ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 20, 1, 1972, 83–102, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

METODA FUNKCJI WŁASNYCH W ZAGADNIENIACH TERMOSPRĘŻYSTOŚCI I ELEKTROSPRĘŻYSTOŚCI (1)

W. T. GRINCZENKO i A. F. ULITKO (KIJÓW)

1. Wstęp

Od chwili wyprowadzenia w pierwszym trzydziestoleciu ubiegłego wieku podstawowych równań równowagi i ruchu ciał sprężystych, głównie dzięki pracom Naviera, Cauchy'ego, Poissona i Clapeyrona, stały się one przedmiotem stałego zainteresowania mechaników, fizyków i matematyków.

Nagromadzone dotąd rezultaty dotyczące rozwiązań zagadnień brzegowych teorii sprężystości są bardzo obszerne. Szczegółowo zostały zbadane zagadnienia dla najprostszych (w szczególności liniowych) przypadków rozkładu naprężeń i dla płaskiego pola. Rozwiązane zostały liczne zagadnienia stosowanej teorii zginania cienkich płyt i powłok jak również zagadnienia skręcania i zginania prętów. Badania te były stymulowane głównie potrzebą utworzenia metody obliczeń stanu naprężenia dla różnego rodzaju elementów konstrukcyjnych. Oczywiście w związku z praktycznym aspektem tych badań przy formułowaniu problemu dokonuje się pewnych założeń upraszczających odnośnie do charakteru deformacji elementów sprężystych. Do takich założeń odnosi się np. przyjęcie hipotezy Love'a-Kirchhoffa w teorii zginania płyt i powłok, korzystanie z zasady Saint-Venanta dla całkowego spełnienia warunków brzegowych itp. W przeważającej większości przypadków tego rodzaju hipotezy nie wnoszą większych błędów w obliczeniach stanu naprężenia, a jednocześnie znacznie upraszczają rozwiązanie problemu.

Istnieją jednakże całe klasy zagadnień brzegowych teorii sprężystości, których rozwiązania należy poszukiwać wychodząc z pełnego układu trójwymiarowych równań teorii sprężystości. Do nich należą przede wszystkim zagadnienia brzegowe dla ciał przestrzennych, których wszystkie trzy wymiary są w przybliżeniu jednakowe, a w szczególności zagadnienia dotyczące lokalnych obciążeń i problemy uściślenia stanu naprężenia w przybrzeżnych warstwach cienkich płyt i powłok, zagadnienia dynamiczne dla drgań wysokiej częstotliwości, analiza kruchego zniszczenia ciał osłabionych szczelinami itp.

W ostatnich latach wzrosło znacznie zainteresowanie przestrzennymi zagadnieniami teorii sprężystości w związku z rozwojem pewnych dziedzin fizyki, leżących na styku z mechaniką. Wśród nich należy wymienić szereg działów akustyki fizycznej, w szczególności działy poświęcone piezo-ceramicznym promiennikom dźwięku i ultradźwiękowym liniom opóźnienia sygnałów.

(1) Z rosyjskiego przetłumaczył J. Bejda.

Znane są powszechnie ogromne trudności, jakie powstają przy rozwiązywaniu przestrzennych zagadnień teorii sprężystości. Wydaje się, że tym należy tłumaczyć fakt, że liczba rozwiązanych dotąd przestrzennych zadań teorii sprężystości jest bardzo ograniczona. Niezwykle wygodna droga, dzięki której otrzymuje się rozwiązania płaskich zagadnień teorii sprężystości wskutek własności funkcji zmiennej zespolonej nie ma zastosowania (przynajmniej w pełnej swej ogólności) do zagadnień przestrzennych. Wykorzystywanie uogólnionych funkcji analitycznych do rozwiązywania przestrzennych (w pierwszej kolejności osiowo-symetrycznych) zagadnień teorii sprężystości rozpoczęto stosunkowo niedawno [1 i 2]. Trudności, jakie należy pokonać przy tej metodzie polegają na znalezieniu postaci analitycznych funkcji uogólnionych dla niekanonicznych obszarów południkowego przekroju ciała.

Podstawową metodą znajdowania ścisłych rozwiązań przestrzennych zagadnień teorii sprężystości, która dotychczas była wykorzystywana w większości prac [3 i 4], jest metoda oparta na ogólnych postaciach rozwiązania podstawowych równań równowagi i ruchu ciał sprężystych w krzywoliniowych układach współrzędnych. Postać tych rozwiązań ma na pierwszy rzut oka różną naturę, ale przy bardziej wnikliwej analizie okazuje się, że rozwiązania te są bardzo do siebie zbliżone i w rezultacie polegają na wyrażeniu rozwiązania przez funkcje harmoniczne dla zagadnień statyki i przez funkcje falowe dla zagadnień dynamiki. Najodpowiedniejsze są przy tym te rozwiązania ogólne, w których występują funkcje harmoniczne (falowe) z niskimi pochodnymi, co ułatwia ich wykorzystanie we współrzędnych krzywoliniowych. W zagadnieniach statyki szerokie zastosowanie w ostatnich latach znalazło rozwiązanie Papkowicza-Neubera, a w zagadnieniach dynamiki — rozwiązanie Helmholtza.

Przy opisanych wyżej metodach rozwiązanie zagadnień teorii sprężystości konstruuje się tak samo, jak w skalarnym przypadku teorii potencjału: w postaci szeregów lub całek z funkcji specjalnych. Uważa się, że jest ono ścisłym rozwiązaniem zagadnienia, jeśli współczynniki wspomnianych szeregów i gęstości całek mogą być wyznaczone w wyraźnej postaci przez dane obciążenia lub jeśli dany jest algorytm ich wyliczenia z dowolną z góry daną dokładnością przy skończonej liczbie operacji.

Z powyższych rozważań wynika, że można próbować otrzymać ścisłe rozwiązanie przestrzennych zagadnień teorii sprężystości jedynie dla tych obszarów, w których rozdzielają się zmienne w trójwymiarowym równaniu Laplace'a (zagadnienia statyki) lub Helmholtza (zagadnienia dynamiki).

Do chwili obecnej dział klasycznej fizyki matematycznej, poświęcony badaniom zagadnień brzegowych teorii potencjału, został opracowany wyczerpująco [5–8]. Poza nielicznymi wyjątkami otrzymano rozwiązania zagadnień brzegowych we współrzędnych elipsoidalnych i ich zwyrodniałych formach (ogółem 11 układów współrzędnych, w tym układy współrzędnych kartezjańskich, cylindrycznych i sferycznych) oraz we współrzędnych cykloidalnych (toroidalnych i bisferycznych).

Jeśli przeanalizować metody rozwiązywania opisanej klasy zagadnień teorii potencjału, to nietrudno ustalić, że podstawową metodą dobrze opracowaną w fizyce matematycznej jest metoda funkcji własnych.

Metoda funkcji własnych obejmuje rozdzielenie zmiennych w równaniach o pochodnych cząstkowych, opisujących dany problem we współrzędnych krzywoliniowych wybranych tak, że brzegowi ciała odpowiada stała wartość jednej lub kilku powierzchni. Stałe rozdzielenia zmiennych, występujące w równaniach różniczkowych zwyczajnych typu Sturma-Liouville'a, znajduje się na podstawie pewnych uzasadnionych fizycznie warunków brzegowych zagadnienia. Rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych dostarczają potrzebne układy funkcji własnych, a stałe rozdzielenia nazywać będziemy wartościami własnymi. Pozostaje udowodnić zupełność funkcji własnych, tzn. pokazać, że szereg lub całka z funkcji własnych może przedstawiać dowolną odcinkami gładką ciągłą funkcję brzegową w danym przedziale zmienności zmiennej niezależnej oraz znaleźć współczynniki rozdzielenia. Po dokonaniu tego problem można uważać za rozwiązany. Takie ujęcie metody funkcji własnych jest niczym innym jak daleko idącym uogólnieniem podejścia opracowanego po raz pierwszy przez FOURIERA.

Cel podjętych przez autorów badań polega na tym, aby rozszerzyć klasyczną metodę funkcji własnych na przestrzenne zagadnienia teorii sprężystości i sprzężone zagadnienia elektrosprężystych drgań piezoceramicznych ciał, wychodząc z ich sformułowania w postaci wektorowych zagadnień brzegowych fizyki matematycznej.

W przypadku ośrodka jednorodnego i izotropowego równanie wektorowe równowagi (ruchu) posiada postać [3]

$$2\frac{m-1}{m-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}=0, \qquad \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

gdzie $\mathbf{u}$ jest wektorem przemieszczeń sprężystych, m współczynnikiem Poissona, G modułem sprężystości postaciowej, ρ gęstością materiału oraz t czasem. W równaniu (1.1) pominięte zostały siły objętościowe różnej natury, np. siły ciężkości, wyrazy zależne od temperatury itp. Uwzględnienie ich w przypadku pól niesprzężonych stanowi problem trywialny.

Przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień należy sformułować dla równania (1.1) odpowiednie warunki na powierzchni ciała. Szczególną uwagę skupiono niżej na rozwiązaniu pierwszego i drugiego problemu brzegowego. W przypadku pierwszego problemu brzegowego na powierzchni ciała dany jest wektor sił zewnętrznych, a dla wektora przemieszczeń sprężystych otrzymujemy warunek

$$2G\left[\mathbf{n}\frac{\operatorname{div}\mathbf{u}}{m-2}+(\mathbf{n}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{u}\right]_S=\mathbf{F}_n, \tag{1.2}$$

gdzie $\mathbf{n}$ oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni ciała S i skierowany na zewnątrz oraz $\mathbf{F}_n$ wektor obciążeń zewnętrznych na S. Dla drugiego problemu brzegowego konieczne jest określenie z góry w każdym punkcie powierzchni ciała wektora przemieszczeń

$$\mathbf{u}|_S=\mathbf{u}_n. \tag{1.3}$$

Takie sformułowanie przestrzennych zagadnień teorii sprężystości jest w dużym stopniu pokrewne sformułowaniu zagadnień brzegowych w klasycznej elektrodynamice Maxwella [6], co pozwala zapożyczyć niektóre rezultaty z tej dziedziny.

Już tu należy wskazać na trudności, z którymi związana jest analiza pól wektorowych i na charakterystyczne osobliwości, z którymi stykamy się przy rozwiązywaniu wektorowych zagadnień brzegowych matematycznej fizyki. Trudności te związane są nie tyle z rozdzieleniem zmiennych w równaniach wektorowych opisujących badane zjawisko, co ze spełnieniem danych na powierzchni ciała warunków brzegowych. Sens tego stwierdzenia polega na tym, że w przypadku wektorowych zagadnień brzegowych pełny układ wektorowych funkcji własnych na powierzchni ciała można skonstruować w sposób niejednoznaczny. Na przykład można go zbudować zestawiając wszystkie trzy składowe wektora przemieszczeń lub naprężeń na powierzchni ciała z funkcji własnych zagadnienia skalarnego $S_\lambda^{(k)}(\xi, \eta)$. Jednakże taka konstrukcja wektorów własnych nie zawsze prowadzi do uproszczenia rozwiązania zagadnienia. Dowolność, jaką rozporządzamy przy spełnieniu wektorowych warunków brzegowych, polega na tym, że oprócz $S_\lambda^{(k)}(\xi, \eta)$ pełny układ funkcji Sturma-Liouville'a na powierzchni ciała tworzą również pewne kombinacje ich pierwszych pochodnych względem współrzędnych ξ, η. Przekonywującym tego dowodem jest konstrukcja układu wektorowych funkcji własnych na powierzchni kuli w przypadku zagadnień brzegowych elektrodynamiki i teorii sprężystości. Rezultaty te znane są już od dawna [9–12] i znalazły mocną podbudowę matematyczną w teorii grupy obrotu [13]. Rzeczą naturalną byłoby porównanie rozwiązania dla kuli otrzymanego przez Lamégo [9], który bezpośrednio wykorzystywał rozdzielenie zmiennych w równaniu (1.1), z wynikami pracy [13]. Lamé zaproponował całkowanie równań równowagi (1.1) przez zastąpienie całkowania dwoma dającymi się kolejno rozwiązać fundamentalnymi równaniami pola wektorowego

$$\tag{1.4} \begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = 2\,\frac{m-1}{m-2}\operatorname{grd}\vartheta, \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0, \\ &\operatorname{rot}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}, \\ &\operatorname{div}\mathbf{u} = \vartheta. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę rozwiązania dla funkcji harmonicznej θ w postaci szeregu z funkcji sferycznych Laplace'a otrzymał on z równań (1.4) wyrażenia w jawnej postaci dla składowych wektora przemieszczeń, określone przez same funkcje Laplace'a i pewne kombinacje ich pierwszych pochodnych. Zestawienie rozwiązania Lamégo z wektorami własnymi nieprzywiedlnych reprezentacji grupy obrotów wykazało, że obydwie formy rozwiązań w istocie rzeczy pokrywają się różniąc się jedynie formą zapisu.

Istnieje zatem podstawa, aby przypuszczać, że zastosowanie metody funkcji własnych do wektorowego problemu brzegowego (1.1) i (1.2) lub (1.1) i (1.3) z wykorzystaniem sposobu całkowania równań (1.1) przez układ równań fundamentalnych (1.4) również w przypadku obszarów innej postaci pozwoli otrzymać rozwiązanie w prostej i wygodnej formie, a dowód zupełności wektorowych funkcji własnych nie powinien nastręczać szczególnych trudności.

Zanim przejdziemy do przedstawienia konkretnych rezultatów uczyńmy jeszcze jedną ważną uwagę. Będziemy rozważać najpierw (p. 2) zagadnienia dla ciał ograniczonych powierzchniami należącymi do tej samej rodziny trójortogonalnego układu współrzędnych. W tym przypadku zagadnienie na wartości własne rozwiązuje się bardzo prosto na podstawie warunków ciągłości pola przemieszczeń lub warunków zachowania się w nieskończoności dla obszarów nieograniczonych. Rozwiązania tych zagadnień są punktem wyjścia również dla konstrukcji rozwiązań dla bardziej skomplikowanych zagadnień równowagi ciał ograniczonych różnymi przecinającymi się powierzchniami współrzędnych, tzw. «ciał skończonych rozmiarów» (p. 3).

2. Rozwiązanie zagadnień brzegowych dla ciał sprężystych ograniczonych powierzchniami należącymi do tej samej rodziny trójortogonalnego układu współrzędnych

Podstawą niniejszego rozdziału są prace [14 i 15] uzupełnione częściowo pewnymi nowymi rezultatami. Przytacza się tu jedynie najważniejsze wzory końcowe. Procedurę ich wyprowadzenia i niezbędne pośrednie obliczenia można znaleźć w cytowanych wyżej pracach i zamieszczonej w nich bibliografii.

2.1. *Kula (wektorowy rozkład Lamégo)*

Wyrażenie dla wektora przemieszczeń we współrzędnych sferycznych ρ, ϑ, φ zapisuje się w postaci szeregu

$$\mathbf{u}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}[u_n^{(k)}(\rho)\mathbf{L}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)+v_n^{(k)}(\rho)\mathbf{M}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)+w_n^{(k)}(\rho)\mathbf{N}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)], \tag{2.1}$$

$\mathbf{L}_n^k$, $\mathbf{M}_n^{(k)}$ i $\mathbf{N}_n^{(k)}$ oznaczają tu wektorowe funkcje własne na powierzchni kuli określone wzorami

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)=\mathbf{e}_\rho S_n^{(k)}(\vartheta,\varphi),\\
&\mathbf{M}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)=\rho\operatorname{grad}S_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)=\mathbf{e}_\vartheta\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\vartheta}+\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\varphi},\\
&\mathbf{N}_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)=\rho\operatorname{rot}[\mathbf{e}_\rho S_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)]=\frac{\mathbf{e}_\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\varphi}-\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial S_n^{(k)}}{\partial\vartheta},
\end{aligned}\tag{2.2}$$

gdzie $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\vartheta$ i $\mathbf{e}_\varphi$ oznaczają jednostkowe wektory normalne współrzędnych sferycznych, $S_n^{(k)}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}}\,P_n^{(k)}(\cos\vartheta)\,e^{ik\varphi}$ unormowane funkcje własne zagadnienia skalarnego, $P_n^{(k)}$ odpowiadające im wielomiany Legendre'a.

Funkcje «radialne» $u_n^{(k)}(\rho)$, $v_n^{(k)}(\rho)$ i $w_n^{(k)}(\rho)$ dla zagadnień statyki przyjmuje się w postaci funkcji wielomianowych współrzędnej ρ, a dla zagadnień dynamiki wyrażają się one przez funkcje Bessela z połówkowym indeksem.

Wzór na obrót dla szeregu (2.1) ma postać

$$(2.3)\quad \mathbf{e}_\rho u_n^{(k)}(\rho)+n(n+1)\,[\mathbf{e}_\vartheta v_n^{(k)}(\rho)+\mathbf{e}_\varphi w_n^{(k)}(\rho)]=$$
$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [u_\rho \mathbf{L}_n^{*(k)}(\vartheta,\varphi)+u_\vartheta \mathbf{M}_n^{*(k)}(\vartheta,\varphi)+u_\varphi \mathbf{N}_n^{*(k)}(\vartheta,\varphi)]\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Indeks * oznacza tu zespolone sprzężenie.

Wzór na obrót (2.3) pozwala znaleźć równania dla określenia stałych całkowania, występujących w funkcjach radialnych. Równania algebraiczne dla niewiadomych rozwiązuje się elementarnie, przy czym dla każdego n układ szóstego rzędu (przypadek wydrążonej kuli) rozpada się na układ czwartego i drugiego rzędu. Wektor sił na powierzchni kuli $\mathbf{F}_n$ również przedstawiony jest w postaci szeregu (2.1), a rozwiązanie wcale nie jest bardziej złożone niż rozważane zagadnienie w przemieszczeniach.

2.2. *Warstwa we współrzędnych kartezjańskich (wektorowa transformacja Fouriera)*

Weźmy pod uwagę przemieszczenie

$$(2.4)\quad \mathbf{u}=\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} [w_\lambda(z)\mathbf{L}_\lambda(x,y)+u(z)\mathbf{M}_\lambda(x,y)+v_\lambda(z)\mathbf{N}_\lambda(x,y)]\,d\alpha\, d\beta \qquad (\lambda=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}),$$

gdzie

$$(2.5)\quad \begin{aligned} \mathbf{L}_\lambda(x,y)&=\mathbf{k}S_\lambda(x,y),\\ \mathbf{M}_\lambda(x,y)&=\operatorname{grad}S_\lambda(x,y)=\mathbf{i}\frac{\partial S_\lambda}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial S_\lambda}{\partial y},\\ \mathbf{N}_\lambda(x,y)&=\operatorname{rot}[\mathbf{k}S_\lambda(x,y)]=\mathbf{i}\frac{\partial S_\lambda}{\partial y}-\mathbf{j}\frac{\partial S_\lambda}{\partial x},\\ S_\lambda(x,y)&=\frac{1}{2\pi}e^{-i(\alpha x+\beta y)}. \end{aligned}$$

Wzór dla wektorowego obrotu Fouriera ma postać następującą:

$$(2.6)\quad \lambda^2[\mathbf{i}u_\lambda(z)+\mathbf{j}v_\lambda(z)]+\mathbf{k}w_\lambda(z)=\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}[u_z\mathbf{L}_\lambda^*(x,y)+$$
$$+u_x\mathbf{M}_\lambda^*(x,y)+u_y\mathbf{N}_\lambda^*(x,y)]\,dx\,dy.$$

Funkcje $u_\lambda(z)$, $v_\lambda(z)$ i $w_\lambda(z)$ w postaci zamkniętej dane są w pracy [15]. Dowolne «gęstości całkowania», występujące w wyżej wspomnianych funkcjach, znajduje się w sposób elementarny zarówno dla zagadnień w przemieszczeniach jak i w naprężeniach. Rozkład (2.4) ma zastosowanie również przy rozwiązywaniu zagadnień dynamicznych dla warstwy.

2.3. *Warstwa we współrzędnych cylindrycznych (wektorowa transformacja Fouriera-Hankela)*

Rozpatrujemy przemieszczenie w postaci

$$\mathbf{u}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}[w_k(\lambda,z)\mathbf{L}_\lambda^{(k)}(r,\varphi)+u_k(\lambda,z)\mathbf{M}_\lambda^{(k)}(r,\varphi)+v_k(\lambda,z)\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(r,\varphi)]\lambda\,d\lambda. \tag{2.7}$$

Wyrażenia dla wektorowych funkcji własnych posiadają postać

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_\lambda^{(k)}(r,\varphi)=\mathbf{k}S_\lambda^{(k)}(r,\varphi),\\
&\mathbf{M}_\lambda^{(k)}(r,\varphi)=\operatorname{grad}S_\lambda^{(k)}(r,\varphi)=\mathbf{e}_r\frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial r}+\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}\frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial\varphi},\\
&\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(r,\varphi)=\operatorname{rot}[\mathbf{k}S_\lambda^{(k)}(r,\varphi)]=\frac{\mathbf{e}_r}{r}\frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial\varphi}-\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial r}.
\end{aligned}\tag{2.8}$$

Obrót

$$\begin{aligned}
&\lambda^2[\mathbf{e}_r u_k(\lambda,z)+\mathbf{e}_\varphi v_k(\lambda,z)]+\mathbf{k}w_k(\lambda,z)=\\
&\qquad=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}[u_z\mathbf{L}_\lambda^{*(k)}(r,\varphi)+\mathbf{u}_r\mathbf{M}_\lambda^{*(k)}(r,\varphi)+u_\varphi\mathbf{N}_\lambda^{*(k)}(r,\varphi)]\,r\,dr,
\end{aligned}\tag{2.9}$$

przy czym $S_\lambda^{(k)}(r,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}J_k(\lambda r)e^{ik\varphi}$, a funkcje współrzędnej z, tzn. funkcje u_k, v_k i w_k, pokrywają się z odpowiednimi funkcjami dla warstwy we współrzędnych kartezjańskich.

2.4. *Warstwa we współrzędnych parabolicznych ξ, η, z, które są określone za pomocą wzorów*

$$\begin{gathered}
x=\frac{\xi^2-\eta^2}{2},\qquad y=\xi\eta,\qquad z=z,\\
0\leqslant\xi<\infty,\qquad -\infty<\eta<\infty,\qquad -h\leqslant z\leqslant h.
\end{gathered}\tag{2.10}$$

Rozwiązanie ogólne dla wektora przemieszczeń $\mathbf{u}(\xi,\eta,z)$ w postaci całkowej jest następujące:

$$\mathbf{u}=\int_0^{\infty}\lambda\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}[w_\tau(\lambda,z)\mathbf{L}_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)+u_\tau(\lambda,z)\mathbf{M}_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)+v_\tau(\lambda,z)\mathbf{N}_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)]\,d\tau. \tag{2.11}$$

Wyrażenie dla obrotu jest następujące:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2[\mathbf{e}_\xi u_\tau(\lambda,z)+\mathbf{e}_\eta v_\tau(\lambda,z)]+\mathbf{k}w_\tau(\lambda,z)=\\
&\qquad=\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}[u_z\mathbf{L}_\lambda^{*(\tau)}(\xi,\eta)+u_\xi\mathbf{M}_\lambda^{*(\tau)}(\xi,\eta)+u_\eta\mathbf{N}_\lambda^{*(\tau)}(\xi,\eta)](\xi^2+\eta^2)\,d\eta.
\end{aligned}\tag{2.12}$$

W powyższych wzorach wprowadzono oznaczenia

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L}_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)=\mathbf{k}S_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta),\\
&\mathbf{M}_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)=\operatorname{grad} S_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)=\frac{\mathbf{e}_\xi}{h_\xi}\frac{\partial S_\lambda^{(\tau)}}{\partial\xi}+\frac{\mathbf{e}_\eta}{h_\eta}\frac{\partial S_\lambda^{(\tau)}}{\partial\eta},\\
(2.13)\quad &\mathbf{N}_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)=\operatorname{rot}[\mathbf{k}S_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)]=\frac{\mathbf{e}_\xi}{h_\eta}\frac{\partial S_\lambda^{(\tau)}}{\partial\eta}-\frac{\mathbf{e}_\eta}{h_\xi}\frac{\partial S_\lambda^{(\tau)}}{\partial\xi},\\
&S_\lambda^{(\tau)}(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{ch}^{-1}\pi\tau}{2\sqrt{2}\,\pi}[D_{-1/2-i\tau}(-h\xi\sqrt{2\lambda})D_{-1/2+i\tau}(h\eta\sqrt{2\lambda})+\\
&\qquad+D_{-1/2-i\tau}(h\xi\sqrt{2\lambda})D_{-1/2+i\tau}(-h\eta\sqrt{2\lambda})],\qquad h=e^{i\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}
$$

Symbol $D_{-1/2\pm i\tau}(x)$ oznacza funkcje paraboliczengo walca. Funkcje zależne od grubości $u_\tau(\lambda,z)$, $v_\tau(\lambda,z)$ i $w_\tau(\lambda,z)$ znowu pokrywają się z odpowiednimi funkcjami dla warstwy we współrzędnych kartezjańskich.

2.5. *Kołowy cylinder*

Dobrze znane w literaturze rozwiązanie dla kołowego cylindra jest również bardzo proste w ogólnym schemacie metody wektorowych funkcji własnych. Pełny układ wektorów własnych na powierzchni cylindra konstruuje się dla pola gradientów w sposób następujący:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L}_\lambda^{(k)}(\varphi,z)=\mathbf{e}_r S_\lambda^{(k)}(\varphi,z),\qquad \mathbf{M}_\lambda^{(k)}(\varphi,z)=\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial\varphi},\\
(2.14)\quad &\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(\varphi,z)=\mathbf{k}\frac{\partial S_\lambda^{(k)}}{\partial z},\qquad S_\lambda^{(k)}(\varphi,z)=\frac{1}{2\pi}e^{i(k\varphi-\lambda z)}.
\end{aligned}
$$

Wzór dla postaci całkowej wektora $u(r,\varphi,z)$ zgodnie z układem (2.14) i odpowiadający mu wzór dla obrotu są następujące:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[u_k(r,\lambda)\mathbf{L}_\lambda^{(k)}(\varphi,z)+v_k(r,\lambda)\mathbf{M}_\lambda^{(k)}(\varphi,z)+w_k(r,\lambda)\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(\varphi,z)]\,d\lambda,\\
(2.15)\quad &\mathbf{e}_i u_k(r,\lambda)+\mathbf{k}\lambda^2 v_k(r,\lambda)+\mathbf{e}_\varphi n^2 w_k(r,\lambda)=\\
&\qquad=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\infty}^{\infty}[u_r\mathbf{L}_\lambda^{*(k)}(\varphi,z)+u_\varphi\mathbf{M}_\lambda^{*(k)}(\varphi,z)+u_z\mathbf{N}_\lambda^{*(k)}(\varphi,z)]\,dz.
\end{aligned}
$$

Funkcje radialne u_k, v_k i w_k wyrażają się przez zmodyfikowane funkcje Bessela.

2.6. *Stożek kołowy (wektorowa transformacja Fouriera-Mellina)*

Korzysta się tu z następującego układu wektorowych funkcji własnych we współrzędnych sferycznych:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_s^{(k)}(\rho,\varphi)&=\frac{\mathbf{e}_\vartheta}{\rho}S_s^{(k)}(\rho,\varphi), & \mathbf{M}_s^{(k)}(\rho,\varphi)&=\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho}\frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial\varphi},\\ \mathbf{N}_s^{(k)}(\rho,\varphi)&=\mathbf{e}_\rho\frac{\partial S_s^{(k)}}{\partial\rho}, & S_s^{(k)}(\rho,\varphi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rho^{-s+1}e^{ik\varphi}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Rozwiązanie ogólne dla wektora przemieszczeń $\mathbf{u}(\rho,\vartheta,\varphi)$ przedstawione jest w postaci zwykłego szeregu Fouriera i całki Riemanna-Mellina z układu wektorów (2.16):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}[v_k(\vartheta,s)\,\mathbf{L}_s^{(k)}(\rho,\varphi)+w_k(\vartheta,s)\mathbf{M}_s^{(k)}(\rho,\varphi)+&\\ +u_k(\vartheta,s)\mathbf{N}_s^{(k)}(\rho,\varphi)]\,ds&.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Funkcje współrzędnej kątowej ϑ znajduje się metodą rozdzielenia zmiennych i wyraża się je przez odpowiadające im funkcje Legendre'a stopnia zespolonego. Na przykład

$$W_k(\vartheta,s)=\left[2\frac{m-1}{m-2}(2-s)+s\right]\frac{A_k(s)}{\sin\vartheta}P_s^{(k)}-\frac{B_k(s)}{\sin\vartheta}P_{s-2}^{(k)}-C_k(s)\frac{dP_{s-1}^{(k)}}{d\vartheta}.\tag{2.18}$$

Równania algebraiczne dla niewiadomych funkcji $A_k(s)$, $B_k(s)$ i $C_k(s)$ otrzymuje się za pomocą wzoru na obrót

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_\rho s(1-s)u_k(\vartheta,s)+\mathbf{e}_\vartheta v_k(\vartheta,s)+\mathbf{e}_\varphi k^2 w_k(\vartheta,s)=\\ &\quad=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}[u_\vartheta\mathbf{L}_s^{*(k)}(\rho,\varphi)+u_\varphi\mathbf{M}_s^{*(k)}(\rho,\varphi)+u_\rho\mathbf{N}_s^{*(k)}(\rho,\varphi)]\,d\rho,\end{aligned}\tag{2.19}$$

przy czym przez $S_s^{*(k)}(\rho,\varphi)$ rozumiemy wyrażenie

$$S_s^{*(k)}(\rho,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}r^s e^{-ik\varphi}.\tag{2.20}$$

Przy danych na powierzchni stożka naprężeniach wszystkie obliczenia prowadzi się tak samo jak wyżej.

2.7. *Paraboloida obrotowa* (*transformacja wektorowa Fouriera-Hankela*)

Współrzędne paraboliczne obrotu określone są wzorami

$$\begin{aligned}&r=\xi\eta, && z=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2), && \varphi=\varphi,\\ &0\leqslant\xi<\infty, && 0\leqslant\eta<\infty, && 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\end{aligned}\tag{2.21}$$

gdzie r, z, φ są współrzędnymi walcowymi.

Wiemy z teorii potencjału [8], że rozwiązanie zagadnień brzegowych Neumanna i Dirichleta dla warstwy we współrzędnych walcowych i dla paraboloidy obrotowej oparte jest na tym samym układzie funkcji własnych. Analogiczna sytuacja zachodzi również dla wektorowych zagadnień brzegowych.

Ogólne rozwiązanie dla wektora przemieszczeń $\mathbf{u}(\xi, \eta, \varphi)$ przedstawia się następująco:

$$\mathbf{u}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}[\hat{w}_k(\tau,\xi)\mathbf{L}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)+\hat{u}_k(\tau,\xi)\mathbf{M}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)+\hat{v}_k(\tau,\xi)\mathbf{N}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)]\,\tau\,d\tau. \tag{2.22}$$

Wektorowe składowe harmoniczne, za pomocą których konstruuje się dany rozkład, pokrywają się ściśle z funkcjami wektorowymi dla warstwy (2.8). Mamy zatem

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)=\mathbf{k}S_\tau^{(k)}(\eta,\varphi),\\
&\mathbf{M}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)=\mathbf{e}_r\frac{\partial S_\tau^{(k)}}{\partial\eta}+\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\eta}\frac{\partial S_\tau^{(k)}}{\partial\varphi},\\
&\mathbf{N}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)=\frac{\mathbf{e}_r}{\eta}\frac{\partial S_\tau^{(k)}}{\partial\varphi}-\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial S_\tau^{(k)}}{\partial\eta},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

gdzie $S^k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}J_k(\tau\eta)e^{ik\varphi}$; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$ oznaczają wektory jednostkowe współrzędnych cylindrycznych.

Funkcje $\hat{u}_k(\tau,\xi)$, $\hat{v}_k(\tau,\xi)$, $\hat{w}_k(\tau,\xi)$ przyjmują postać

$$\begin{aligned}
&\hat{u}_k(\tau,\xi)=-\frac{1}{\tau}\left[\bar{\beta}_k(\tau,\xi)I_k'(\tau\xi)+\xi\alpha_k'(\tau)I_k''(\tau\xi)-k\gamma_k(\tau)\frac{I_k(\tau\xi)}{\tau\xi}\right],\\
&\hat{v}_k(\tau,\xi)=\frac{i}{\tau}\left[k\bar{\beta}_k(\tau,\xi)\frac{I_k(\tau\xi)}{\tau\xi}+k\xi\alpha_k'(\tau)\left(\frac{I_k(\tau\xi)}{\tau\xi}\right)'-\gamma_k(\tau)I_k'(\tau\xi)\right],\\
&\hat{w}_k(\tau,\xi)=-\left[\bar{\beta}_k(\tau,\xi)I_k(\tau\xi)+\left(\frac{3m-4}{m}\frac{I_k(\tau\xi)}{\tau\xi}+I_k'(\tau\xi)\right)\xi\alpha_k'(\tau)\right].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

W wyrażeniach tych $\alpha_k'(\tau)=d\alpha_k/d\tau$, $\bar{\beta}_k(\tau,\xi)=\beta_k(\tau)+(\alpha_k'/2\tau)+\xi^2\alpha_k(\tau)$ i $\gamma_k(\tau\xi)$ są to nieznane gęstości, które należy określić, $I_k(\tau\xi)$ zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rodzaju (zagadnienie wewnętrzne dla paraboloidy).

Równań algebraicznych dla wyznaczenia wspomnianych wyżej niewiadomych funkcji przy danych przemieszczeniach na powierzchni paraboloidy $\xi=\xi_0$ poszukujemy przy pomocy wzoru na obrót (2.9), a ich rozwiązanie nie nastręcza większych trudności.

Jeżeli są dane naprężenia na powierzchni paraboloidy, to rozwiązanie znajdujemy korzystając z rozkładu wektora przemieszczeń $\mathbf{F}_n$ na wektorowe funkcje własne (2.23) postaci

$$\frac{h}{2G}\mathbf{F}_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}[\hat{Z}_n^{(k)}\mathbf{L}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)+\hat{R}_n^{(k)}(\tau,\xi_0)\mathbf{M}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)+ \\ +\hat{\Phi}_n^{(k)}(\tau,\xi_0)\mathbf{N}_\tau^{(k)}(\eta,\varphi)]\,\tau\,d\tau, \tag{2.25}$$

gdzie $h=\sqrt{\xi_0^2+\eta^2}$ jest wartością współczynnika Lamégo na powierzchni paraboloidy, a współczynniki przy wektorach własnych są równe

$$\hat{R}_n^{(k)}(\tau,\xi_0)=-\bar{\beta}_k(\tau,\xi_0)I_k''(\tau\xi_0)-\left[\frac{m-2}{m}I_k(\tau\xi_0)+\tau\xi_0 I_k'(\tau\xi_0)+\right.$$
$$\left.+k^2\left(\frac{I_k'(\tau\xi_0)}{\tau\xi_0}\right)'-I_k''(\tau\xi_0)\right]\frac{\alpha_k'(\tau)}{\tau}+k\gamma_k(\tau)\left(\frac{I_k(\tau\xi_0)}{\tau\xi_0}\right)',$$

$$\hat{\Phi}_n^{(k)}(\tau,\xi_0)=ik\bar{\beta}_k(\tau,\xi_0)\left(\frac{I_k(\tau\xi_0)}{\tau\xi_0}\right)'+ik\left[I_k''(\tau\xi_0)-\left(\frac{I_k(\tau\xi_0)}{\tau\xi_0}\right)'\right]\frac{\alpha_k'(\tau)}{\tau}+ \tag{2.26}$$
$$+i\left(\frac{1}{2}I_k(\tau\xi_0)-I_k''(\tau\xi_0)\right)\gamma_k(\tau),$$

$$\hat{Z}_n^{(k)}(\tau,\xi_0)=-\tau\bar{\beta}_k(\tau,\xi_0)I_k'(\tau\xi_0)-\left(2\frac{m-1}{m}I_k'(\tau\xi_0)+\tau\xi_0 I_k''(\tau\xi_0)\right)\alpha_k'(\tau)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{k}{\xi_0}\gamma_k(\tau)I_k(\tau\xi_0).$$

Wzór na wektorowy obrót Fouriera-Hankela (2.9) pozwala doprowadzić do końca rozwiązanie zadania w naprężeniach w sposób analogiczny do rozwiązania zadania w przemieszczeniach. Interesujący jest fakt, że pierwiastki wyznaczników układu równań algebraicznych pierwszego i drugiego problemu brzegowego dla paraboloidy obrotowej pokrywają się z pierwiastkami wyznaczników charakterystycznych jednorodnych równań dla zagadnienia kołowego cylindra, co pozwala nam określić znanymi metodami rozwiązanie dla ściętej paraboloidy.

Dla obszaru ograniczonego dwiema współogniskowymi paraboloidami (powłoka paraboloidalna) zamiast algebraicznych wzorów na funkcje niewiadome otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach.

2.8. *Rozciągnięta elipsoida obrotowa (wektorowy rozkład Lamégo)*

Współrzędne rozciągniętej elipsoidy ξ,η,φ wyrażają się wzorami

$$\begin{gathered} r=c\operatorname{sh}\xi\sin\eta,\quad z=c\operatorname{ch}\xi\cos\eta,\quad \varphi=\varphi,\\ 0\leqslant\xi<\infty,\quad 0\leqslant\eta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Przechodząc do wektorowych konstrukcji harmonicznych na powierzchni elipsoidy obrotowej zauważmy, że skalarnymi funkcjami własnymi w tym przypadku, tak jak i dla kuli, są sferyczne funkcje Laplace'a. Nasuwa to na myśl przypuszczenie, że wektorowe harmoniczne dla kuli i elipsoidy powinny się pokrywać, jeśli odnieść je do tej samej bazy współrzędnych. Za taką bazę wygodnie jest wybrać współrzędne cylindryczne, które charakteryzują się wektorami jednostkowymi osi $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ i $\mathbf{k}$.

Jeśli przetransformować rozwiązanie dla kuli (2.1) do bazy cylindrycznej, to zamiast wektorowych harmonicznych Lamégo (2.2) otrzymujemy następujące powierzchniowe funkcje wektorowe

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{L}}_n^{(k)}(\vartheta, \varphi) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_n^{(k)}(\cos\vartheta) e^{ik\varphi},\\
(2.28)\qquad &\hat{\mathbf{M}}_n^{(k)}(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{2}} + i\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_n^{(k-1)}(\cos\vartheta) e^{ik\varphi},\\
&\hat{\mathbf{N}}_n^{(k)}(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{2}} - i\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_n^{(k+1)}\cos\vartheta) e^{ik\varphi}.
\end{aligned}
$$

Zatem rozwiązanie ogólne dla wektora przemieszczeń w przypadku elipsoidy obrotowej powinno mieć postać

$$
(2.29)\qquad \mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n-1}^{n+1} [w_n^{(k)}(\xi)\hat{\mathbf{L}}_n^{(k)}(\eta, \varphi) + u_n^{(k)}(\xi)\hat{\mathbf{M}}_n^{(k)}(\eta, \varphi) + v_n^{(k)}(\xi)\hat{\mathbf{N}}_n^{(k)}(\eta, \varphi)].
$$

Po podstawieniu rozkładu (2.29) do równań (1.4) otrzymamy następujące wzory na funkcje o współrzędnej ξ:

$$
\begin{aligned}
&W_n^{(k)}(\xi) = (C_n^{(k)} - \mathrm{ch}^2\xi A_{n-1}^{(k)})\bar{P}_n^{(k)} - \left(\frac{3m-4}{m}\,\frac{\bar{P}_n^{(k)}(\mathrm{ch}\,\xi)}{2n+1} + \right.\\
&\qquad\left. + \sqrt{\frac{(n+1)^2-k^2}{(2n+1)(2n+3)}}\,\mathrm{ch}\,\xi \bar{P}_{n+1}^{(k)}(\mathrm{ch}\,\xi)\right)(A_{n+1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}),\\
(2.30)\qquad &\sqrt{2}\, u_n^{(k)}(\xi) = (C_n^{(k)} - \mathrm{ch}^2\xi A_n^{(k-1)})\bar{P}_n^{(k-1)}(\mathrm{ch}\,\xi) + B_n^{(k)}\bar{P}_n^{(k-1)}(\mathrm{ch}\,\xi) -\\
&\qquad - \sqrt{\frac{(n+1)^2-(k-1)^2}{(2n+1)(2n+3)}}(A_{n+1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k)})\,\mathrm{ch}\,\xi \bar{P}_{n+1}^{(k-1)}(\mathrm{ch}\,\xi),\\
&\sqrt{2}\, v_n^{(k)}(\xi) = (C_n^{(k)} - \mathrm{ch}^2\xi A_{n-1}^{(k)})\bar{P}_n^{(k+1)}(\mathrm{ch}\,\xi) - B_n^{(k)}\bar{P}_n^{(k+1)}(\mathrm{ch}\,\xi) -\\
&\qquad - \sqrt{\frac{(n+1)^2-(k+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}}(A_{n+1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k)})\bar{P}_{n+1}^{(k+1)}(\mathrm{ch}\,\xi),
\end{aligned}
$$

gdzie $\bar{P}_n^{(k)}(\mathrm{ch}\,\xi)$ są unormowanymi wielomianami Legendre'a drugiego rodzaju, a $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$ i $C_n^{(k)}$ — stałymi całkowania.

Równania algebraiczne dla określenia stałych całkowania wyprowadzone zostały przy wykorzystaniu wzoru na obrót

$$
\begin{aligned}
(2.31)\qquad &\mathbf{e}_r(u_n^{(k)}(\xi) + v_n^{(k)}(\xi)) + i\mathbf{e}_\varphi(v_n^{(k)}(\xi) - u_n^{(k)}(\xi)) + \mathbf{k}w_n^{(k)}(\xi) =\\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi\,[u_z\hat{\mathbf{L}}_n^{*(k)}(\eta, \varphi) + (u_r - iu_\varphi)\hat{\mathbf{M}}_n^{*(k)}(\eta, \varphi) + (u_r + iu_\varphi)\hat{\mathbf{N}}_n^{*(k)}(\eta, \varphi)]\sin\eta\, d\eta.
\end{aligned}
$$

Jeśli wprowadzić nowe zmienne całkowania

$$
(2.32)\qquad \bar{C}_n^{(k)} = C_n^{(k)} - \mathrm{ch}^2\xi_0 A_{n-1}^{(k)},\qquad \bar{B}_n^{(k)} = B_n^{(k)},\qquad \bar{A}_n^{(k)} = A_{n+1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k)},
$$

to otrzymane dla nich równania algebraiczne daje się rozwiązać oddzielnie dla dowolnych ustalonych wartości n i k. Taka sama sytuacja zachodzi dla zagadnień w naprężeniach. Natomiast w przypadku wydrążonej elipsoidy rozwiązanie podstawowych problemów brzegowych sprowadza się do nieskończonego układu równań algebraicznych specjalnej postaci. Układ ten po dokonaniu przekształceń asymptotycznych redukuje się do skończonego układu równań algebraicznych z odpowiadającą jego rzędowi liczbą niewiadomych.

2.9. *Klin* (*pierwsze zagadnienie brzegowe*)

Ścisłe rozwiązanie drugiego problemu brzegowego dla przestrzennego klina otrzymano w pracy [16] korzystając z przekształcenia całkowego Kontorowicza-Lebiediewa. Oczywiście rozwiązanie pierwszego problemu brzegowego dla klina (w naprężeniach) również opierało się na wzorach przekształcenia całkowego Kontorowicza-Lebiediewa.

W wyniku przeprowadzonej analizy wykazano, że ostateczne rozwiązanie problemu z danymi naprężeniami na krawędziach klina $\varphi = \pm\varphi_0$ sprowadza się do równania funkcyjnego

$$\alpha(\mu)\,\omega(\mu-2)+\gamma(\mu)\,\omega(\mu)+\beta(\mu)\,\omega(\mu+2)=f(\mu)\,, \tag{2.33}$$

gdzie $\omega(\mu)$ jest pozostającą do określenia funkcją holomorficzną w paśmie $|R_e\,\mu|\leqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\alpha(\mu) &= \frac{m}{2(m-2)}\,[(\mu-2)\operatorname{ctg}\mu\varphi_0-\mu\operatorname{ctg}(\mu-2)\,\varphi_0]\,,\\
\beta(\mu) &= \frac{m}{2(m-2)}\,[\mu\operatorname{ctg}(\mu+2)\,\varphi_0-(\mu+2)\operatorname{ctg}\mu\varphi_0]\,,\\
\gamma(\mu) &= -\left[\alpha(\mu)+\beta(\mu)+4\operatorname{ctg}\mu\varphi_0\,\frac{\sin^2 z\varphi_0}{\cos z\mu\varphi_0-\cos 4\varphi_0}\right],
\end{aligned} \tag{2.34}$$

oraz gdzie $f(\mu)$ jest znaną funkcją zależną od obciążeń.

W równaniu (2.33) funkcja $\omega(\mu)$ jest funkcją parzystą argumentu μ, a wszystkie pozostałe funkcje są nieparzyste względem μ.

Równanie funkcjonalne (2.33) łatwo przekształca się do równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju. Jego rozwiązanie można sprowadzić również do uogólnionego (wg I. N. WEKUYD'A) problemu brzegowego Hilberta.

3. Rozwiązanie zagadnień brzegowych teorii sprężystości dla ciał o skończonych wymiarach

Dotychczas rozpatrywaliśmy zagadnienia brzegowe dla ciał ograniczonych powierzchniami należącymi do tej samej rodziny powierzchni trójortogonalnego układu współrzędnych. Rozwiązania tych zagadnień są jednocześnie punktem wyjścia do konstrukcji rozwiązania dla bardziej złożonych zagadnień równowagi ciał ograniczonych różnymi przecinającymi się powierzchniami, dla tzw. ciał o skończonych wymiarach.

Wyrażenie wektora przemieszczenia (naprężenia) na powierzchni ciała sprężystego przez wektorowe funkcje własne zagadnienia brzegowego pozwoliło w p. 2 nie tylko efektywnie i ogólnie rozwiązać problem zagadnienia brzegowego, lecz również znacznie uprościło metody określenia zawartej w rozwiązaniu ogólnym dowolności odnośnie do danych warunków brzegowych (wzory na obrót). Co się tyczy zagadnień brzegowych dla ciał o skończonych wymiarach, to pojawiające się tu przy spełnieniu warunków brzegowych trudności są dalekie od trywialnych i wymagają oddzielnego rozpatrzenia.

W chwili obecnej do rozwiązania tej klasy zagadnień brzegowych teorii sprężystości najczęściej wykorzystuje się dwie metody. Pierwsza z nich, która w pracach A. I. Łuriego otrzymała nazwę metody jednorodnych rozwiązań, wywodzi swój początek od prac P. A. Sziffa i W. A. Stiekłowa. Najpełniejszy pogląd o charakterze tej metody i otrzymanych za jej pomocą rezultatach można znaleźć w przeglądowej pracy I. I. Worowicza [17].

Druga metoda do badania zagadnień brzegowych dla ciał o skończonych wymiarach opiera się na idei przedstawionej przez Lamégo w jego wykładach na temat teorii sprężystości [18]. W pracy swej Lamé rozważa możliwość otrzymania rozwiązania ścisłego pierwszego problemu brzegowego dla sprężystego prostopadłościanu. Rozwiązanie ogólne problemu, tzn. rozwiązanie odznaczające się dostateczną dowolnością funkcji dla spełnienia warunków brzegowych na całej powierzchni prostopadłościanu, Lamé buduje w postaci superpozycji trzech rozwiązań dla periodycznie zamocowanej warstwy.

Spełnienie warunków brzegowych na powierzchni prostopadłościanu doprowadziło do konieczności rozwiązywania nieskończonego układu liniowych równań algebraicznych na stałe całkowania występujące w rozwiązaniu ogólnym. Lamé nie zajmował się analizą otrzymanego układu, a tym bardziej jego rozwiązaniem liczbowym. Otrzymany rezultat dał mu podstawę do scharakteryzowania problemu teorii sprężystości dla prostopadłościanu w następujący sposób: «Jest to swego rodzaju zagadka zasługująca na ćwiczenia we wnikliwości analityków tak, jak słynny problem trzech ciał w mechanice nieba».

W r. 1890 Mathieu [19] wykorzystując metodę Lamégo rozważał zagadnienie teorii sprężystości dla prostokątnej płyty. Praca Mathieu charakteryzuje się tym, że zawiera próbę otrzymania liczbowych charakterystyk stanu naprężenia na podstawie rozwiązania nieskończonych układów.

Do chwili obecnej metoda Lamégo miała szerokie zastosowanie przy rozpatrywaniu zagadnień teorii sprężystości dla ciał o skończonych wymiarach. Rozważymy tu szereg zagadnień tej klasy w ramach metody Lamégo, dających pojęcie o charakterze występujących trudności i o sposobach ich pokonywania.

Idea Lamégo daje w efekcie możliwość rozwiązania tylko pierwszego problemu pojawiającego się przy rozpatrywaniu problemu brzegowego dla ciała sprężystego, mianowicie problemu formalnej konstrukcji ogólnego rozwiązania problemu brzegowego. Rozważać będziemy teraz problem brzegowy teorii sprężystości dla ciała, którego powierzchnia S jest utworzona przez części powierzchni $\alpha_j=\text{const}$. Założenie to naturalnie ogranicza krąg rozpatrywanych zagadnień do tych, które posiadają efektywne rozwiązanie w ramach metod przedstawionych w p. 2. Ogólne rozwiązanie problemu brzegowego dla skończonego ciała sprężystego konstruujemy w postaci sumy

$$\mathbf{u}=\sum_{k+1}^{N}\mathbf{u}_k, \tag{3.1}$$

gdzie N jest ogólną liczbą powierzchni $\alpha_j=\mathrm{const}$, tworzących powierzchnię S.

Wykorzystanie wzoru (3.1) dla wektora przemieszczeń sprężystych prowadzi do dosyć skomplikowanych związków w postaci nieskończonych układów równań algebraicznych i singularnych równań całkowych. Zatem problem znalezienia efektywnego algorytmu w celu otrzymania liczbowych charakterystyk rozważanych pól jest w bardzo ścisły sposób związany z rozwiązywaniem nieskończonych układów i równań całkowych.

Najprostsze (parzyste) związki omówionej wyżej postaci otrzymamy dla szeregu płaskich i osiowo-symetrycznych zagadnień teorii sprężystości. W zależności od geometrii obszaru i przyjętego sposobu przedłużenia warunków brzegowych na całkowitą powierzchnię ciała dochodzimy do jednego z następujących typów wzorów [20]:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} y_k+\alpha_n, \\ y_n &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} x_k+\beta_n; \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \int_0^{\infty} a_n(t)y(t)\,dt+\alpha_n, \\ y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)x_k+\beta(t); \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{\infty} a(t,s)y(s)\,ds+\alpha(t), \\ y(t) &= \int_0^{\infty} b(t,s)x(s)\,ds+\beta(t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Niewiadome w związkach (3.2)–(3.4) określają współczynniki nieskończonych szeregów i gęstości we wzorach całkowych, występujących w wyrażeniach na wielkości charakteryzujące naprężeniowo-odkształceniowy stan ciała sprężystego.

Co się tyczy równań (3.2)–(3.4), to łatwo można udowodnić ich regularność, tzn. zbudować rozwiązanie metodą kolejnych przybliżeń. Tym samym ogólna forma rozwiązania (3.1) przestaje mieć charakter czysto formalny. Jednakże problem znalezienia wiarygodnych ilościowych charakterystyk pól przemieszczeń i naprężeń wymaga pełnej analizy związków (3.2)–(3.4). Konieczność takich badań wynika chociażby z faktu, że niewiadome występujące np. w równaniu (3.2) są współczynnikami szeregów Fouriera i dla ich sumowalności konieczna jest znajomość charakteru zmniejszania się współczynników ze wzrostem wskaźnika, tzn. znajomość asymptotycznych własności niewiadomych funkcji występujących w (3.2)–(3.4).

W tym kierunku interesujące rezultaty otrzymał B. M. Kojałowicz [21] badający przypadek równań (3.2). Jednym z ważniejszych jego wyników jest prawo asymptotycznych wyrażeń, ustalające warunki, przy których niewiadome w układzie (3.2) posiadają następujące własności:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a_0 \neq 0 \,. \tag{3.5}$$

Rezultaty B. M. Kojałowicza łatwo można uogólnić na wzory (3.3) i (3.4), zakładając ciągłość funkcji, które ustalamy na powierzchni ciała dla wektora przemieszczeń lub naprężeń.

Przy rozwiązywaniu zagadnień sprężystości opisaną wyżej metodą ważną okolicznością jest to, że prawo asymptotycznych wyrażeń okazało się poprawne dla wzorów (3.2)–(3.4). Fakt ten pozwala sformułować szereg ważnych uwag o możliwościach zbudowania rozwiązań efektywnych w ramach danej metody. Przede wszystkim prawdziwość związków (3.5) i analogicznych do nich równań (3.3)–(3.4) wskazuje na znaczne pogorszenie zbieżności szeregów i całek na powierzchni ciała sprężystego w porównaniu ze zbieżnością, jakiej należałoby oczekiwać wychodząc z różniczkowych własności funkcji, występujących w warunkach brzegowych. I tak na przykład przy obliczaniu naprężeń obwodowych w środku przekroju poprzecznego krótkiego cylindra (problem sprowadza się do układu (3.2)) należy sumować szereg, którego zbieżność jest taka sama, jak dla szeregu o wyrazie ogólnym $(-1)^n/\sqrt{n}$. Zatem dla obliczenia naprężeń z dokładnością do 1% należy rozpatrywać skończony układ odpowiadający (3.2) z dziesiątkami tysięcy niewiadomych, co powoduje, że problem staje się nierozwiązalny nawet za pomocą współczesnej techniki obliczeniowej.

Dążenie niewiadomych w równaniach (3.2)–(3.4) do wartości stałej ze wzrostem wskaźnika lub argumentu sprawia, że wyrażenia dla przemieszczeń (naprężeń) dla każdej składowej w rozwiązaniu ogólnym (3.1) mają osobliwość przy podchodzeniu do narożnych punktów obszaru. Jednakże w związku z pokrywaniem się wartości nieznanych funkcji na brzegu obszaru osobliwości te wzajemnie się likwidują i naprężenia (przemieszczenia) mają w punktach narożnych dla obydwu podstawowych problemów brzegowych w pełni określone skończone wartości.

Należy zauważyć, że po określeniu zachowania się niewiadomych w układach równań (3.2)–(3.4) pojawia się możliwość znacznego ulepszenia metody redukcji. I tak na przykład przyjmując $x_n = x_N (n \geqslant N)$ i $y_m = y_M (m \geqslant M)$ dla dostatecznie dużych N i M, po rozwiązaniu skończonego układu równań możemy znaleźć przybliżoną wartość wszystkich niewiadomych w (3.2). Wielkości N i M należy tak dobierać, by warunki brzegowe spełnione były z żądaną dokładnością. Jak wykazuje doświadczenie obliczeniowe, niewiadome w (3.2)–(3.4) dostatecznie szybko przyjmują wartości asymptotyczne i przedstawiona wyżej metoda jest dostatecznie efektywna [20, 22 i 23].

Otrzymane przy rozważaniu równań (3.2)–(3.4) rezultaty posłużyły za podstawę do rozwiązania innych zagadnień przestrzennej teorii sprężystości, prowadzących do bardziej skomplikowanych związków niż równania (3.2)–(3.4). Do nich zaliczyć można zagadnienia dla wydrążonego krótkiego cylindra, ściętego stożka i otwartej powłoki kulistej, zagadnienia osiowo-niesymetrycznej deformacji cylindra i warstwy z cylindrycznym wydrążeniem.

Możliwość rozwiązania do końca zagadnienia o osiowo-niesymetrycznej deformacji warstwy sprężystej pozwala otrzymać ilościowe oszacowanie błędu dla klasycznej teorii płyt przy analizie koncentracji naprężeń [22]. Oszacowania te wykazały, że bez względu na asymptotyczną niezgodność teorii ścisłej i przybliżonej granice stosowalności teorii przybliżonej są bardzo szerokie.

Rezultaty rozwiązań konkretnych zadań dla ciał sprężystych o skończonych wymiarach w kartezjańskim, cylindrycznym i sferycznym układzie współrzędnych przedstawione zostały w cytowanych wyżej pracach jak również w publikacjach [23–26].

4. Sprzężone elektrosprężyste drgania ciał piezoceramicznych

Praktyczne wykorzystanie piezoceramiki wiąże się z możliwością posługiwania się elementami piezoceramicznymi do elektromechanicznego przekształcania energii. Na tej własności piezoceramicznych elementów opierają się różne techniczne urządzenia, które znajdują szerokie zastosowanie w hydroakustyce, w technice pomiarowej, w filtrach częstotliwości i podziału kanałów łączności, w falowodowych liniach opóźnienia sygnałów na falach z dyspersją i bez dyspersji, w urządzeniach do ultradźwiękowego oczyszczania, defektoskopii, sterowania, obróbki, spawania, spajania itp.

Zabezpieczenie niezawodności pracy takich urządzeń związane jest z koniecznością badania pola elektrycznego i pola przemieszczeń mechanicznych. Mechaniczna strona zjawiska odgrywa tu nie bagatelną rolę i np. w problemach konstrukcji hydroakustycznych wypromienników dużej mocy dynamiczna (cykliczna) wytrzymałość jest czynnikiem decydującym o wymiarach konstrukcji.

Zlinearyzowane równanie stanu dla uprzednio spolaryzowanej ceramiki (piezoceramiki) otrzymał U. Mezon [27 i 28] wychodząc z nieliniowej teorii efektu elektrostrykcyjnego. Po wykorzystaniu teorii Mezona równania sprzężonych elektrosprężystych drgań piezoceramicznej warstwy (uprzednio spolaryzowanej względem grubości) we współrzędnych cylindrycznych mają postać

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{c_{22}^E}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{c_{22}^E}{r^2}u_r+\frac{c_{22}^E-c_{12}^E}{2r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\vartheta^2}+c_{44}^E\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{c_{22}^E+c_{12}^E}{2r}\frac{\partial^2 u\vartheta}{\partial r\,\partial\vartheta}+\\
&\quad+\frac{c_{12}^E-3c_{22}^E}{2r^2}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}+(c_{12}^E+c_{44}^E)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\,\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}+(e_{12}+e_{15})\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z},\\
&\frac{c_{22}^E}{r^2}\frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial\vartheta^2}+\frac{c_{12}^E-c_{22}^E}{2r^2}u_\vartheta+\frac{c_{22}^E-c_{12}^E}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r}\right)+\frac{3c_{22}^E-c_{22}^E}{2r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta}+\\
&\quad+\frac{c_{22}^E+c_{12}^E}{2r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\,\partial\vartheta}+c_{44}^E\frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial z^2}+\frac{c_{12}^E+c_{44}^E}{r}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\vartheta\,\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial t^2}+\frac{e_{12}+e_{15}}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta\,\partial z},
\end{aligned}
$$

(4.1) [c.d.]

$$c_{11}^E \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{c_{44}^E}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{c_{44}^E}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \vartheta^2}+(c_{44}^E+c_{12}^E)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\,\partial z}+$$
$$+\frac{c_{44}^E+c_{12}^E}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{c_{44}^E+c_{12}^E}{r}\frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial\vartheta\,\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}+e_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+$$
$$+e_{15}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{e_{15}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{e_{15}}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2},$$

$$\varepsilon_{11}^s\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\varepsilon_{22}^s\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}\right]=-e_{11}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-$$
$$-\frac{e_{15}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)-\frac{e_{15}}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\vartheta^2}-(e_{12}+e_{15})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right)-$$
$$-\frac{e_{12}+e_{15}}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta\,\partial z},$$

u_r, u_ϑ, u_z i φ oznaczają tu odpowiednio składowe wektora przemieszczeń oraz potencjał elektrostatyczny, c_{11}^E, c_{22}^E, c_{12}^E i c_{44}^E są modułami sprężystości, e_{11}, e_{12} i e_{15} piezomodułami, a ε_{11}^s, ε_{22}^s stałymi dielektrycznej proporcjonalności ośrodka.

Ogólne rozwiązanie równań sprzężonych elektrosprężystych drgań warstwy (4.1) dla ustalonych w czasie drgań harmonicznych można otrzymać metodą wektorowych funkcji własnych przedstawioną w p. 2 niniejszej pracy.

Zgodnie z punktem 2.3 rozwiązanie ogólne dla wektora przemieszczeń należy przedstawić w postaci szeregu Fouriera-Henkela, a dla skalarnej funkcji φ posłużyć się rozłożeniem w szereg według funkcji $S_\lambda^{(k)}(\vartheta, r)$:

$$\mathbf{u}(r,\vartheta,z,t)=e^{i\omega t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}[w_k(\lambda,z)\mathbf{L}_\lambda^{(k)}(r,\vartheta)+$$
$$+u_k(\lambda,z)\mathbf{M}_\lambda^{(k)}(r,\vartheta)+v_k(\lambda,z)\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(r,\vartheta)]\,\lambda\,d\lambda, \tag{4.2}$$
$$\varphi(r,\vartheta,z,t)=e^{i\omega t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi_k(\lambda,z)S_\lambda^{(k)}(r,\vartheta)\,\lambda\,d\lambda.$$

Po podstawieniu wyrażeń (4.2) do równań drgań (4.1) otrzymujemy dla funkcji grubości $u_k(\lambda, z)$, $v_k(\lambda, z)$, $w_k(\lambda, z)$ i $\varphi_k(\lambda, z)$ układ czterech równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach, którego scałkowanie nie przedstawia szczególnych trudności. Powstałe przy tym dowolne funkcje całkowania określa się z danych warunków dla mechanicznej i elektrycznej składowej pola sprzężonego na krawędziach warstwy.

Warunki dla mechanicznej części problemu formułuje się w takiej samej formie jak dla problemu niesprzężonego. Dla elektrycznej części problemu najczęściej określamy z góry różnicę potencjałów na krawędziach warstwy (obszar wypromieniowania).

Przykłady obliczeń numerycznych dynamicznego stanu naprężenia i pola elektrycznego dla płaskich i cylindrycznych wypromienników podane są w pracach [29 i 30].

Literatura cytowana w tekście

1. А. Я. Александров, *Решение пространственных задач теории упругости для тел вращения при помощи аналитических и обобщенных аналитических функций*, Труды Новосибирского ин-та инженеров железнофорожного транспорта, вып. 96, 1970.
2. Г. Н. Положий, *Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного*, Изд-во Киевского университета, 1965.
3. А. И. Лурье, *Пространственные задачи теории упругости*, ГИТТЛ, 1955.
4. Б. Л. Абрамян, А. Я. Александров, *Осесимметричные задачи теории упругости*, Механика твердого тела, Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Изд-во ,,Наука", 1966.
5. Г. А. Гринберг, *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений*, Изд-во АН СССР, 1948.
6. Ф. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, ИЛ, М., **1**, 1958; **2**, 1960.
7. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, ИЛ, 1954.
8. Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд, *Сборник задач по математической физике*, ГИТТЛ, 1955.
9. G. Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Paris 1859.
10. Г. И. Петрашень, *Решение векторных предельных задач математической физики в случае шара*, ДАН СССР, **46**, 7, 1945.
11. Г. И. Петрашень, *Колебания изотропного упругого шара*, ДАН СССР, **47**, 3, 1945.
12. W. W. Hansen, *Transformation useful in certain antenna calculations*, J. Appl. Phys., **8**, 4, 1937.
13. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца*, Физматгиз, 1958.
14. А. Т. Улiтко, *Розв'язання деяких задач теорii пружностi методом власних вектор-функцiй*, Прикл. мех., **6**, 4, 1960.
15. А. Ф. Улитко, *Метод векторных собственных функций в пространственных задачах теории упругости*, Прикл. мех., **3**, 9, 1967.
16. Я. С. Уфлянд, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, Изд-во ,,Наука", Ленинград 1967.
17. И. И. Ворович, *Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек*, Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Механика твердого тела, Изд-во ,,Наука", 1966.
18. G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris 1866.
19. E. Mathie, *L'élasticite des corps solides*, Paris 1890.
20. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, *Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями*, Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып. 8, Изд-во ,,Наукова думка", Киев 1969.
21. Б. М. Коялович, *Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений*, Изв. физ.-матем. ин-та, **3**, 1931.
22. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, *Точное решение задачи Кирша*, Прикл. мех., **6**, 5, 1970.
23. В. Т. Гринченко, *Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины*, Прикл. мех., **3**, вып. 8, Киев 1967.
24. В. Т. Гринченко, А. Д. Коваленко, А. Ф. Улитко, *Анализ напряженного состояния жестко защемленной пластины на основе решения пространственной задачи теории упругости*, Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Изд-во ,,Наука", 1970.
25. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, *Точное решение задачи о распределении напряжений около кругового отверстия в упругом слое*, Прикл. мех., **4**, 10, 1968.
26. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, *Краевая задача термоупругости для прямоугольной пластины*, Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып. 5, ,,Наукова думка", Киев 1965.
27. У. Мэзон, *Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике*, ИЛ, 1952.

28. Д. А. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе, *Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях,* Физическая акустика, **1**, часть А, под ред. У. Мезона, Изд-во „Мир", 1966.
29. Г. А. Коломиец, А. Ф. Улитко, *Связанные электроупругие колебания пьезокерамических тел,* Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып. 8, Изд-во „Наукова думка", Киев 1968.
30. Г. А. Коломиец, А. Ф. Улитко, *Связанные электроупругие колебания толстостенных пьезокерамических цилиндров,* Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып. 9, Изд-во „Наукова думка", Киев 1970.

Резюме

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ (ВЕКТОРНЫХ) ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОУПРУГОСТИ И СВЯЗАННОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Цель работы состоит в распространении классического метода собственных функций на пространственные задачи теории упругости и связанные задачи электроупругих колебаний пьезокерамических тел.

Рассматриваются следующие задачи разложения на собственные вектор-функции: сфера, слой в декартовых координатах, слой в цилиндрических координатах, слой в параболических координатах, круговой цилиндр, круговой конус, параболоид вращения, вытянутый эллипсоид вращения, клин и граничные задачи для тел конечных размеров.

Summary

THE METHOD OF VECTOR EIGENFUNCTIONS IN THE PROBLEMS OF THERMO-ELASTICITY AND COUPLED ELECTRO-ELASTICITY

The aim of the paper consists in the application of the classical methods of eigenfunctions to the spatial problems of elasticity and the coupled problems of electro-elastic vibrations of piezoceramic bodies. The eigenfunction expansions have been presented in the following cases: a sphere, a layer in Cartesian and parabolic coordinates, a circular cylinder and a cone, a paraboloid oe revolution, an elongated paraboloid of revolution, a wedge, and the problems concerning finitf regions.

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 maja 1971 r.