

## DRGANIA PARAMETRYCZNE JEDNOSTOPNIOWEJ PRZEKŁADNI ZĘBATEJ

RYSZARD GR Y B O Ś (GLIWICE)

### 1. WSTĘP

Dynamika przekładni zębatych rozpatrywana teoretycznie ma dziś już dość obszerną literaturę [1 - 28]. Oprócz tego istnieje wiele prac ujmujących to zagadnienie od strony eksperymentalno-pomiarowej. Rozważania teoretyczne są z konieczności przybliżone, w związku z czym przy studiowaniu literatury przedmiotu rzuca się w oczy duża różnorodność podejścia do zagadnienia.

Prace dawniejsze cechuje indywidualne traktowanie zęba jako belki — wspornika, zamocowanej sztywno w nieodkształcalnej tarczy [6, 7, 8, 20 i 24 - 27]. Analizując taką belkę przy obciążeniu zmiennym w czasie i o zmiennym punkcie przyłożenia, można określić maksymalne naprężenia dynamiczne u podstawy zęba. Dokładność takich obliczeń uwarunkowana jest dokładnością, z jaką określono przebieg czasowy siły międzyzębnej  $P(t)$ . Dlatego w wielu pracach obciążenie to traktowano jako impulsowe, dzięki czemu omija się konieczność określenia postaci funkcji  $P(t)$ . Pozostaje jednak nadal otwarty problem określenia dokładnej wartości impulsu uderzenia.

W drugim etapie rozwoju dynamiki przekładni zaniechano indywidualnego traktowania zęba obciążanego udarowo na rzecz ujęcia kompleksowego, tzn. badania drgań całej przekładni. Jest bowiem rzeczą oczywistą, iż czasowy przebieg siły międzyzębnej zależy nie tylko od wielkości geometrycznych samego zęba, lecz od sprężystych i bezwładnościowych cech całego układu dynamicznego, a przynajmniej pary współpracujących kół i związanych z nimi wałów. Dlatego w nowszych pracach [3 - 5, 12 - 16 i 19] podjęto próby określenia tzw. nadwyżki dynamicznej obciążenia zęba przez analizę drgań zespołu współpracujących ze sobą elementów sztywnych oraz sprężystych.

Należy wyraźnie podkreślić, że zmiany siły międzyzębnej, a więc obciążenie dynamiczne zęba, zależą od geometrycznych, sprężystych i bezwładnościowych cech nie tylko samej pary współpracujących kół, lecz całego układu drgającego, na który składa się przekładnia, wirnik silnika oraz mechanizm napędzany. Ten punkt widzenia reprezentowany jest także w pracy niniejszej.

Projektant musi zagwarantować żadaną trwałość przekładni. W tym celu niezbędne jest m.in., aby obroty nominalne przekładni różniły się dostatecznie od obrotów rezonansowych. Można to osiągnąć albo przez zmianę częstotliwości

zazębienia (w szczególności przez zmianę liczby obrotów), albo przez zmianę częstości własnych układu. Na widmo częstości własnych przekładni można wpływać przez zmianę sztywności (średnicy) wałów albo za pomocą zmiany szerokości (a więc i momentu bezwładności) kół zębatach.

W każdym razie niezbędna jest znajomość widma częstości własnych oraz jego zależność od parametrów przekładni. Bez tego nie można uzyskać odpowiednich informacji co do sposobu i możliwości odstrojenia przekładni od rezonansu.

Kwestią istotną dla teoretycznego ujęcia zagadnienia jest ustalenie właściwego źródła drgań. Jak już wspomniano na wstępie, autorzy dawniejszych prac dopatrywali się go wyłącznie w uderzeniach między zębami. Zakładano przy tym, iż uderzenia są spowodowane niedokładnością wykonania, w szczególności błędem podziałki oraz zarysu zębów. Niewątpliwie jest to tylko jeden aspekt rozpatrywanego zagadnienia.

Niemniej istotna przyczyna wzbudzenia drgań przekładni zębatej zależy od cech geometrycznych zazębienia. Ponieważ przy stopniu pokrycia  $\varepsilon > 1$  w przyporze znajduje się na zmianę jedna lub dwie pary zębów, przeto sztywność zazębienia zmienia się okresowo i dość gwałtownie, a to jest źródłem drgań *parametrycznych* przekładni. Ten typ drgań będzie przedmiotem niniejszych rozważań. Zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku mówimy o *wewnętrznych* przyczynach drgań, jako że ich źródła tkwią w samej przekładni i w zasadzie nie można ich całkowicie wyeliminować.

Oprócz tego mogą istnieć jeszcze *zewnętrzne* przyczyny wzbudzenia drgań. Wymuszenia tego rodzaju towarzyszą wszelkim zmianom obciążenia przekładni, które mogą mieć charakter okresowy (obciążenie pulsujące) lub nieokresowy, gdy następuje gwałtowna zmiana mocy przekazywanej przez przekładnię. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać ustalony bieg przekładni, przy którym zewnętrzne przyczyny drgań nie występują.

## 2. CHARAKTERYSTYKA MODELI PRZEKŁADNI ZĘBATEJ

Istotną wielkością obliczeniową dla projektanta przekładni jest współczynnik dynamiczny obciążenia zęba, rozumiany jako stosunek  $\max |P(t)|$  do siły statycznej  $P^0$ , związanej z przenoszonym momentem nominalnym. Dla obliczenia tej wielkości niezbędna jest przeto znajomość siły międzyzębnej określonej jako funkcja czasu.

Rozwiązanie tego zagadnienia na gruncie dynamiki układów ciągłych napotyka na ogromne trudności matematyczne. Dlatego tylko w nielicznych opracowaniach [21 i 22] wały traktuje się jako elementy ciągłe, ale uzyskiwane tą drogą wyniki nie mogą zaspokoić potrzeb praktyki projektowej.

Ujęcie przybliżone wymaga wprowadzenia modelu dyskretnego, mimo iż faktycznie mamy tu do czynienia ze skomplikowanym przypadkiem sprzężenia skrętno-giętnych drgań wału, drgań skrętnych tarczy oraz giętnych drgań zęba osadzonego sprężysto w tarczy lub wieńcu. W modelu dyskretnym tarcze traktuje się jako sztywne, wały zaś realizują w zasadzie bezmasowe więzy sprężyste. Oprócz

tę można wprowadzić więzy dysypatywne oraz więzy modelujące uderzenia; te ostatnie wprowadzają do układu istotnie nieliniową charakterystykę sprężystą.

Drgania modelu dyskretnego przekładni jednostopniowej, rozpatrywane przez wielu badaczy, dotyczą z reguły układu o jednym stopniu swobody [1, 2, 4, 5, 9, 11 – 19, 23 i 26]. W takim ujęciu najdalej idące wyniki uzyskali J. G. BOLLINGER i M. BOSCH [4 i 5]. Jako model jednostopniowej przekładni zębatej przyjęli oni dwie sztywne tarcze o osiach równoległych. Swobodę obrotu tarcz ograniczono przez lepko-sprężyste więzy (ciało w sensie Kelvina-Voigta), którymi połączono obie tarcze wzdłuż wspólnej stycznej. Sprężyna o zmiennej w czasie sztywności imituje w modelu Bollingera-Boscha sprężystą podatność całego układu, tłumik zaś hydrauliczny zastępuje tarcie wewnętrzne w układzie. W gałąź sprężystą elementu Kelvina-Voigta wprowadzono dodatkowo zderzak, który umożliwia uwzględnienie wpływu luzów międzyzębnych.

Omawiany model przekładni, choć dwumasowy, ma jednak tylko jeden stopień swobody i jako taki nie daje możliwości prawidłowego określenia siły międzyzębnej jako funkcji czasu. W szczególności przy założeniu stałej wartości momentu napędowego analiza ruchu modelu Bollingera-Boscha prowadzi do wniosku, iż nie wystąpią w tym przypadku żadne nadwyżki dynamiczne w obciążeniu zęba. W świetle poprzednich uwag odnośnie parametrycznego charakteru wzbudzenia drgań przekładni zębatej taki wniosek jest oczywiście błędny.

Rozpatrywanie dynamiki przekładni jednostopniowej w izolowaniu od pozostałych mas osadzonych na wałkach kół zębatych jest nieprawidłowe. Przyjmując bowiem nawet silnie uproszczony model przekładni wypada stwierdzić, że nadwyżki dynamiczne pochodzą zarówno od skrętnych drgań wałów, jak i od giętnych drgań zębów. Wobec tego wartość tych nadwyżek, jak również wszelkie inne efekty dynamiczne przekładni (jak częstości własne, położenie przekrojów węzłowych na wałach itd.) zależą istotnie od wielkości wszystkich mas uczestniczących w ruchu drgającym. Dlatego chcąc teoretycznie określić współczynnik dynamiczny należy analizować drgania pary kół współpracujących w określonym układzie dynamicznym, a więc przy uwzględnianiu bezwładności wszystkich mas wirujących na wale napędzanym i napędowym, a także z uwzględnieniem sztywności skrętnej (i ewentualnie giętnej) wałów.

Zauważmy, iż częstość drgań giętnych zęba jest wielokrotnie większa niż częstość drgań skrętnych wału z tarczami. Błędem byłoby jednak wyciągać stąd wniosek, iż przy dynamicznej analizie przekładni można wobec tego pominąć drgania własne zębów, traktując je jako sztywne. Niepoprawność takiego założenia wynika z faktu, iż wprawdzie okres  $T_g$  drgań giętnych zęba jest faktycznie na ogół mały wobec okresu  $T_s$  drgań skrętnych wału z tarczami, to jednak przy dostatecznie dużej liczbie obrotów okres  $T_g$  może być wielkością tego samego rzędu co czas obciążenia każdego zęba, równy długości przyporu, czyli  $2\pi r/\omega z$  ( $\omega$  oznacza prędkość kątową wału,  $z$  ilość zębów koła). Z tego powodu chcąc prawidłowo określić siłę międzyzębną nie można pomijać drgań giętnych zęba. Innymi słowy, konieczna jest w tym względzie analiza sprzężonych drgań co najmniej dwojakiego rodzaju, mianowicie drgań skrętnych wału oraz giętnych zęba.

Z tym wiąże się zasadnicza kwestia ilości stopni swobody zastępczego modelu dyskretnego przekładni. Jak wspomniano poprzednio częstość drgań skrotnych poszczególnych wałów zależy między innymi od bezwładności wszystkich mas osadzonych na tych wałach. W najprostszym przypadku przekładni jednostopniowej na każdym wale osadzone są co najmniej po dwie masy skupione (rys. 1). Cienki wał sprężysty z dwoma masami można traktować jako układ o dwóch stopniach swobody. Uwzględniając sprężyste sprzężenie wałów (przez odkształcalne zęby) dochodzimy do wniosku, że dynamikę jednostopniowej przekładni zębatej, nawet przy pominięciu giętych drgań wałów, powinno się rozpatrywać na modelu o czterech stopniach swobody.

Oczywiście analizowanie drgań parametrycznych takiego układu jest matematycznie kłopotliwe, a zważywszy na przybliżony charakter równań ruchu (układ ciągły zastępujemy przecież modelem dyskretnym) analiza taka może okazać się w ogóle niecelowa. Model przekładni zębatej o czterech stopniach swobody pierwszy badał teoretycznie J. G. BOLLINGER [3]. Uwzględniał on zarówno tłumienie, jak i zmienną sztywność zazębienia (według krzywej cosinusoidalnej), a także luz międzyzębny, wynikający z niedokładności podziałki oraz błędu zarysu zęba. Ruch takiego układu opisany jest układem nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, które Bollinger rozwiązał na maszynie cyfrowej dla pewnego, szczególnego przypadku.

W dążeniu do uproszczenia rachunków oraz łatwiejszego badania wpływu rozmaitych czynników, w p. 4 i 5 pracy niniejszej zaproponowano pewne uproszczenie oparte na następującym rozumowaniu.

W czasie drgań skrotnych na każdym wale tworzy się węzeł, który obraca się ruchem wynikającym jedynie ze «sztywnego» obrotu danego wału. Dla zanalizowania drgań przekładni jednostopniowej można przeto wyizolować z całego układu rozważaną parę kół zębatych wraz z przyległymi odcinkami wałów aż do przekrojów węzłowych. Oczywiście położenie węzłów zależy od geometrycznych i sprężystych parametrów całego układu tak, że dla dokładnego zlokalizowania węzłów należałoby rozwiązać zagadnienie drgań modelu o czterech stopniach swobody.

Ponieważ jednak tę trudność chcemy właśnie ominąć, przeto w przybliżeniu będziemy przyjmować, iż podatność giętą zębów i ewentualnie skrotna tarcz w małym stopniu wpływa na położenie węzłów. Innymi słowy przyjmujemy, że na każdym wale pracującym w układzie rzeczywistym (a więc złożonym z kilku wałów oraz zazębiających się kół) węzeł wystąpi w tym samym miejscu, w którym powstaje on na wyizolowanym z przekładni wale obciążonym jedynie dwoma tarczami na brzegach. Zlokalizowanie zaś węzła w tym przypadku nie nastęrcza, jak wiadomo, żadnych trudności.

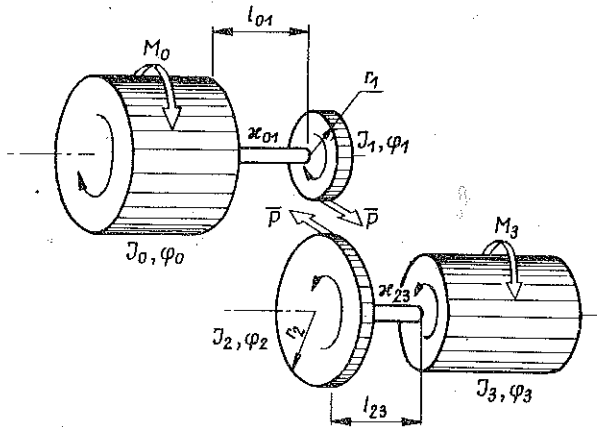
Jeśli takie uproszczenie jest dopuszczalne, to zamiast układu o czterech stopniach swobody wystarczy analizować drgania układu złożonego z dwóch sztywnych tarcz osadzonych na dwóch skrotnych wałach, przy czym tarcze oddziałują na siebie przez nieważką sprężynę imitującą podatność giętą zębów. Proponowany model ma już tylko dwa stopnie swobody (oczywiście jeśli dopuścimy możliwość wyłącznie obrotowego ruchu tarcz). Wprowadzając dodatkowo do układu więzy dysypatywne można uwzględnić wpływ tłumienia na wartość współczynnika dynamicznego

Na przykład zamiast pojedynczej sprężyny międzyzębnej można tam wstawić ciało w sensie Kelvina-Voigta. Oczywiście nie wpłynie to na ilość stopni swobody modelu, tym niemniej skomplikuje dość poważnie rachunki. W dalszym ciągu tłumienie będziemy pomijać.

Zanim wyprowadzimy wzory przybliżone oparte na przytoczonym wyżej schemacie rozumowania, celowe będzie zanalizowanie dynamiki modelu o czterech stopniach swobody.

### 3. MODEL JEDNOSTOPNIOWEJ PRZEKŁADNI ZĘBATEJ JAKO UKŁAD O CZTERECH STOPNIACH SWOBODY

Weźmy pod uwagę układ dynamiczny przedstawiony na rys. 1. Na wale napędowym 0-1 osadzone jest sztywno ciało obrotowe 0 (np. wirnik silnika) oraz koło zębate 1, przy czym ich masowe momenty bezwładności wynoszą odpowiednio  $J_0$  oraz  $J_1$ . Na wale napędzanym 2-3 osadzone jest koło zębate bierne 2 ( $J_2$ ) oraz ciało sztywne 3 ( $J_3$ ). Na ciała 0 i 3 działają siły zewnętrzne, których momenty względem osi wałów wynoszą odpowiednio  $M_0$  i  $M_3$ . Dodatkowo kierunki obrotu wskazane są na rysunku strzałkami.



Rys. 1

Gdyby wały, tarcze oraz zęby traktować jako idealnie sztywne, to rozpatrywany układ miałby tylko jeden stopień swobody, a jego ruch opisany byłby równaniem

$$(3.1) \quad [i^2(J_0+J_1)+(J_2+J_3)] \ddot{\varphi}_{23}^0 = iM_0 - M_3,$$

gdzie  $\varphi_{23}^0(t)$  oznacza kąt sztywnego obrotu wału 2-3,  $i=r_2/r_1$ ,  $r_1, r_2$  — promienie toczne koła czynnego i biernego. Oczywiście w układzie takim zachodzi równość

$$(3.2) \quad r_1 \varphi_{01}^0 - r_2 \varphi_{23}^0 = 0 \quad \text{lub} \quad \varphi_{01}^0 = i \varphi_{23}^0,$$

gdzie  $\varphi_{01}^0(t)$  oznacza kąt sztywnego obrotu wału 0-1. W ruchu ustalonym  $\ddot{\varphi}_{01}^0 = \ddot{\varphi}_{23}^0 = 0$  oraz  $M_3 = iM_0$ . Występująca przy tym siła międzyzębna posiada wartość

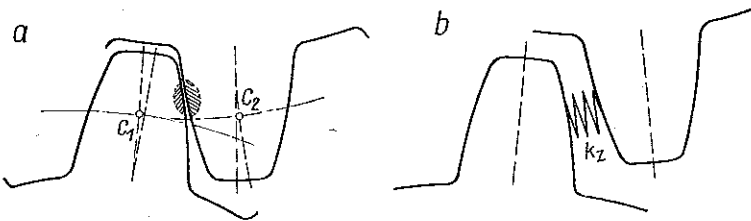
$$(3.3) \quad P^0 = \frac{M_0}{r_1} = \frac{M_3}{r_2}$$

i stanowi tzw. stacjonarne obciążenie zęba.

Oprócz tego podczas pracy przekładni obciążenie zęba wzrasta o nadwyżkę dynamiczną, co do której zakładamy, iż jest rezultatem wyłącznie parametrycznych drgań przekładni. Te zaś możliwe są dzięki sprężystości elementów przekładni, w szczególności wałów oraz tych zębów, które aktualnie znajdują się w przyporze. Odształcenia skrętne tarczy lub wieńca zębatego będziemy pomijać ze względu na małą podatność sprężystą tych elementów w porównaniu z podatnością wałów i zębów. Uproszczenie to jest tym bliższe rzeczywistości, im mniejsza jest różnica między średnicą koła stóp i średnicą wału lub piasty.

Tak więc rozpatrywać będziemy dyskretny model dynamiczny jednostopniowej przekładni zębatej złożony z czterech sztywnych mas połączonych dwoma bezmasowymi wałami o sztywnościach skrętnych  $\kappa_{01} = GI_{01}/l_{01}$ ,  $\kappa_{23} = GI_{23}/l_{23}$ , gdzie  $G$  oznacza moduł sprężystości postaciowej,  $I_{01}$ ,  $I_{23}$  biegunowe momenty bezwładności przekrojów wałów oraz  $l_{01}$ ,  $l_{23}$  długości wałów.

Oprócz tego chcąc uwzględnić podatność sprężystą zazębienia wprowadzamy do modelu sprężynę międzyzębną, za pośrednictwem której koło czynne 1 oddziałuje na koło bierne 2. Skrócenie tej sprężyny określa względne przemieszczenie środkowych punktów  $C_1$  i  $C_2$  zębów będących aktualnie w przyporze (rys. 2).



Rys. 2

Przemieszczenie to jest rezultatem nie tylko ugięcia zębów, lecz i odształceń lokalnych, powstających w obszarze styku zębów (zakreskowanym na rys. 2a). Ogólną sztywność właściwą zębów koła 1 i 2 oznaczmy odpowiednio  $k_{z1}$  i  $k_{z2}$ , lokalną zaś zlinearyzowaną sztywność właściwą zazębienia —  $k_t$ . Ponieważ mamy tu do czynienia z szeregowym połączeniem elementów sprężystych, przeto zastępcza sztywność właściwa  $k_z$  zazębienia określona jest wzorem

$$(3.4) \quad \frac{1}{k_z} = \frac{1}{k_{z1}} + \frac{1}{k_{z2}} + \frac{1}{k_t}$$

Uwzględnienie podatności zazębienia wprowadza do układu dodatkowy stopień swobody, albowiem wtedy przemieszczenia obrotowe kół 1 i 2 stają się wzajemnie

niezależne. Dynamiczny model jednostopniowej przekładni zębatej jest w takim ujęciu układem o czterech stopniach swobody.

Zanim wypiszemy równanie ruchu tego modelu zauważmy, że na kąt obrotu  $\varphi_j(t)$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ) dowolnej masy, oprócz kąta  $\varphi_j^0(t)$  obrotu sztywnego, składa się jeszcze kąt  $\psi_j(t)$ , który opisuje drgania skrętne układu. Zatem

$$(3.5) \quad \varphi_j(t) = \varphi_j^0(t) + \psi_j(t), \quad j=0, 1, 2, 3.$$

Kąty sztywnego obrotu powiązane są oczywistymi równościami

$$(3.6) \quad \varphi_0^0 = \varphi_1^0 \equiv \varphi_{01}^0, \quad \varphi_2^0 = \varphi_3^0 \equiv \varphi_{23}^0 = \varphi_{01}^0/i.$$

Postać funkcji  $\varphi_{23}^0(t)$  znajdziemy przez dwukrotne scałkowanie równania (3.1):

$$\varphi_{23}^0(t) = \frac{\iint (iM_0 - M_3) dt^2}{i^2(J_0 + J_1) + (J_2 + J_3)}.$$

W szczególności przy ustalonym biegu przekładni

$$(3.7) \quad \varphi_{23}^0(t) = \omega_{23} t + \bar{\varphi}_{23}^0, \quad \varphi_{01}^0(t) = \omega_{01} t + \bar{\varphi}_{01}^0,$$

gdzie  $\omega_{01}$  i  $\omega_{23}$  są prędkościami kątowymi wału pędnego i napędzanego ( $\omega_{01} = i\omega_{23}$ );  $\bar{\varphi}_{01}^0$ ,  $\bar{\varphi}_{23}^0$  są to stałe dowolne. Siła ściskająca sprężynę międzyzębną wynosi

$$P = P^0 + k_z[r_1 \varphi_1(t) - r_2 \varphi_2(t)]$$

lub po uwzględnieniu równości (3.2) i (3.5)

$$(3.8) \quad P = P^0 + k_z[r_1 \psi_1(t) - r_2 \psi_2(t)].$$

Składnik drugi we wzorze powyższym określa składową dynamiczną siły międzyzębnej.

Różniczkowe równania ruchu rozpatrywanego modelu wyprowadzamy stosując metodę przemieszczeń:

$$-J_0 \ddot{\varphi}_0 + M_0 = \kappa_{01}(\varphi_0 - \varphi_1),$$

$$-J_1 \ddot{\varphi}_1 - Pr_1 = \kappa_{01}(\varphi_1 - \varphi_0),$$

$$-J_2 \ddot{\varphi}_2 + Pr_2 = \kappa_{23}(\varphi_2 - \varphi_3),$$

$$-J_3 \ddot{\varphi}_3 - M_3 = \kappa_{23}(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Jeśli podstawimy tu równości (3.3), (3.5), (3.6) i (3.8), to otrzymamy

$$(3.9) \quad \begin{aligned} J_0(\ddot{\varphi}_{01}^0 + \ddot{\psi}_0) + \kappa_{01}(\psi_0 - \psi_1) &= M_0, \\ J_1(\ddot{\varphi}_{01}^0 + \ddot{\psi}_1) + \kappa_{01}(\psi_1 - \psi_0) + k_z r_1(r_1 \psi_1 - r_2 \psi_2) &= -M_0, \\ J_2(\ddot{\varphi}_{23}^0 + \ddot{\psi}_2) + \kappa_{23}(\psi_2 - \psi_3) - k_z r_2(r_1 \psi_1 - r_2 \psi_2) &= M_3, \\ J_3(\ddot{\varphi}_{23}^0 + \ddot{\psi}_3) + \kappa_{23}(\psi_3 - \psi_2) &= -M_3. \end{aligned}$$

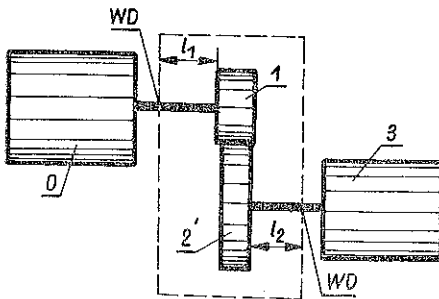
Wreszcie dla ustalonego ruchu przekładni ( $\ddot{\varphi}_{01}^0 = \ddot{\varphi}_{23}^0 = 0$ ,  $M_3 = iM_0$ ) znajdziemy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} J_0 \ddot{\psi}_0 + \kappa_{01}(\psi_0 - \psi_1) &= M_0, \\ J_1 \ddot{\psi}_1 + \kappa_{01}(\psi_1 - \psi_0) + k_z r_1(r_1 \psi_1 - r_2 \psi_2) &= -M_0, \\ J_2 \ddot{\psi}_2 + \kappa_{23}(\psi_2 - \psi_3) - k_z r_2(r_1 \psi_1 - r_2 \psi_2) &= iM_0, \\ J_3 \ddot{\psi}_3 + \kappa_{23}(\psi_3 - \psi_2) &= -iM_0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (3.9) lub (3.10) nie nastęrcza zasadniczych trudności matematycznych, aczkolwiek wyznaczenie tą drogą współczynnika dynamicznego wymaga przeprowadzenia nader uciążliwych rachunków. W dalszym ciągu podamy przybliżoną metodę postępowania, która wymagać będzie analizy dynamicznej układu posiadającego tylko dwa stopnie swobody.

#### 4. MODEL JEDNOSTOPNIOWEJ PRZEKŁADNI ZĘBATEJ JAKO UKŁAD O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

Jak stwierdziliśmy w p. 2 przez wydzielenie z układu czteromasowego samej tylko pary kół zębatach 1 i 2 wraz z przyległymi odcinkami wałów otrzymujemy znacznie prostszy do analizowania układ o dwóch stopniach swobody. Długości  $l_1$  i  $l_2$  odcinków wałów zdeterminowane są położeniem węzłów, jakie tworzą się na każdym wale podczas drgań skrętnych.



WD – węzeł drgań

Rys. 3

Zakładając, że podatność giętna zębów oraz podatność skrętna tarcz nie wpływają w sposób istotny na położenie węzłów (por. odnośna uwaga w p. 2), możemy napisać

$$(4.1) \quad l_1 \approx \frac{l_{01} J_0}{J_0 + J_1}, \quad l_2 \approx \frac{l_{23} J_3}{J_2 + J_3}.$$

Koło napędowe 1 działa na koło 2 przez sprężynę międzyzębną o sztywności  $k_z$ .

Układ częściowy wydzielony z całości na rys. 3 obramowany jest linią przerywaną.

Równania ruchu otrzymamy z drugiego i trzeciego równania układu (3.10) podstawiając tam  $\psi_0 = \psi_3 = 0$ . Oprócz tego trzeba zamienić sztywności właściwe całych wałów sztywnościami odcinków, podstawiając  $\kappa_1 = GI_{01}/l_1$  oraz  $\kappa_2 = GI_{23}/l_2$  odpowiednio zamiast  $\kappa_{01}$  i  $\kappa_{23}$ . Zatem

$$(4.2) \quad \begin{aligned} J_1 \ddot{\psi}_1 + \kappa_1 \psi_1 + k_z r_1(r_1 \psi_1 - r_2 \psi_2) &= -M_0, \\ J_2 \ddot{\psi}_2 + \kappa_2 \psi_2 - k_z r_2(r_1 \psi_1 - r_2 \psi_2) &= iM_0. \end{aligned}$$

Przy wyprowadzaniu tych równań odcinki wałów traktowano jako bezmasowe więzy sprężyste. Jednakże dla zwiększenia dokładności wyników można momenty bezwładności kół  $J_1, J_2$  powiększyć o zredukowane momenty bezwładności odcinków wałów, równe 1/3 ich rzeczywistej wartości.



Rozwiązując układ równań (4.2) otrzymamy funkcje  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  opisujące ruch drgający kół zębatych. Znajomość tych funkcji pozwoli z kolei na określenie siły międzyzębnej zgodnie ze wzorem (3.8), a następnie na wyznaczenie współczynnika dynamicznego.

Przypuśćmy, że rozwiązanie szczególne układu równań (4.2) ma postać

$$(4.3) \quad \psi_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \vartheta) + b_1, \quad \psi_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \vartheta) + b_2,$$

gdzie  $a_1, a_2, b_1, b_2, \omega$  i  $\vartheta$  są to stałe. Podstawienie (4.3) do (4.2) daje

$$\begin{aligned} (-\omega^2 J_1 + \kappa_1 + k_z r_1^2) a_1 - k_z r_1 r_2 a_2 &= 0, \\ -k_z r_1 r_2 a_1 + (-\omega^2 J_2 + \kappa_2 + k_z r_2^2) a_2 &= 0, \\ (\kappa_1 + k_z r_1^2) b_1 - k_z r_1 r_2 b_2 &= -M_0, \\ -k_z r_1 r_2 b_1 + (\kappa_2 + k_z r_2^2) b_2 &= iM_0. \end{aligned}$$

Z dwóch ostatnich równań obliczamy stałe  $b_1$  i  $b_2$ :

$$(4.4) \quad b_1 = -\frac{\kappa_2 M_0}{\kappa_1 \kappa_2 + k_z(\kappa_1 r_2^2 + \kappa_2 r_1^2)},$$

$$b_2 = \frac{\kappa_1 i M_0}{\kappa_1 \kappa_2 + k_z(\kappa_1 r_2^2 + \kappa_2 r_1^2)}.$$

Natomiast z dwóch pierwszych wynika równanie częstości:

$$\omega^4 - 2B\omega^2 + C = 0,$$

gdzie

$$(4.5) \quad B = \frac{\kappa_1 + k_z r_1^2}{2J_1} + \frac{\kappa_2 + k_z r_2^2}{2J_2},$$

$$C = \frac{\kappa_1 \kappa_2 + k_z(\kappa_1 r_2^2 + \kappa_2 r_1^2)}{J_1 J_2}.$$

Stąd wyznaczamy częstości drgań własnych:

$$(4.6) \quad \omega_\alpha = \sqrt{B - \sqrt{B^2 - C}}, \quad \omega_\beta = \sqrt{B + \sqrt{B^2 - C}}.$$

Oprócz tego znajdujemy współczynniki postaci drgań

$$(4.7) \quad \mu_\alpha = \frac{a_{2\alpha}}{a_{1\alpha}} = \frac{\kappa_1 + k_z r_1^2 - J_1 \omega_\alpha^2}{k_z r_1 r_2},$$

$$\mu_\beta = \frac{a_{2\beta}}{a_{1\beta}} = \frac{\kappa_1 + k_z r_1^2 - J_1 \omega_\beta^2}{k_z r_1 r_2}.$$

Zatem drgania własne pierwszej postaci opisane są następującymi funkcjami:

$$(4.8) \quad \psi_{1\alpha}(t) = a_{1\alpha} \cos(\omega_\alpha t + \vartheta_\alpha) + b_1,$$

$$\psi_{2\alpha}(t) = \mu_\alpha a_{1\alpha} \cos(\omega_\alpha t + \vartheta_\alpha) + b_2,$$

a drgania własne drugiej postaci funkcjami

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \psi_{1\beta}(t) &= a_{1\beta} \cos(\omega_\beta t + \vartheta_\beta), \\ \psi_{2\beta}(t) &= \mu_{1\beta} a_{1\beta} \cos(\omega_\beta t + \vartheta_\beta). \end{aligned}$$

Zbadajmy znak iloczynu  $\mu_\alpha \mu_\beta$ . Na mocy wzorów (4.7) mamy

$$\mu_\alpha \mu_\beta = \left( \frac{\kappa_1 + k_z r_1^2}{k_z r_1 r_2} \right)^2 - J_1 \frac{\kappa_1 + k_z r_1^2}{(k_z r_1 r_2)^2} (\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2) + \frac{J_1^2}{(k_z r_1 r_2)^2} \omega_\alpha^2 \omega_\beta^2,$$

a po podstawieniu (4.5) i (4.6)

$$\mu_\alpha \mu_\beta = -J_1/J_2 < 0.$$

Ponieważ  $\omega_\alpha^2 < \omega_\beta^2$ , przeto ze wzorów (4.7) wynika  $\mu_\alpha > 0$  oraz  $\mu_\beta < 0$ . Oznacza to, że podczas drgań z większą częstością ( $\omega_\beta$ ) koła zębate obracają się w kierunkach przeciwnych, natomiast przy częstości  $\omega_\alpha$  — w kierunkach zgodnych. Należy pamiętać, że chodzi tu o obrót związany z drganiami układu, przy czym zgodny kierunek obrotu kół możliwy jest dzięki istnieniu sprężyny międzyzębnej.

Rozwiązanie ogólne układu równań (4.2) ma postać

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \psi_1(t) &= a_{1\alpha} \cos(\omega_\alpha t + \vartheta_\alpha) + a_{1\beta} \cos(\omega_\beta t + \vartheta_\beta) + b_1, \\ \psi_2(t) &= \mu_\alpha a_{1\alpha} \cos(\omega_\alpha t + \vartheta_\alpha) + \mu_\beta a_{1\beta} \cos(\omega_\beta t + \vartheta_\beta) + b_2. \end{aligned}$$

Jeśli chodzi o siłę obciążającą ząb, to jak wynika z budowy naszego modelu, jest ona równa sile w sprężynie międzyzębnej. Siła ta zgodnie ze wzorami (3.8) i (4.3) jest następującą funkcją czasu:

$$P(t) = P^0 + k_z [(r_1 b_1 - r_2 b_2) + (r_1 - \mu_\alpha r_2) a_{1\alpha} \cos(\omega_\alpha t + \vartheta_\alpha) + \\ + (r_1 - \mu_\beta r_2) a_{1\beta} \cos(\omega_\beta t + \vartheta_\beta)]$$

lub po wyeliminowaniu  $b_1, b_2, \mu_\alpha$  i  $\mu_\beta$  za pomocą wzorów (4.4) i (4.7)

$$(4.11) \quad P(t) = DP^0 + \frac{J_1 \omega_\alpha^2 - \kappa_1}{r_1} a_{1\alpha} \cos(\omega_\alpha t + \vartheta_\alpha) + \frac{J_1 \omega_\beta^2 - \kappa_1}{r_1} a_{1\beta} \cos(\omega_\beta t + \vartheta_\beta),$$

gdzie

$$(4.12) \quad D \equiv \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2 + k_z (\kappa_1 r_2^2 + \kappa_2 r_1^2)}.$$

Amplitudy drgań są proporcjonalne do momentu obrotowego. W dalszym ciągu wprowadzamy przeto nowe stałe bezwymiarowe  $A_\alpha$  i  $A_\beta$  pisząc

$$(4.13) \quad (J_1 \omega_\alpha^2 - \kappa_1) a_{1\alpha} = A_\alpha M_0, \quad (J_1 \omega_\beta^2 - \kappa_1) a_{1\beta} = A_\beta M_0.$$

Rozpatrzmy z kolei współczynnik dynamiczny  $K_d$  obciążenia zęba, który zdefiniowany jest jako stosunek maksymalnej siły międzyzębnej do siły stacjonarnej ( $P^0 = M_0/r_1$ ), czyli

$$K_d = \frac{\max |P(t)|}{P^0}.$$

Na podstawie wzoru (4.11), przy uwzględnieniu (4.13), znajdziemy

$$K_d = D + \max |A_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \vartheta_\alpha) + A_\beta \cos(\omega_\beta t + \vartheta_\beta)|$$

lub

$$(4.14) \quad K_d = D + |A_\alpha \cos(\omega_\alpha t_m + \vartheta_\alpha) + A_\beta \cos(\omega_\beta t_m + \vartheta_\beta)|.$$

Wielkość  $t_m$  należy wyznaczyć jako pierwiastek równania

$$(4.15) \quad \omega_\alpha A_\alpha \sin(\omega_\alpha t_m + \vartheta_\alpha) + \omega_\beta A_\beta \sin(\omega_\beta t_m + \vartheta_\beta) = 0.$$

Dla oszacowania wartości współczynnika dynamicznego można posłużyć się nierównością

$$(4.16) \quad K_d < D + |A_\alpha| + |A_\beta|.$$

Chcąc korzystać z przytoczonych tu wzorów, trzeba przedtem określić amplitudy drgań. Zagadnieniem tym zajmiemy się w następnym punkcie.

## 5. OKREŚLENIE AMPLITUD DRGAŃ

W przekładni zębatej wolnej od niedokładności podziałki i błędów zarysu zębów, a ponadto pracującej w warunkach ustalonego obciążenia, drgania zostają wzbudzone wskutek okresowych zmian sztywności  $k_z$  zazębienia. Idealizując nieco zagadnienie przyjmujemy, że zmiany sztywności odbywają się skokowo przy wejściu danej pary zębów w przypór lub przy jej wyjściu z przyporu; poza tym sztywność jest odcinkami stała. Okres  $T$  tych zmian równa się odstępowi czasu, jaki potrzebny jest na obrót koła o kąt  $2\pi/z_j$  z prędkością kątową  $\omega_j$  ( $z_j$  oznacza liczbę zębów,  $j=1$  lub 2), czyli

$$(5.1) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1 z_1} = \frac{2\pi}{\omega_2 z_2}.$$

Długość fazy pojedynczego i podwójnego zazębienia wynosi odpowiednio

$$T_I = (2 - \varepsilon) T, \quad T_{II} = (\varepsilon - 1) T.$$

Jeśli rachubę czasu dla każdej fazy rozpoczniemy w jej początku, to zgodnie z tym, co powiedziano poprzednio, otrzymamy

$$k_z = k_z^I \quad \text{dla} \quad 0 < t < (2 - \varepsilon) T,$$

$$k_z = k_z^{II} \quad \text{dla} \quad 0 < t < (\varepsilon - 1) T,$$

przy czym  $k_z^I < k_z^{II}$  (rys. 4).

W związku z powyższym w dalszych rozważaniach dla każdej stałej  $a_{1\alpha}, a_{2\alpha}, b_{1,2}, \omega_{\alpha,\beta}, \vartheta_{\alpha,\beta}, \mu_{\alpha,\beta}$  itd. musimy rozróżniać po dwie wartości: jedną dla fazy pojedynczego zazębienia (indeks górny I), drugą — dla fazy podwójnego zazębienia (indeks górny II). W konsekwencji otrzymamy także

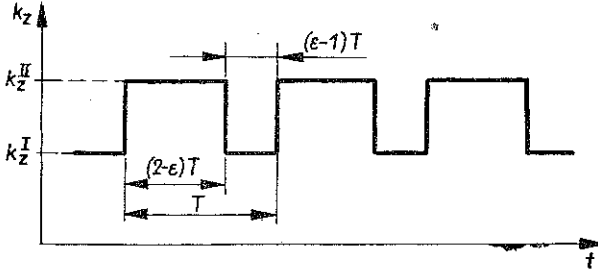
$$(5.2) \quad \begin{aligned} \psi_1^I(t) &= a_{1\alpha}^I \cos(\omega_\alpha^I t + \vartheta_\alpha^I) + a_{1\beta}^I \cos(\omega_\beta^I t + \vartheta_\beta^I) + b_1^I, \\ \psi_1^{II}(t) &= a_{1\alpha}^{II} \cos(\omega_\alpha^{II} t + \vartheta_\alpha^{II}) + a_{1\beta}^{II} \cos(\omega_\beta^{II} t + \vartheta_\beta^{II}) + b_1^{II}, \end{aligned}$$

gdzie

$$b_1^I = -\frac{\kappa_2 M_0}{\kappa_1 \kappa_2 + k_z^I (\kappa_1 r_2^2 + \kappa_2 r_1^2)} \equiv -\frac{D^I}{\kappa_1} M_0,$$

$$b_1^{II} = -\frac{\kappa_2 M_0}{\kappa_1 \kappa_2 + k_z^{II} (\kappa_1 r_2^2 + \kappa_2 r_1^2)} \equiv -\frac{D^{II}}{\kappa_1} M_0$$

i podobnie dla funkcji  $\psi_2^I(t)$  oraz  $\psi_2^{II}(t)$ . Trzeba jednak pamiętać, iż wartości stałych, odnoszące się do każdej fazy zazębienia, powiązane są wzajemnie pewnymi zależ-



Rys. 4

nościami, które wynikają z założonej ciągłości ruchu w chwili przejścia układu z jednej fazy zazębienia do drugiej. Są to następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \psi_1^I((2-\varepsilon)T) - \psi_1^{II}(0) &= 0, \\ \psi_2^I((2-\varepsilon)T) - \psi_2^{II}(0) &= 0, \\ \dot{\psi}_1^I((2-\varepsilon)T) - \dot{\psi}_1^{II}(0) &= 0, \\ \dot{\psi}_2^I((2-\varepsilon)T) - \dot{\psi}_2^{II}(0) &= 0, \end{aligned}$$

które po uwzględnieniu (5.2) prowadzą do układu równań:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} a_{1\alpha}^I \cos \theta_\alpha^I + a_{1\beta}^I \cos \theta_\beta^I - a_{1\alpha}^{II} \cos \vartheta_\alpha^{II} - a_{1\beta}^{II} \cos \vartheta_\beta^{II} &= b_1^{II} - b_1^I, \\ \mu_\alpha^I a_{1\alpha}^I \cos \theta_\alpha^I + \mu_\beta^I a_{1\beta}^I \cos \theta_\beta^I - \mu_\alpha^{II} a_{1\alpha}^{II} \cos \vartheta_\alpha^{II} - \mu_\beta^{II} a_{1\beta}^{II} \cos \vartheta_\beta^{II} &= b_2^{II} - b_2^I, \\ \omega_\alpha^I a_{1\alpha}^I \sin \theta_\alpha^I + \omega_\beta^I a_{1\beta}^I \sin \theta_\beta^I - \omega_\alpha^{II} a_{1\alpha}^{II} \sin \vartheta_\alpha^{II} - \omega_\beta^{II} a_{1\beta}^{II} \sin \vartheta_\beta^{II} &= 0, \\ \omega_\alpha^I \mu_\alpha^I a_{1\alpha}^I \sin \theta_\alpha^I + \omega_\beta^I \mu_\beta^I a_{1\beta}^I \sin \theta_\beta^I - \omega_\alpha^{II} \mu_\alpha^{II} a_{1\alpha}^{II} \sin \vartheta_\alpha^{II} - \omega_\beta^{II} \mu_\beta^{II} a_{1\beta}^{II} \sin \vartheta_\beta^{II} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\theta_{\alpha, \beta}^I \equiv (2-\varepsilon) \omega_{\alpha, \beta}^I T + \vartheta_{\alpha, \beta}^I.$$

Jeżeli drgania przekładni są stateczne i stacjonarne, to stan kinematyczny koła zębatego przy końcu okresu zmian sztywności jest taki sam, jak na początku tego okresu, czyli

$$\begin{aligned} \psi_1^I(0) - \psi_1^{II}((\varepsilon-1)T) &= 0, \\ \psi_2^I(0) - \psi_2^{II}((\varepsilon-1)T) &= 0, \\ \dot{\psi}_1^I(0) - \dot{\psi}_1^{II}((\varepsilon-1)T) &= 0, \\ \dot{\psi}_2^I(0) - \dot{\psi}_2^{II}((\varepsilon-1)T) &= 0. \end{aligned}$$

Są to warunki okresowości, które w rozpatrywanym tu przypadku drgań parametrycznych zastępują warunki początkowe. Mamy zatem

$$(5.4) \quad \begin{aligned} a_{1\alpha}^I \cos \vartheta_\alpha^I + a_{1\beta}^I \cos \vartheta_\beta^I - a_{1\alpha}^{II} \cos \Phi_\alpha^{II} - a_{1\beta}^{II} \cos \Phi_\beta^{II} &= b_1^I - b_1^{II}, \\ \mu_\alpha^I a_{1\alpha}^I \cos \vartheta_\alpha^I + \mu_\beta^I a_{1\beta}^I \cos \vartheta_\beta^I - \mu_\alpha^{II} a_{1\alpha}^{II} \cos \Phi_\alpha^{II} - \mu_\beta^{II} a_{1\beta}^{II} \cos \Phi_\beta^{II} &= b_2^I - b_2^{II}, \\ \omega_\alpha^I a_{1\alpha}^I \sin \vartheta_\alpha^I + \omega_\beta^I a_{1\beta}^I \sin \vartheta_\beta^I - \omega_\alpha^{II} a_{1\alpha}^{II} \sin \Phi_\alpha^{II} - \omega_\beta^{II} a_{1\beta}^{II} \sin \Phi_\beta^{II} &= 0, \\ \omega_\alpha^I \mu_\alpha^I a_{1\alpha}^I \sin \vartheta_\alpha^I + \omega_\beta^I \mu_\beta^I a_{1\beta}^I \sin \vartheta_\beta^I - \omega_\alpha^{II} \mu_\alpha^{II} a_{1\alpha}^{II} \sin \Phi_\alpha^{II} - \omega_\beta^{II} \mu_\beta^{II} a_{1\beta}^{II} \sin \Phi_\beta^{II} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi_{\alpha,\beta}^{II} \equiv (\varepsilon - 1) \omega_{\alpha,\beta}^{II} T + \vartheta_{\alpha,\beta}^{II}.$$

Tak więc otrzymaliśmy układ ośmiu równań (5.3) i (5.4), który po rozwiązaniu względem niewiadomych

$$a_{1\alpha}^I, a_{1\beta}^I, \vartheta_\alpha^I, \vartheta_\beta^I, a_{1\alpha}^{II}, a_{1\beta}^{II}, \vartheta_\alpha^{II}, \vartheta_\beta^{II}$$

umożliwia obliczenie współczynnika dynamicznego. Praktycznie biorąc nieodzowna jest tu pomoc maszyny liczbowej.

## 6. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona metoda obliczeń przekładni zębatej ujmuje dynamikę tego mechanizmu wyłącznie w aspekcie drgań parametrycznych, wzbudzonych okresową zmianą sztywności zazębienia. Jest to niewątpliwie najistotniejszy, tym niemniej tylko jeden aspekt zagadnienia.

Jak zauważono na wstępie, na ogół w warunkach rzeczywistych istnieją jeszcze inne, trudne do wyeliminowania przyczyny wzbudzenia drgań przekładni, żeby wymienić tylko niedokładności wykonania koła zębatego, zwłaszcza błąd podziałki oraz błąd zarysu zębów. Oprócz tego pomiary wykazują, iż w określonych warunkach obciążenia przekładni występują krótkotrwałe przerwy w kontakcie między zębami, a nawet zetknięcia z zębem poprzedzającym. Towarzyszące temu zjawisku uderzenia są dodatkowym źródłem drgań o stosunkowo dużej intensywności. Ich badanie teoretyczne jest trudne; pewne wyniki w tym względzie, aczkolwiek dotyczące układu o jednym stopniu swobody, uzyskał N. A. KOWALEW [15]. Kwestia ta niewątpliwie wymaga jeszcze dalszych opracowań.

Ponieważ celem niniejszej pracy była w zasadzie ocena wpływu drgań parametrycznych przekładni na wielkość nadwyżki dynamicznej obciążenia zęba, przeto należy oczekiwać, że wyprowadzone w p. 4 i 5 wzory na współczynnik dynamiczny będą dawały wartości nieco mniejsze od rzeczywistych. Różnice będą tym większe, im bardziej niedokładne jest wykonanie zębów oraz im bliżej obrotów rezonansowych, gdzie, jak wiadomo, nadwyżki te osiągają wartości największe.

Wspomniane poprzednio błędy wykonania wieńca zębatego jako źródła drgań przekładni w zasadzie wprowadzają do zagadnienia aspekt probabilistyczny. Wynika to z przypadkowego charakteru rozkładu tych błędów na poszczególne zęby, a także i z faktu, że przy każdym obrocie w zazębienie wchodzi na ogół inne pary zębów (z wyjątkiem przekładni o przełożeniu równym jedności).

Jak się zdaje, w takim aspekcie dynamika przekładni nie była dotychczas badana teoretycznie. Wprawdzie wyniki akustycznych pomiarów pracującej przekładni interpretuje się za pomocą metod teorii procesów stochastycznych, to jednak w tych przypadkach nie poszukuje się związków analitycznych między geometrycznymi i sprężystymi parametrami przekładni oraz amplitudą drgań (lub poziomem natężenia szumu). Tymczasem takie właśnie związki byłyby przydatne dla konstruktora przekładni jeszcze w fazie jej projektowania.

Dalsze prace teoretyczne nad dynamiką przekładni zębatych powinny przeto iść w kierunku probabilistycznego ujęcia wpływu uderzeń międzyzębnych, przy czym należałoby uwzględniać parametryczny charakter wymuszenia oraz wewnętrzne (a więc nieliniowe) tłumienie drgań. Wydaje się, iż w takim ujęciu osiągnięcie efektywnych rezultatów teoretycznych możliwe jest tylko na gruncie dynamiki układów dyskretnych.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Б. М. Абрамов, *Исследование колебаний зубчатых колес, вызываемых соударением зубьев*, Изв. АН СССР, ОТН Мех. и машиностр., 2, 102–109, 1960.
2. Б. М. Абрамов, *Колебания прямозубных зубчатых колес*, Машгиз, 1968.
3. J. G. BOLLINGER, *Darstellung des dynamischen Verhaltens eines nichtlinearen Zahnradtriebessystems auf dem Analogrechner*, Industrie-Anzeiger, 85, 46, 961–966, 1963.
4. J. G. BOLLINGER, M. BOSCH, *Ursachen und Auswirkungen dynamischer Zahnkräfte in Stirnradgetrieben*, Industrie-Anzeiger, 86, 19, 319–326, 1964.
5. M. BOSCH, *Das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben unter besonder Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit*, Industrie-Anzeiger, cz. I, 87, 102, 2469–2478, 1965, cz. II, 88, 14, 267–274, 1966.
6. E. BUCKINGHAM, *Analytical mechanics of gears*, McGraw-Hill Book Co., N.Y. 1949.
7. E. BUCHINGHAM, *Dynamic loads on gear teeth*, Machinery, 117–121, 1958.
8. G. GORTEN, *Impact loads in gear trains*, Mech. Design, 28, 5, 83–87, 1957.
9. S. L. HARRIS, *Dynamic loads on the teeth of spur gears*, Proc. of the Inst. of Mech. Eng-ers, 172, 2, 87–91, 1958.
10. М. О. Кільчевский, Е. М. Костюк, *Динамічні взаємодії в зубчастых зацеплениях, зв'язані з деформативністю зубців*, Доповіді АН УРСР, 5, 593–597, 1959.
11. K. TSUDA, *On the vibration of a power transmission system having angular clearances*, Bull. of JSME, 6, 328–348, 1959.
12. Н. А. Ковалев, *О динамической нагрузке зубчатого зацепления*, Изв. АН СССР, ОТН Мех. и машиностр., 2, 95–101, 1960.
13. Н. А. Ковалев, *О влиянии кромочного зацепления на динамическую нагрузку прямых зубьев*, Сб. Проблемы качества и прочн. зубч. передач, 11, 2, 1961.
14. Н. А. Ковалев, *Колебания зубчатых передач при ступенчатом изменении жесткости и постоянной ошибке шага зацепления*, Изв. АН СССР, ОТН Мех. и машиностр. 2, 1961.
15. Н. А. Ковалев, *О максимальной динамической нагрузке зубчатого зацепления*, Машиноведение, 5, 1965.
16. Н. А. Ковалев, *Исследование кинематики, динамики и прочности реальных механизмов (динамика зубчатых передач)*, Тр. МЭИ, 1964.
17. Б. Г. Кожевников, *Влияние циклических ошибок изготовления прямозубных цилиндрических колес на плавность работы передач*, Производственно-техн. Бюлл., 3, 1963.
18. М. Д. Малинкович, *Некоторые особенности относительного движения зубьев прямо-зубых эвольвентных передач*, Изв. вузав. Машиностр., 2, 44–48, 1971.

19. М. Д. Малишкovich, *К вопросу исследования динамики прямозубных эвольвентных передач*, Изв. вузов. Машиностр., 3, 46-50, 1971.
20. A. MORECKI, *Badania rozkladu obciążeń statycznych i nadwyżki dynamicznej w kołach zębatych walcowych o zębach prostych i skośnych*, Arch. Bud. Maszyn, 2, 139-190, 1961.
21. W. NADOLSKI, *Construction of mechanical models of some single-speed gearings in the case of torsional vibrations*, Zag. Drgań Nielin., 10, cz. I, 145-160, 1969, cz. II, 161-171.
22. W. NADOLSKI, *Swobodne drgania skrętne niektórych przekładni zębatych N-stopniowych*, Arch. Budowy Maszyn, 17, 1, 61-75, 1970.
23. T. NAKADA, M. UTAGAWA, *The dynamic loads on gear caused by the varying elasticity of the mating teeth*, Proc. of the 6th Japan Nat. Congr. for Appl. Mech., 493-498, 1956.
24. А. И. Петрусевич, М. Д. Генкин, В. К. Гринкевич, *Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубными колесами*, Сб. Вопросы расчета и констр. деталей машин, Изд. АН СССР, Москва 1956.
25. М. С. Полоцкий, *Динамические нагрузки на зубьях прямозубных зубчатых передач*, Сб. Повышение нагр. способ. зубчатых пер. и снижение их веса, Машгиз, 1956.
26. J. V. RESWICK, *Dynamic loads on spur and helical gear teeth*, Trans. ASME, 77, 635-644, 1955.
27. T. ТОВЕ, *Dynamic loads on spur gear teeth*, Bull. JSME, 4, 14, 417-422, 1961.
28. W. A. TUPLIN, *Dynamic loads on gear teeth*, Power Transm., 27, 322, 678-679, 1958.

### Резюме

#### ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОСТУПЕНЧАТОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

Предметом теоретических рассуждений является анализ параметрических колебаний одноступенчатой зубчатой передачи, вызванных периодически изменяющейся жесткостью зубчатого зацепления. Составлены уравнения движения передачи как модели с четырьмя степенями свободы.

Затем предлагается упрощенную модель с двумя степенями свободы, учитывающую, однако, как крутильную податливость валов, так и изгибную зубьев. Дается решение движения этой модели. Выводится формула для динамического коэффициента нагрузки зуба.

### SUMMARY

#### PARAMETRIC VIBRATIONS OF A SIMPLE GEAR TRANSMISSION

The subject of the investigations is the theoretical analysis of parametric vibrations of a simple gear transmission produced by periodic variations of the toothing rigidity. The equations of motion are written for the transmission gear treated as a model with four degrees of freedom.

A simplified model with two degrees of freedom is also proposed taking into account both the torsional rigidity of the shaft and bending rigidity of the tooth. The corresponding equations of motion are also written. The formula for the dynamical coefficient of the tooth loading is derived.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1971 r.*