ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 20, 1, 19–25, 1972, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

ZWIĄZKI FIZYCZNE MATERIAŁU SPRĘŻYSTEGO ODCINKAMI LINIOWEGO

ANNA SZWEYCER i ZBIGNIEW WESOŁOWSKI (WARSZAWA)

Rozwiązanie zagadnień brzegowych nieliniowej teorii sprężystości jest możliwe jedynie w najprostszych przypadkach. Na ogół konieczne jest posłużenie się jedną z metod przybliżonych, jak np. metodą kolejnych przybliżeń, metodą małego parametru itp. Nasuwa się myśl, że metodę przybliżoną można również otrzymać zastępując krzywą naprężenie-odkształcenie przez linię łamaną. Na podstawie danych eksperymentalnych sposób taki był stosowany wielokrotnie w odniesieniu do materiałów posiadających inne stałe sprężystości przy rozciąganiu a inne przy ściskaniu.

W pracach [1 i 2] rozważono przypadek odcinkami liniowej funkcji $\tau_{ij}=\tau_{ij}(\varepsilon_{rs})$. Ponieważ w niektórych przypadkach może okazać się dogodniejsze oparcie obliczeń na funkcji $\varepsilon_{ij}(\tau_{rs})$ zanalizujemy tutaj ten przypadek. Dalej pokażemy, że obie metody są w zasadzie równoważne.

1. Związki podstawowe

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}&=(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}\, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}),\\ \boldsymbol{\tau}&=(\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12}),\end{aligned}\tag{1.1}$$

gdzie ε_{ij} oraz τ_{ij} są współrzędnymi tensora odkształcenia oraz tensora naprężenia w kartezjańskim układzie współrzędnych. Jeśli współrzędne wektora przemieszczenia są u_i, to $\varepsilon_{ij}=u_{(i,j)}$.

Rozważmy sześciowymiarową przestrzeń wektorową V, której elementami są $\boldsymbol{\epsilon}$ oraz $\boldsymbol{\tau}$. Podzielmy V na pewną liczbę rozłącznych obszarów $W_1, W_2, ..., W_K$:

$$W_K \subset V, \qquad W_K \cap W_L = 0. \tag{1.2}$$

Jeśli dwa obszary W_K i W_L mają wspólny brzeg, to oznaczymy go przez P_{KL}. Zakładamy, że

$$\boldsymbol{\epsilon}=\overset{K}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{K}{\boldsymbol{\psi}} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{\tau}\in W_K, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}=\overset{L}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{L}{\boldsymbol{\psi}} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{\tau}\in W_L, \tag{1.4}$$

gdzie $\overset{K}{\mathbf{B}}, \overset{L}{\mathbf{B}}$ są afinorami sprężystości, a $\overset{K}{\boldsymbol{\psi}}, \overset{L}{\boldsymbol{\psi}}$ pewnymi stałymi wektorami. Na ogół $\overset{K}{\mathbf{B}}\neq \overset{L}{\mathbf{B}}$, $\overset{K}{\boldsymbol{\psi}}\neq\overset{L}{\boldsymbol{\psi}}$. Oczywiście, jeśli $\boldsymbol{\tau}=0\in W_M$, to $\overset{M}{\boldsymbol{\psi}}=0$, gdyż $\boldsymbol{\tau}=0$ musi odpowiadać $\boldsymbol{\epsilon}=0$.

Z założenia $\boldsymbol{\epsilon}$ jest ciągłą funkcją $\boldsymbol{\tau}$. Jeśli W_L graniczy z W_K, to mamy

$$\overset{KL}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{KL}{\boldsymbol{\psi}}=0, \tag{1.5}$$

gdzie

$$\overset{KL}{\mathbf{B}}=\overset{L}{\mathbf{B}}-\overset{K}{\mathbf{B}}, \quad \overset{KL}{\boldsymbol{\psi}}=\overset{L}{\boldsymbol{\psi}}-\overset{K}{\boldsymbol{\psi}}. \tag{1.6}$$

Związek (1.5) można traktować jak równanie powierzchni P_{KL}. Ponieważ $\overset{KL}{\mathbf{B}}$ i $\overset{KL}{\boldsymbol{\psi}}$ są stałymi, więc powierzchnia P_{KL} jest płaszczyzną. Oczywiście nie zmniejszając ogólności można tak ponumerować obszary W_K, że

$$\begin{aligned} &\overset{KL}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{KL}{\boldsymbol{\psi}}<0 \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{\tau}\in W_K, \\ &\overset{KL}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{KL}{\boldsymbol{\psi}}>0 \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{\tau}\in W_L. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ograniczymy dalsze rozważania dla obszarów W_1, W_2 oraz ich brzegu P_{12}. Dla uproszczenia zapisu pomijać będziemy przy tym parę wskaźników *12*. Tak więc (1.5) przedstawiamy w postaci

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\psi}=0 \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{\tau}\in P. \tag{1.8}$$

W sposób oczywisty dalsze związki można odnieść do brzegów P_{23}, P_{34} itd.

Parametryczne równanie powierzchni P jest następujące:

$$\boldsymbol{\tau}=\overset{1}{a}\overset{1}{\boldsymbol{\beta}}+\ldots+\overset{N}{a}\overset{N}{\boldsymbol{\beta}}+\overset{0}{\boldsymbol{\beta}}, \tag{1.9}$$

gdzie $\overset{1}{a}, \ldots, \overset{N}{a}$ są dowolnymi parametrami, a $\overset{1}{\boldsymbol{\beta}}, \ldots, \overset{N}{\boldsymbol{\beta}}, \overset{0}{\boldsymbol{\beta}}$ liniowo niezależnymi wektorami spełniającymi równania

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}\overset{M}{\boldsymbol{\beta}}=0, \quad M=1,2,\ldots,N, \\ &\mathbf{B}\overset{0}{\boldsymbol{\beta}}+\boldsymbol{\psi}=0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ponieważ płaszczyzna P rozdziela dwa 6-cio wymiarowe obszary, więc musi to być płaszczyzna 5-cio wymiarowa ($N=5$):

$$\boldsymbol{\tau}=\overset{1}{a}\overset{1}{\boldsymbol{\beta}}+\ldots+\overset{5}{a}\overset{5}{\boldsymbol{\beta}}+\overset{0}{\boldsymbol{\beta}}. \tag{1.11}$$

Wektory, $\overset{M}{\boldsymbol{\beta}}$ $M=1,\ldots,5$ są liniowo niezależne i wyznaczają wektor $\boldsymbol{\nu}$ ortogonalny do nich

$$\overset{M}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\nu}=0. \tag{1.12}$$

Mnożąc równanie (1.9) przez $\boldsymbol{\nu}$ otrzymujemy równanie powierzchni P w nowej postaci

$$\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}-\overset{0}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\nu}=0. \tag{1.13}$$

Na to, aby równanie (1.8) było równaniem płaszczyzny 5-io wymiarowej potrzeba i wystarczy, aby rząd macierzy

$$(1.14)\qquad [\mathbf{B},\boldsymbol{\psi}]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12}\dots B_{16} & \psi_1 \\ B_{21} & B_{22}\dots B_{26} & \psi_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ B_{61} & B_{62}\dots B_{66} & \psi_6 \end{bmatrix}$$

był równy jedności. Wszystkie wyznaczniki stopnia większego niż 1 muszą być równe zeru. Warunek ten jest spełniony, gdy wszystkie wyznaczniki stopnia drugiego są równe zeru. Wyznaczmy $\mathbf{B}$ i $\boldsymbol{\psi}$ spełniające te warunki. Biorąc wyrazy przekątniowe mamy

$$(1.15)\qquad B_{\alpha\alpha}B_{\beta\beta}=B^2_{\alpha\beta},\qquad \alpha\neq\beta,\qquad B_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}\sqrt{B_{\alpha\alpha}B_{\beta\beta}},$$

gdzie $\eta_{\alpha\beta}$ są współczynnikami znaku równymi 1 lub -1. Ponieważ $B_{\alpha\beta}$ są rzeczywiste, więc $B_{\alpha\alpha}$ (nie sumować!) są jednakowego znaku. Wynika stąd $\eta_{\alpha\alpha}=-1$ (nie sumować!) lub $\eta_{\alpha\alpha}=-1$.

Rozważmy najpierw $\eta_{\alpha\alpha}=1$. Żądając by pozostałe wyznaczniki były równe zeru, otrzymujemy warunek

$$(1.15)\qquad \eta_{\alpha\beta}\eta_{\delta\gamma}-\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\delta\beta}=0,$$

skąd ostatecznie wynika

$$(1.16)\qquad \eta_{\alpha\beta}=\eta_\alpha\eta_\beta.$$

Taki sam rezultat ze znakiem minus po prawej stronie równości otrzymujemy dla $\eta_{\alpha\alpha}=-1$. Ostatecznie

$$(1.17)\qquad \mathbf{B}=p\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\delta},$$

gdzie p jest dowolnym pewnym parametrem, a $\boldsymbol{\delta}$ pewnym wektorem. Rozważając teraz wyznaczniki zawierające również $\boldsymbol{\psi}$ mamy

$$(1.18)\qquad \boldsymbol{\psi}=\omega\boldsymbol{\delta},$$

gdzie ω jest pewnym parametrem. Skoki stałych sprężystości $\overset{K}{\mathbf{B}}$ i wektorów $\overset{K}{\boldsymbol{\psi}}$ nie są więc dowolne, a spełniają (1.17) i (1.18). Tylko dla takich $\mathbf{B}$ i $\boldsymbol{\psi}$ odkształcenie $\boldsymbol{\epsilon}$ jest ciągłą funkcją naprężenia $\boldsymbol{\tau}$.

Równania (1.10) przyjmą postać

$$(1.19)\qquad p\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\delta}\overset{M}{\boldsymbol{\beta}}=0,\qquad p\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\delta}\overset{0}{\boldsymbol{\beta}}+\omega\boldsymbol{\delta}=0,$$

skąd wynika, że pięcioma niezależnymi wektorami $\overset{M}{\boldsymbol{\beta}}$, $M=1,2,\dots,5$, są

$$(1.20)\qquad \overset{1}{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}\delta_2\\-\delta_1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \overset{2}{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}\delta_3\\0\\-\delta_1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \overset{3}{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}\delta_4\\0\\0\\-\delta_1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \overset{4}{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}\delta_5\\0\\0\\0\\-\delta_1\\0\end{bmatrix},\quad \overset{5}{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}\delta_6\\0\\0\\0\\0\\-\delta_1\end{bmatrix}.$$

Wektor $\boldsymbol{\delta}$ jest ortogonalny do każdego $\overset{M}{\boldsymbol{\beta}}$. Można więc przyjąć $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\nu}$, a wektory $\overset{M}{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\delta}$ rozpinają przestrzeń V. Rozłóżmy $\overset{0}{\boldsymbol{\beta}}$ w tej bazie:

$$\overset{0}{\boldsymbol{\beta}}=\overset{1}{c}\overset{1}{\boldsymbol{\beta}}+\ldots+\overset{5}{c}\overset{5}{\boldsymbol{\beta}}+m\boldsymbol{\delta}. \tag{1.21}$$

Łatwo sprawdzić, że można wziąć $c_1=c_2=\ldots=c\ =0$, co zgodnie z $(1.19)_2$ pociąga za sobą

$$\overset{0}{\boldsymbol{\beta}}=m\boldsymbol{\delta}, \quad m=\frac{\omega}{p}(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta})^{-1}. \tag{1.22}$$

Ostatecznie równanie powierzchni P zgodnie z (1.9) jest następujące:

$$g(\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\delta}+\frac{\omega}{p}=0, \tag{1.23}$$

przy czym $g(\boldsymbol{\tau})<0$ dla $\boldsymbol{\tau}\in W$, $g(\boldsymbol{\tau})>0$ dla $\boldsymbol{\tau}\in W_2$.

Podane rozważania prowadzą do następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}&=\overset{1}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{1}{\boldsymbol{\psi}} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\delta}+\frac{\omega}{p}<0,\\ \boldsymbol{\epsilon}&=(\overset{1}{\mathbf{B}}+p\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\tau}+\overset{1}{\boldsymbol{\psi}}+\omega\boldsymbol{\delta} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\delta}+\frac{\omega}{p}>0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

2. Materiał izotropowy

Dla materiału izotropowego mamy

$$\varepsilon_{ij}=\left(-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\delta_{rs}+\frac{1}{2\mu}\delta_{ir}\delta_{js}\right)\tau_{rs}. \tag{2.1}$$

Związek ten jest spełniony w obszarze W_0, do którego należy $\boldsymbol{\tau}=0$. Ponieważ symetria $\overset{1}{B}$ jest taka sama jak $\overset{0}{B}$, więc z (1.24) wynika, że dla materiału izotropowego δ_{ij} jest deltą Kroneckera. W obszarze W_1 przylegającym do W_0 mamy więc

$$\varepsilon_{ij}=\left(-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\delta_{rs}+\frac{1}{2\mu}\delta_{ir}\delta_{js}+p\delta_{ij}\delta_{rs}\right)\tau_{rs}+\omega\delta_{ij}. \tag{2.2}$$

Przechodząc do dalszych obszarów stwierdzamy, że wszędzie zależność pomiędzy naprężeniami a odkształceniami jest określona przez (2.2). Ostatecznie mamy

$$\varepsilon_{ij}=(L+\overset{1}{p})\tau_{rr}\delta_{ij}+2N\tau_{ij}+\omega_1\delta_{ij} \quad \text{dla} \quad \tau_{rr}+\frac{\omega}{p}<0 \tag{2.3}$$

oraz

$$\varepsilon_{ij}=(L+\overset{1}{p}+\overset{2}{p})\tau_{rr}\delta_{ij}+2N\tau_{ij}+(\omega_1+\omega_2)\delta_{ij} \quad \text{dla} \quad \tau_{rr}+\frac{\omega}{p}>0, \tag{2.4}$$

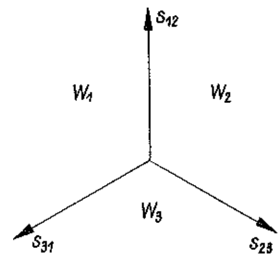
gdzie

$$L=-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}, \quad N=\frac{1}{2\mu}.$$

3. Podział V na trzy obszary

Załóżmy, że V podzielone zostaje na trzy obszary W_1, W_2 i W_3. Jeśli granice S_{12} i S_{23} są równoległe, to istnieje możliwość takiego podziału. Należy sprawdzić, czy istnieje możliwość innego podziału. Zakładamy, że obszary graniczą każdy z każdym. Oddzielone są one powierzchniami S_{12}, S_{23} i S_{31}. Wprowadzamy oznaczenia analogiczne do oznaczeń poprzedniego punktu:

$$\overset{1}{\mathbf{B}}=\overset{3}{\mathbf{B}}+\overset{31}{\mathbf{B}},\quad \overset{1}{\boldsymbol{\psi}}=\overset{3}{\boldsymbol{\psi}}+\overset{31}{\boldsymbol{\psi}},$$
$$(3.1)\qquad \overset{2}{\mathbf{B}}=\overset{1}{\mathbf{B}}+\overset{12}{\mathbf{B}},\quad \overset{2}{\boldsymbol{\psi}}=\overset{1}{\boldsymbol{\psi}}+\overset{12}{\boldsymbol{\psi}},$$
$$\overset{3}{\mathbf{B}}=\overset{2}{\mathbf{B}}+\overset{23}{\mathbf{B}},\quad \overset{3}{\boldsymbol{\psi}}=\overset{2}{\boldsymbol{\psi}}+\overset{23}{\boldsymbol{\psi}}.$$



Rys. 1

Rząd każdej z macierzy $\overset{ij}{B}$ jest równy 1. Dodając stronami równości (3.1) otrzymujemy

$$(3.2)\qquad \overset{12}{\mathbf{B}}+\overset{23}{\mathbf{B}}+\overset{31}{\mathbf{B}}=0,\quad \overset{12}{\boldsymbol{\psi}}+\overset{23}{\boldsymbol{\psi}}+\overset{31}{\boldsymbol{\psi}}=0.$$

Suma dwóch symetrycznych macierzy rzędu 1 jest rzędu 1 wtedy i tylko wtedy, gdy te macierze są podobne, tj. kiedy

$$(3.3)\qquad \overset{23}{\mathbf{B}}=p_1\overset{12}{\mathbf{B}},\quad \overset{23}{\boldsymbol{\psi}}=p_1\overset{12}{\boldsymbol{\psi}},\quad \overset{31}{\mathbf{B}}=p_2\overset{12}{\mathbf{B}},\quad \overset{31}{\boldsymbol{\psi}}=p_2\overset{12}{\boldsymbol{\psi}},$$

gdzie p_1 i p_2 są parametrami. Normalna do powierzchni S_{ij} ma więc postać

$$(3.4)\qquad \overset{ij}{\boldsymbol{\nu}}=(\overset{j}{\mathbf{B}}-\overset{i}{\mathbf{B}})\boldsymbol{\tau}+(\overset{j}{\boldsymbol{\psi}}-\overset{i}{\boldsymbol{\psi}}).$$

Korzystając teraz z (3.3) mamy

$$(3.5)\qquad \overset{12}{\boldsymbol{\nu}}=\overset{12}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{12}{\boldsymbol{\psi}},\quad \overset{23}{\boldsymbol{\nu}}=\overset{23}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{23}{\boldsymbol{\psi}}=p_1(\overset{12}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{12}{\boldsymbol{\psi}}),\quad \overset{31}{\boldsymbol{\nu}}=\overset{31}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{31}{\boldsymbol{\psi}}=p_2(\overset{12}{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}+\overset{12}{\boldsymbol{\psi}}),$$

a więc $\overset{12}{\boldsymbol{\nu}}\|\overset{23}{\boldsymbol{\nu}}\|\overset{31}{\boldsymbol{\nu}}$. Powierzchnie S_{12}, S_{23} i S_{31} są więc równoległe, czyli obszary W_1, W_2 i W_3 nie mogą graniczyć każdy z każdym.

Otrzymane równania można sprawdzić metodą lustrzanego odbicia do równań otrzymanych w [1]. W szczególności równanie powierzchni rozgraniczających poszczególne obszary jest dla meteriału izotropowego takie samo. Dla innych materiałów różnica między metodą zastosowania niniejszej pracy a metodą użytą w [1] opiera się na wprowadzeniu innych stałych materiałowych w związkach $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\epsilon})$ i $\boldsymbol{\epsilon}=\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\tau})$.

4. Przykład dla materiału izotropowego

Załóżmy, że istnieją trzy obszary W_1, W_2, W_3 rozgraniczone przez P_{12} i P_{23}. Zgodnie z p. 3 $P_{12}\|P_{23}$.

Niech P_{12} przechodzi przez $\boldsymbol{\tau}=(0, ..., 0)$, a P_{23} przechodzi przez $\boldsymbol{\tau}=(q, 0, ..., 0)$, gdzie $q>0$. Równania pięciowymiarowych płaszczyzn P_{12} i P_{23} zgodnie z (1.23) przyjmą postać następującą:

$$g(\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\delta}=0, \quad g(\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\delta}-q=0, \tag{4.1}$$

a więc

$$\boldsymbol{\tau}\in W_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1+\boldsymbol{\tau}_2+\boldsymbol{\tau}_3<0, \quad \boldsymbol{\tau}\in W_2 \Leftrightarrow 0<\boldsymbol{\tau}_1+\boldsymbol{\tau}_2+\boldsymbol{\tau}_3<q. \quad \boldsymbol{\tau}\in W_3 \Leftrightarrow q<\tau_1+\tau_2+\tau_3. \tag{4.2}$$

Niech stałe sprężystości przyjmą następujące wielkości:

$$L_1=8K, \quad N_1=K, \quad L_2=2K, \quad N_2=K, \quad L_3=K, \quad N_3=K. \tag{4.3}$$

Ze względu na (2.3) i (2.4) N jest we wszystkich obszarach takie samo. W obszarach W_1 i W_2 zachodzi $\overset{1}{\boldsymbol{\psi}}=\overset{2}{\boldsymbol{\psi}}$. Stąd wynika, że $\omega_1=\omega_2=0$. Porównując (4.1) i (1.23) znajdziemy

$$\omega_3=-qp_3=-q(L_3-L_2), \tag{4.4}$$

co zgodnie z (4.3) prowadzi do równania

$$\omega_3=qk. \tag{4.5}$$

Ostatecznie więc znajdziemy

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{ij}=8k\tau_{rr}\delta_{ij}+2k\tau_{ij} && \text{dla} \quad \tau_{rr}<0,\\
&\varepsilon_{ij}=2k\tau_{rr}\delta_{ij}+2k\tau_{ij} && \text{dla} \quad 0<\tau_{rr}<q,\\
&\varepsilon_{ij}=k\tau_{rr}\delta_{ij}+2k\tau_{ij}+kq\delta_{ij} && \text{dla} \quad q<\tau_{rr}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Rozważmy z kolei proste rozciąganie, przy którym $\tau_{22}=\tau_{23}=0$ i $\tau_{11}=\sigma$. Zgodnie z (4.6) otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=10K\sigma, && \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=8K\sigma && \text{dla} \quad \sigma<0,\\
&\varepsilon_{11}=4K\sigma, && \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=2K\sigma && \text{dla} \quad 0<\sigma<q,\\
&\varepsilon_{11}=(3\sigma+q)K, && \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=(\sigma+q)K && \text{dla} \quad q<\sigma.
\end{aligned}$$

Literatura cytowana w tekście

1. Z. Wesołowski, *Piecewise linear elastic material*, Arch. Mech. Stos., **22**, 3, 1970.
2. Z. Wesołowski, *Elastic material with different elastic constants in two regions of variability of deformation*, Arch. Mech. Stos., **21**, 4, 1969.

Резюме

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО УПРУГОВО МАТЕРИАЛА

Шести-размерное пространство напряжений поделено на некоторое число рассоединенных областей. В каждой области существует другая зависимость деформация-напряжение. Непрерывность этой зависимости является причиной того, что пределы областей являются пяти-размерными гипер-плоскостями. Определяются уравнения этих плоскостей и допускаются скачки постоянных упругости для общей симметрии и для изотропного тела. Показано, что три области не могут граничит каждая с каждой. Полученные уравнения можно, методом зеркального отражения, свести к уравнениям, опубликованным раньше одним из авторов.

Summary

PHYSICAL RELATIONS OF AN ELASTIC PIECEWISE LINEAR MATERIAL

The six-dimensional space of stresses is divided into a certain number of disjunct regions. Each of the regions is characterized by a different linear stress-strain relation. The continuity of these relations requires the boundaries of the regions to be five-dimensional hyperplanes. Equations of these hyperplanes are found as also the admissible jumps of elastic constants in the case of a general symmetry and for an isotropic body. It is shown that no three region can be conterminous with each other. The resulting equations may be derived by means of a mirror image from the equations which have been previously published by one of the authors.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1971 r.