. Obliczamy wartości $u_p^{0,2}$ zgodnie ze wzorem (3.15), skąd otrzymujemy

$$u_p^{0,2}=0, \quad \text{dla} \quad p=3,5,7,\ldots$$

oraz

$$u_2^{0,2}=10^{-8}, \quad u_4^{0,2}=0{,}9995\cdot 10^{-13}, \quad u_6^{0,2}=-0{,}5833\cdot 10^{-21},$$
$$u_8^{0,2}=-0{,}3828\cdot 10^{-27}, \quad u_{10}^{0,2}=+0{,}2092\cdot 10^{-35}, \ldots .$$

Linia ugięcia (4.3) przyjmie postać następującą:

$$y(x)=50{,}6737\,[0{,}500\cdot 10^{-8}\cdot x^2+0{,}8329\cdot 10^{-14}x^4-0{,}1944\cdot 10^{-22}x^6+$$
$$-0{,}1487\cdot 10^{-28}\cdot x^8+0{,}2324\cdot 10^{-37}\cdot x^{10}+\ldots].$$

5. Podsumowanie rozważań

Praca podaje rozwiązanie równania różniczkowego, liniowego n-tego rzędu, w którym zmienne współczynniki są wielomianami. W szczególności rozważono dwa przypadki: (3.10) i (3.19), które często są spotykane w praktyce.

Gdy rozpatrujemy równania o nieco ogólniejszej postaci jak na przykład:

$$(a_0^{[2]}+a_1^{[2]}x+\ldots)\,y^{\mathrm{II}}+(a_0^{[1]}+a_1^{[1]}x+\ldots)\,y^{\mathrm{I}}+(a_0^{[0]}+a_1^{[0]}x+\ldots)\,y=b_0+b_1x+\ldots$$

lub

$$(a_0^{[4]}+a_1^{[4]}x+\ldots)\,y^{\mathrm{IV}}+(a_0^{[3]}+a_1^{[3]}x+\ldots)\,y^{\mathrm{III}}+\ldots+(a_0^{[0]}+a_1^{[0]}x+\ldots)\,y=$$
$$=b_0+b_1x+\ldots,$$

to należy wtedy korzystać bezpośrednio z wyników (3.7). Współczynniki szeregów, które występują w rozwiązaniach omówionych równań, wyznaczymy za pomocą związków rekurencyjnych (3.8), (3.15) i (3.24).

Stosunkowo skomplikowane postacie wzorów wynikły z ogólności metody. Wspomniana ogólność zabezpiecza możliwość korzystania z niej przez inżynierów samodzielnie przy rozpatrywaniu rozmaitych przypadków szczególnych, co było zasadniczym celem pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. N. J. Achiezer, *Teoria aproksymacji funkcji*, PWN, Warszawa 1957.
2. S. Banach, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1956.
3. G. M. Fichtenholtz, *Rachunek różniczkowy i całkowy* [tłumaczenie z rosyjskiego], **3**, PWN, Warszawa 1966.
4. Cz. Ginalski, *O pewnym uogólnieniu trygonometrii*, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej, nr 31, Nauki Podstawowe, z. 7, 1964.
5. Cz. Ginalski, *Pewne uogólnienie funkcji hiperbolicznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej, nr 44, Nauki Podstawowe, z. 9, 1968.
6. T. Iwiński, *Uogólnione równanie n-tego rzędu Riccatiego drugiego rodzaju. Zastosowanie w teorii sprężystości*, Rozpr. Inżyn., **9**, 3, 1961.
7. T. Iwiński, *Zastosowanie transformacji Laplace'a i funkcji schodkowych w teorii belek o zmiennej sztywności*, Rozpr. Inżyn., **12**, 3, 1964.
8. L. Jeśmianowicz, J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1966.
9. A. Kacner, *Zginanie, stateczność i drgania prętów o zmiennym przekroju*, Rozpr. Inżyn., **9**, 3, 1961.
10. A. Kacner, *Bending of plates with variable thickness*, Arch. Mech. Stos., **13**, 3, 1961.
11. S. Kaliski, *Stateczność udarowa pręta*, Biuletyn WAT, Warszawa 1960.
12. E. Kamke, *Differenzialgleichungen*, VEB, Leipzig 1959.
13. Z. Kączkowski, *Płyty*, PWN, Warszawa 1968.
14. W. Kneschke, *Differenzialgleichungen und Randwert Probleme*, II, VEB, Leipzig 1966.
15. K. Knopp, *Szeregi nieskończone* [tłumaczenie z niemieckiego], PWN, Warszawa 1956.
16. Z. Kordecki, *Wyboczenie prętów smukłych przy krótkotrwałym obciążeniu*, Rozpr. Inżyn., **12**, 2, 1964.
17. E. Krynicki, *Zginanie i wyboczenie ram złożonych z prętów o liniowo zmiennej wysokości przekroju poprzecznego*, Arch. Inżyn. Ląd., **11**, 3, 1965.
18. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1963.

19. L. A. Lusternik, W. I. Sobolew, *Elementy analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1959.
20. Z. Mazurkiewicz, *Wyboczenie prętów o zmiennej sztywności zginania*, Rozpr. Inżyn., **13**, 3, 1965.
21. Z. Mazurkiewicz, *Wyboczenie pręta o zmiennym przekroju poprzecznym*, Arch. Inżyn. Ląd., 6, 4, 1960.
22. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1963.
23. A. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, Warszawa 1953.
24. И. Т. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, СТИЗ.* Моска 1949.
25. A. Sałustowicz, *Neue Anschauungen über den Spannungs und Formänderungs Zustand im Gebirge in der Nachbarschaft bergmännischer Hahlräume*, Akademie Verlag, Leipzig 1958.
26. A. Sałustowicz, *Mechanika górotworu*, PWN, Kraków 1953.
27. И. Соболь, *Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений*, ДАН, Москва 1948.
28. R. Solecki, *Układy kratowe i powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1964.
29. R. Solecki, *Drgania swobodne belki prostokątnej o parabolicznie zmiennej wysokości*, Inżynieria i Budownictwo, 8, 1958.
30. W. W. Stiepanow, *Równania różniczkowe* [tłumaczenie z rosyjskiego], PWN, Warszawa 1964.
31. F. Szelągowski, *W sprawie stateczności prętów o zmiennym momencie bezwładności*, Dodatek do nr 45 Przeglądu Technicznego, Warszawa 1927.
32. S. Timoshenko, *Teoria płyt i powłok*, PWN, Warszawa 1966.
33. S. Timoshenko, *Teoria stateczności sprężystej*, PWN, Warszawa 1966.
34. M. Życzkowski, *Wpływ ciężaru własnego na pełzające wyboczenie prętów*, Rozpr. Inżyn., **12**, 3, 1966.

Резуме

РЕШЕНИА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ n-ТОГО ПОРЯДКА, ВЫСТУПАЮЩИХ В МЕХАНИКЕ

В работе решаются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения n-того порядка с непостоянными кэффициентами, являющимися полиномами.

Особое внимание уделяется решениям дифференциальных уравнений 2-го и 4-го порядка, часто выступающих в механике.

Полученные результаты были применены для определения изгиба стержня с непостоянным моментом инерции.

Summary

SOLUTION OF THE ORDINARY n-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION OCCURRING IN MECHANICS

The paper discusses the solution of linear n-order differential equations in which variable coefficients are polynomials. We especially consider solutions of 2-nd and 4-th order equations which occur in mechanics.

The received results are applied to determine the bending line of the bar with a variable moment of inertia.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, KIELCE

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 września 1970 r.