

## ZASTOSOWANIE PODATNOŚCI SZEROKOPASMOWEJ DO OCENY REAKCJI OBIEKTÓW MECHANICZNYCH NA DOWOLNE WYMUSZENIE

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

### 1. WPROWADZENIE

W pracy [1] wprowadzono pojęcie podatności szerokopasmowej (mobilność); wielkość ta pozwala ocenić odpowiedź obiektu mechanicznego na wymuszenie szerokopasmowe typu białego szumu lub na wymuszenie krótkotrwałe typu impulsu. Podano również sposób pomiaru podatności szerokopasmowej za pomocą białego szumu lub ciągu krótkotrwałych impulsów. Powstaje jednak pytanie, czy istnieje możliwość wyrażenia tej wielkości jako funkcji parametrów charakterystyk częstotliwościowych układu możliwych do otrzymania pomiarowo. Bardzo istotny jest również problem określenia odpowiedzi układu dla wymuszeń o dowolnym, znanym widmie mocy lub energii.

### 2. PODATNOŚĆ SZEROKOPASMOWA OBIEKTU MECHANICZNEGO

Rozważmy dowolny liniowy obiekt mechaniczny zredukowany do dyskretnego z wymuszeniem siłowym we współrzędnej  $x_s$ . Macierzowo-operatorowe równanie ruchu takiego obiektu może mieć postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} U(s)X(s) &= F(s), & X(s) &= \text{col} \{x_1(s), \dots, x_n(s)\}, \\ F(s) &= \text{col} \{0, \dots, f_s(s), 0, \dots, 0\}, \end{aligned}$$

gdzie  $s$  jest parametrem transformacji Laplace'a. Zakładamy, że obiekt jest asymptotycznie stateczny, tzn. że wszystkie pierwiastki zespolone sprzężone macierzy dynamicznej  $U(s)$  mają ujemne części rzeczywiste,  $\text{Re } \lambda_r < 0$ ,  $r=1, \dots, n$ . Wtedy odpowiedź układu na dowolne ograniczone wymuszenie będzie również ograniczona. Transformatę odpowiedzi przemieszczenia obiektu w  $r$ -tej współrzędnej można znaleźć z równania (2.1) na podstawie wzorów Cramera:

$$(2.2) \quad x_r(s) = (-1)^{r+s} \frac{\Delta_{rs}(s)}{\Delta(s)} f_s(s) = \alpha_{rs}(s) f_s(s), \quad r=1, \dots, n.$$

We wzorze tym  $\Delta_{rs}(s)$  jest minorem macierzy  $U(s)$  powstałym przez wykreślenie  $r$ -tej kolumny i  $s$ -tego wiersza,  $\Delta(s)$  jej wyznacznikiem, a  $\alpha_{rs}(s)$  podatnością operatorową (receptancją) obiektu, mierzoną we współrzędnej  $r$ -tej przy pobudzeniu we współrzędnej  $s$ -tej.

Jak wiadomo [1, 2], znając podatność operatorową obiektu mechanicznego  $\alpha_{rs}(s)$  lub widmową  $\alpha_{rs}(i\omega)$  ( $s = i\omega$ ), możemy przejść do oceny procesu przejściowego w obiekcie lub do wyznaczenia odpowiedzi na wymuszenie długotrwałe. W przypadku wymuszenia impulsem  $f_s(t) \neq 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $f_s(t) = 0$ ,  $t > T$  najprostszy wskaźnik oceny procesu przejściowego ma postać [1]:

$$(2.3) \quad A = \int_0^{\infty} x_r^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 |f_s(i\omega)|^2 d\omega,$$

gdzie  $|f_s(i\omega)|^2$  jest widmem energii impulsu. Natomiast dla wymuszeń długotrwałych  $T \leq \infty$  średni kwadrat amplitudy drgań znajdziemy za pomocą znanych wzorów

$$(2.4) \quad \overline{x_r^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_r^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 G_s(\omega) d\omega,$$

gdzie  $G_s(\omega)$  jest gęstością widmową mocy siły wymuszającej  $f_s(t)$ .

Łatwo sprawdzić, że ze wzorów (2.3) i (2.4) wynikają następujące nierówności pomocne przy szacowaniu odpowiedzi obiektu mechanicznego na dowolne wymuszenie:

$$(2.5) \quad A \leq \text{Max}_{\omega} |f_s(i\omega)|^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega = \mu_{rs} \text{Max}_{\omega} |f_s(i\omega)|^2$$

oraz

$$(2.6) \quad \overline{x_r^2} \leq \text{Max}_{\omega} G_s(\omega) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega = \mu_{rs} \text{Max}_{\omega} G_s(\omega),$$

gdzie

$$(2.7) \quad \mu_{rs} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 d\omega.$$

Jak widać, oszacowanie takie jest możliwe, jeśli znamy maksymalną wartość gęstości widmowej energii lub mocy wymuszenia oraz wprowadzoną w [1] podatność szerokopasmową obiektu  $\mu_{rs}$ .

Weźmiemy obecnie pod rozwagę możliwość wyrażenia podatności szerokopasmowej (2.7) jako funkcji parametrów obiektu. Uwzględnimy przy tym cztery możliwe typy tłumienia w obiekcie: tłumienie o dowolnym charakterze (indeks  $d$ ), tłumienie o charakterze jednorodnym masowym o współczynniku  $\alpha$  (indeks  $m$ ), tłumienie jednorodne histerezy w przybliżeniu liniowym o współczynniku  $\eta$  (indeks  $h$ ) oraz tłumienie jednorodne wiskotyczne o współczynniku  $\zeta$  (indeks  $w$ ) [3 i 4].

Na wstępie założyliśmy, że nasz obiekt mechaniczny będący przedmiotem rozważań posiada  $n$  stopni swobody, a jego macierz dynamiczna  $n$  pierwiastków zespolonych sprzężonych o ujemnych częściach rzeczywistych. W związku z tym dla

określonych wyżej rodzajów tłumienia możliwe są następujące rozkłady kwadratu modułu podatności  $\alpha_{rs}(i\omega)$ :

$$\begin{aligned}
 |\alpha_{rs}^d(i\omega)|^2 &= \frac{|A_{rs}^d(i\omega)|^2}{\left| \prod_{k=1}^n [\omega_k^2 + 2i\xi_k \omega_k \omega - \omega^2] \right|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2}, \\
 |\alpha_{rs}^m(i\omega)|^2 &= \frac{|A_{rs}^m(i\omega)|^2}{\left| \prod_{k=1}^n [\omega_k^2 + i\alpha\omega - \omega^2] \right|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{M_k^{rs} + \omega^2 N_k^{rs}}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}, \\
 |\alpha_{rs}^h(i\omega)|^2 &= \frac{|A_{rs}^h(i\omega)|^2}{\left| \prod_{k=1}^n [\omega_k^2 + i\eta\omega_k^2 - \omega^2] \right|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{E_k^{rs} + \omega^2 G_k^{rs}}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4}, \\
 |\alpha_{rs}^w(i\omega)|^2 &= \frac{|A_{rs}^w(i\omega)|^2}{\left| \prod_{k=1}^n [\omega_k^2 + i\zeta\omega_k^2 \omega - \omega^2] \right|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k^{rs} + \omega^2 V_k^{rs}}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \zeta^2 \omega_k^4 \omega^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

W powyższych wzorach współczynniki  $D_k^{rs}$ ,  $C_k^{rs}$ ,  $M_k^{rs}$ ,  $N_k^{rs}$ ,  $E_k^{rs}$ ,  $G_k^{rs}$ ,  $R_k^{rs}$  i  $V_k^{rs}$  zależne są od rozkładu i wielkości mas, sztywności i tłumienia w obiekcie, a  $\omega_k$ ,  $\xi_k$ ,  $k=1, \dots, n$  — to odpowiednio częstotliwości drgań własnych i stopień tłumienia  $k$ -tej postaci drgań, ponadto  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  — to omówione uprzednio współczynniki tłumienia jednorodnego w obiekcie.

Korzystając z kolei z definicji podatności szerokopasmowej (2.7) oraz ze wzorów pracy [5] i tablic całek [6], po przekształceniach uzyskamy wzory określające podatność szerokopasmową w zależności od charakteru tłumienia w obiekcie:

$$\begin{aligned}
 \mu_{rs}^d &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4\xi_k \omega_k} \left( \frac{D_k^{rs}}{\omega_k^2} + C_k^{rs} \right), \\
 \mu_{rs}^m &= \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n \left( \frac{M_k^{rs}}{\omega_k^2} + N_k^{rs} \right), \\
 \mu_{rs}^h &= \frac{\sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1}}{2\eta\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k} \left( \frac{E_k^{rs}}{\omega_k^2 \sqrt{1+\eta^2}} + G_k^{rs} \right), \\
 \mu_{rs}^w &= \frac{1}{2\zeta} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \left( \frac{R_k^{rs}}{\omega_k^2} + V_k^{rs} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Jak widać z powyższych wzorów ich charakter jest podobny i wyraża każdorazowo sumowanie wyrazów określających drgania z poszczególnymi częstotliwościami własnymi obiektu  $\omega_k$ ,  $k=1, \dots, n$ . Interesującym byłoby obecnie wyrazić te składowe jako funkcje wielkości bezpośrednio mierzalnych, takich np. jak amplitudy drgań rezonansowych obiektu.

### 3. WYRAŻENIE PODATNOŚCI SZEROKOPASMOWEJ JAKO FUNKCJI PARAMETRÓW CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOŚCIOWEJ OBIEKTU

Wróćmy obecnie do zależności (2.4) określającej średni kwadrat amplitudy drgań w obiekcie i przyjmijmy gęstość widmową wymuszenia w postaci

$$(3.1) \quad G_s(\omega) = \pi \sigma_f^2 \delta(\omega - \omega_k),$$

gdzie  $\sigma_f^2$  jest wariancją amplitudy siły wymuszającej, a  $\delta(y)$  funkcją Diraca.

Jak łatwo zauważyć, tak określona gęstość widmowa mocy odpowiada wymuszeniu harmonicznemu o częstotliwości rezonansowej  $\omega_k$ . Podstawiając (3.1) do (2.4) mamy

$$(3.2) \quad \overline{x_r^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha_{rs}(i\omega)|^2 \pi \sigma_f^2 \delta(\omega - \omega_k) d\omega = \sigma_f^2 |\alpha_{rs}(i\omega_k)|^2,$$

$$A_{rs}^2(\omega_k) = \frac{\overline{x_r^2}}{\sigma_f^2} = |\alpha_{rs}(i\omega_k)|^2 = [\alpha_{rs}(i\omega)]_{\omega=\omega_k}^2.$$

Łącząc uzyskany wynik z rozkładami kwadratu modułu podatności (2.8) dla przypadku tłumienia dowolnego otrzymamy

$$(3.3) \quad A_{rs}^2(\omega_k) = \left( \sum_{k=1}^n \frac{D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2} \right)_{\omega=\omega_k} \approx \frac{1}{4\xi_k \omega_k^2} \left( \frac{D_k^{rs}}{\omega_k^2} + C_k^{rs} \right), \quad \xi_k \ll 1,$$

skąd natychmiast

$$(3.4) \quad \frac{1}{4\xi_k \omega_k} \left( \frac{D_k^{rs}}{\omega_k^2} + C_k^{rs} \right) \approx \xi_k \omega_k A_{rs}^2(\omega_k).$$

W takim razie podatność szerokopasmowa obiektu dla przypadku tłumienia o dowolnym charakterze (2.9) wyraża się wzorem

$$(3.5) \quad \mu_{rs}^d \approx \sum_{k=1}^n \xi_k \omega_k A_{rs}^2(\omega_k), \quad \xi_k \ll 1.$$

Postępując podobnie dla obiektów o tłumieniu jednorodnym znajdziemy

$$(3.6) \quad \mu_{rs}^m \approx \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^n A_{rs}^2(\omega_k), \quad \frac{\alpha}{\omega_k} \ll 1,$$

$$\mu_{rs}^h \approx \frac{\eta \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1}}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \omega_k A_{rs}^2(\omega_k), \quad \eta \ll 1,$$

$$\mu_{rs}^w \approx \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k^2 A_{rs}^2(\omega_k), \quad \zeta \omega_k \ll 1.$$

Jak widać ze wzorów (3.5), dzięki przyjęciu założenia o małości tłumienia, uzyskaliśmy możliwość wyrażenia podatności szerokopasmowej obiektu o dowolnym typie

tłumienia za pomocą wielkości bezpośrednio mierzalnych takich, jak  $\xi_k, \alpha, \eta, \zeta, \omega_k, A_{rs}^2(\omega_k)$ . W ramach uczynionych założeń o małości tłumienia,  $\xi_k \ll 1, \alpha/\omega_k \ll 1, \eta \ll 1, \zeta\omega_k \ll 1$ , możemy przyjąć procedurę wyznaczania współczynnika tłumienia z kształtu krzywych rezonansowych (rys. 1).

Posługując się rysunkiem i wzorami (2.8) łatwo wykazać, że współczynniki tłumienia spełniają następujące związki:

$$(3.7) \quad 2\xi_k = \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k}, \quad \alpha = \Delta\omega_k, \quad \eta = \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k}, \quad \zeta = \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k^2}.$$

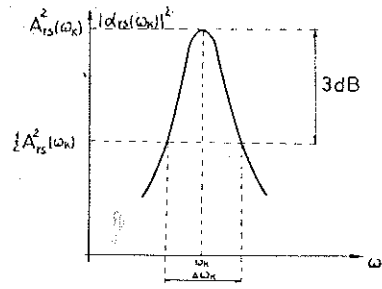
Uwzględniając je we wzorach na podatność szerokopasmową (3.5) i (3.6) mamy ostatecznie

$$(3.8) \quad \mu_{rs} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta\omega_k A_{rs}^2(\omega_k), \quad \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k} \ll 1,$$

przy czym w (3.6)<sub>2</sub> przyjęto  $\sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1} \approx 2$ .

Jak widać z (3.8), (3.7), (3.6) i (3.5) dla wszystkich rodzajów analizowanego tłumienia uzyskaliśmy ten sam wzór na wyznaczenie podatności szerokopasmowej z pomiaru. Chcąc więc wyznaczyć tę wielkość dla dowolnego obiektu należy zmierzyć jedynie energetyczne szerokości powłokowe pasm rezonansowych  $\Delta\omega_k$  oraz wartość podatności (receptancji)  $A_{rs}^2(\omega_k), k=1, \dots, n$ , odpowiadającą tym rezonansom.

Uzyskany rezultat oprócz łatwości wyznaczania podatności szerokopasmowej prowadzi do jeszcze jednego wniosku: w ramach założeń o małym tłumieniu wyróżnienie obiektów o tłumieniu jednorodnym ma znaczenie tylko dla uproszczenia analizy teoretycznej zachowania się obiektu. Natomiast takie podejście nie daje uproszczeń w zagadnieniach pomiarowych.



Rys. 1

#### 4. OKREŚLENIE ODPOWIEDZI OBIEKTU MECHANICZNEGO NA WYMUSZENIE O ZNANYM WIDMIE

Mając określoną podatność szerokopasmową obiektu (3.8) możemy na podstawie (2.4), (2.6) i (2.7) określić amplitudę odpowiedzi układu na wymuszenie szumem białym o gęstości  $G_s(\omega) = G_0$ , gdyż w tym przypadku nierówność (2.6) przyjmie charakter równości

$$(4.1) \quad \bar{x}_r^2 = G_0 \mu_{rs} = \frac{G_0}{2} \sum_{k=1}^n \Delta\omega_k A_{rs}^2(\omega_k).$$

Chcąc otrzymać podobną równość dla widma dowolnego typu  $G_s(\omega) \neq G_0 = \text{const}$ , wróćmy do zależności (2.4) oraz wzorów (2.8) określających kwadrat modułu

podatności. Analizując te wzory można zauważyć, że współczynniki tłumienia  $\xi_k$ ,  $\alpha$  i  $\zeta$  można odpowiednio zamienić dla poszczególnych  $k=1, \dots, n$ . W takim razie do dalszych obliczeń weźmiemy jedynie podatności, których zachowanie się ze zmianą częstości jest diametralnie różne, mianowicie wynosi  $\alpha_{is}^d(i\omega)$  oraz  $\alpha_{rs}^h(i\omega)$ .

Pisząc dla nich wzory (2.4) w postaci rozwiniętej, znajdziemy

$$(4.2) \quad \bar{x}_{rd}^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \frac{D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2} G_s(\omega) d\omega$$

oraz

$$(4.3) \quad \bar{x}_{rh}^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \frac{E_k^{rs} + \omega^2 G_k^{rs}}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4} G_s(\omega) d\omega.$$

Całki stojące w powyższych wzorach pod znakiem sum można przepisać następująco:

$$(4.4) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}) G_s(\omega) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\omega_{g1} \rightarrow 0 \\ \omega_{g2} \rightarrow \infty}} \int_{\omega_{g1}}^{\omega_{g2}} \frac{(D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}) G_s(\omega) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(E_k^{rs} + \omega^2 G_k^{rs}) G_s(\omega) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4} = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\omega_{g1} \rightarrow \infty \\ \omega_{g2} \rightarrow 0}} \int_{\omega_{g1}}^{\omega_{g2}} \frac{(E_k^{rs} + \omega^2 G_k^{rs}) G_s(\omega) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4}.$$

Zwróćmy uwagę, że pierwsze funkcje podcałkowe mają dla małego tłumienia własności silnie selektywne, tzn. dla  $\omega = \omega_k$  przyjmują duże wartości, zanikając szybko dla  $\omega \neq \omega_k$ . W związku z tym przy założeniu ciągłości funkcji gęstości widmowych  $G_s(\omega)$  możemy w przybliżeniu przedstawić w postaci ( $\omega_{g1} < \omega_k < \omega_{g2}$ )

$$(4.5) \quad J_{kd} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{g1}}^{\omega_{g2}} \frac{(D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}) G_s(\omega) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2} \approx \frac{G_s(\omega_k)}{\pi} \int_{\omega_{g1}}^{\omega_{g2}} \frac{(D_k^{rs} + \omega^2 C_k^{rs}) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2},$$

$$J_{kh} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{g1}}^{\omega_{g2}} \frac{(E_k^{rs} + \omega^2 G_k^{rs}) G_s(\omega) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4} \approx \frac{G_s(\omega_k)}{\pi} \int_{\omega_{g1}}^{\omega_{g2}} \frac{(E_k^{rs} + \omega^2 G_k^{rs}) d\omega}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_k^4}.$$

Korzystając z tablic całkowych [6] po przekształceniach znajdziemy (4.6)

$$(4.6) \quad J_{kd} \approx \frac{G_s(\omega_k)}{4\xi_k \omega_k} \left\{ \frac{D_k^{rs}}{\omega_k^2} [I_{1w}(p_2, \xi_k) - I_{1w}(p_1, \xi_k)] + C_k^{rs} [I_{2w}(p_2, \xi_k) - I_{2w}(p_1, \xi_k)] \right\},$$

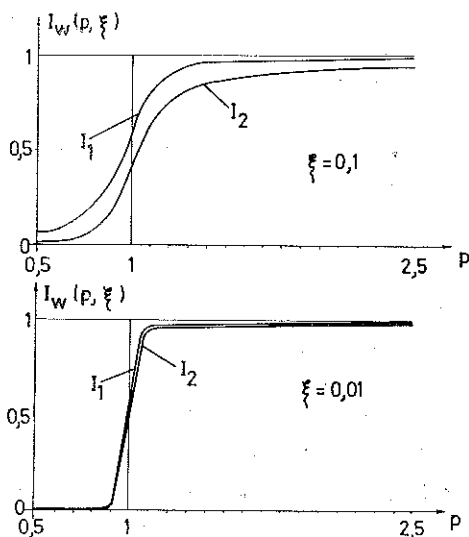
$$J_{kh} \approx \frac{G_s(\omega_k) \sqrt{\sqrt{1+\eta^2} + 1}}{2\sqrt{2} \eta \omega_k} \left\{ \frac{E_k^{rs}}{\omega_k^2 \sqrt{1+\eta^2}} [I_{1h}(p_2, \eta) - I_{1h}(p_1, \eta)] + G_k^{rs} [I_{2h}(p_2, \eta) - I_{2h}(p_1, \eta)] \right\},$$

gdzie

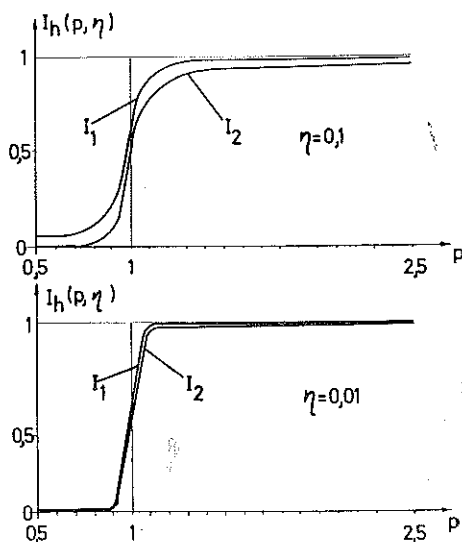
$$p_1 = \frac{\omega_{g1}}{\omega_k}, \quad p_2 = \frac{\omega_{g2}}{\omega_k},$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} I_{1w}(p, \xi_k) \\ I_{2w}(p, \xi_k) \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2p \xi_k}{1-p^2} \pm \frac{\xi_k}{2\pi \sqrt{1-\xi_k^2}} \ln \frac{p^2 + 2p \sqrt{1-\xi_k^2} + 1}{p^2 - 2p \sqrt{1-\xi_k^2} + 1}, \\
 (4.7) \quad \left. \begin{aligned} I_{1h}(p, \eta) \\ I_{2h}(p, \eta) \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2p} \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}-1}}{\sqrt{1+\eta^2}-p^2} \pm \\
 &\pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{\sqrt{1+\eta^2}+1}} \ln \frac{p^2 + \sqrt{2p} \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1} + \sqrt{1+\eta^2}}{p^2 - \sqrt{2p} \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1} + \sqrt{1+\eta^2}}.
 \end{aligned}$$

Powyższe funkcje (4.7) przedstawiono na rysunkach 2 i 3, będących wynikiem obliczeń numerycznych.



Rys. 2



Rys. 3

Jak wynika z wykresów dla małego tłumienia  $\xi_k$ ;  $\eta < 0,1$  funkcje te mają następujące własności:

$$(4.8) \quad \left. \begin{aligned} I_w(p, \xi_k) \\ I_h(p, \eta) \end{aligned} \right\} \approx \begin{cases} 1, & \text{jeśli } p = p_2 > 1, \\ 0, & \text{jeśli } p = p_1 < 1, \xi_k, \eta < 0,1. \end{cases}$$

Uwzględniając własności graniczne funkcji granic (4.8) we wzorach (4.6) znajdziemy:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} J_{ka} &\approx \frac{G_s(\omega_k)}{4\xi_k \omega_k} \left[ \frac{D_k^{rs}}{\omega_k^2} + C_k^{rs} \right], \\ I_{kh} &\approx \frac{G_s(\omega_k) \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1}}{2\sqrt{2} \eta \omega_k} \left[ \frac{E_k^{rs}}{\omega_k^2 \sqrt{1+\eta^2}} + G_k^{rs} \right]. \end{aligned}$$

Porównując uzyskane wyrażenia ze składowymi wzorów na podatność szerokopasmową (2.9)<sub>1,3</sub> oraz (3.5) i (3.6)<sub>2</sub> łatwo spostrzec, że wyrażenia (4.9) można

przedstawić za pomocą parametrów charakterystyki amplitudowej obiektu. Wykonując to w sposób podobny do postępowania przy wyprowadzeniu (3.4) i podstawiając do wzorów (4.5) – (4.2) znajdziemy

$$(4.10) \quad \bar{x}_{rd}^2 \approx \sum_{k=1}^n \xi_k \omega_k G_s(\omega_k) A_{rs}^2(\omega_k)$$

oraz

$$(4.11) \quad \bar{x}_{rh}^2 \approx \frac{\eta \sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+1}}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \omega_k G_s(\omega_k) A_{rs}^2(\omega_k).$$

Jak widać z porównania (4.10) i (4.11) oraz wyrażeń (3.5) i (3.7) na podatność szerokopasmową różnią się one jedynie współczynnikiem wagi brany oddzielnie dla każdej częstości rezonansowej  $\omega_k$ ,  $k=1, \dots, n$ . Rola tę spełnia wartość gęstości widmowej mocy wymuszenia przy kolejnych częstościach rezonansowych obiektu. Jeśli z kolei zastąpimy bezwymiarowe współczynniki tłumienia energetycznymi szerokościami krzywych rezonansowych  $\Delta\omega_k$  podług (3.9), to w ramach przyjętych przybliżeń zamiast (4.10) i (4.11) dostaniemy

$$(4.12) \quad \bar{x}_r^2 \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta\omega_k G_s(\omega_k) A_{rs}^2(\omega_k).$$

Tak więc znając z pomiarów charakterystykę amplitudową obiektu mechanicznego, a ściślej wielkości  $\Delta\omega_k = 2\pi\Delta f_k$  oraz  $A_{rs}^2(\omega_k)$  potrafimy przewidzieć za pomocą (4.12) wielkość amplitudy drgań obiektu, jeśli tylko znamy funkcję gęstości widmowej wymuszenia  $G_s(\omega)$ . Ponadto można również określić składowe całkowitej amplitudy drgań  $\bar{x}_r^2$ , pochodzące od poszczególnych częstości rezonansowych  $\omega_k$ , gdyż jak łatwo spostrzec z (4.12) wynoszą one  $\frac{1}{2}\Delta\omega_k G_s(\omega_k) A_{rs}^2(\omega_k)$ .

W ten sam sposób można również wykorzystać wzór (4.12) do oceny odpowiedzi układu na krótkotrwałe wymuszenie impulsem, gdyż na podstawie (2.4) i (2.3)  $\bar{x}_r^2 \rightarrow A$ ,  $G_s(\omega_k) \rightarrow |f_s(i\omega_k)|^2$  i można wprost napisać

$$(4.13) \quad A \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Delta\omega_k |f_s(i\omega_k)|^2 A_{rs}^2(\omega_k).$$

Warto również dodać, że wzory (4.13) i (4.12) można wykorzystać do optymalizacji odpowiedzi obiektu drogą doboru charakterystyki wymuszenia  $|f_s(i\omega)|^2$  i  $G_s(\omega)$  lub też drogą zmiany charakterystyki obiektu  $\Delta\omega_k$  i  $A_{rs}^2(\omega_k)$ .

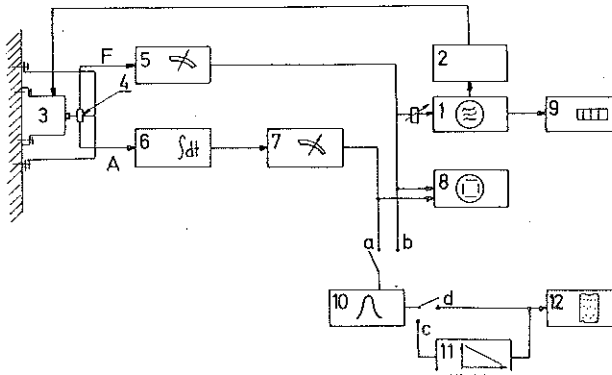
## 5. PRZYKŁAD

W celu sprawdzenia poprawności otrzymanych rezultatów wykonano w dalszym ciągu pracy eksperyment na modelu ramy z układem pomiarowym (rys. 4).

W pierwszej części eksperymentu posługiwano się wymuszeniem harmonicznym o wartości siły wzbudzającej  $F=2$  [N] stałej w całym przedziale częstości od 10 Hz



do 1000 Hz. Przy takim wymuszeniu zdjęto charakterystykę amplitudowo częstotściową modelu cechując ją na mierniku drgań i siły dla amplitud rezonansowych  $A_{rs}(\omega_k)$  [mm N<sup>-1</sup>]. Przechodząc następnie do pomiaru prędkości drgań, określono

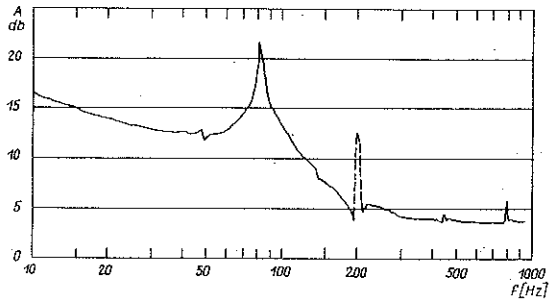


Rys. 4. Schemat zestawu pomiarowego do badania modelu ramy przy wymuszeniach sinusowych i przypadkowych

- 1 – generator sinusowo szumowy B – K 1025, 2 – wzmacniacz mocy PYE LING PA 250, 3 – wzbudnik elektrodynamiczny PYE LING V 50, 4 – głowica do pomiaru siły i przyspieszenia B–K 8001, 5 – wzmacniacz i miernik sygnału siły B – K 2628, 6 – przedwzmacniacz drgań B – K 2622, 7 – miernik drgań B – K 2502, 8 – oscylograf dwustrumieniowy, Krizik, 9 – licznik częstotści ELPO, C 546, 10 – analizator tercjowy B – K 2112, 11 – filtr kompensacyjny –3 dB/okt, 12 – rejestrator poziomu B – K 2305

częstotści rezonansowe  $f_k$  [Hz] oraz energetyczne szerokości połówkowe krzywych rezonansowych  $\Delta f_k$  [Hz]. Uzyskane przy tych pomiarach charakterystyki częstotściowe amplitud i prędkości modelu ramy przedstawiają rysunki 5 i 6.

Przełączając generator 1 na rodzaj pracy «biały szum» i zachowując tę samą wartość siły wzbudzającej  $F=2$  [N] zmierzono amplitudę drgań przypadkowych ramy otrzymując  $x_{RMS} = x_r^2 = 60$  [ $\mu\text{m}$ ]. Następnie ustalając przełączniki (rys. 4) w pozycji b, c, zarejestrowano gęstość widmową siły wymuszającej  $G_s(\omega)$  [N<sup>2</sup> rd<sup>-1</sup> s]. Kalibrację krzywej gęstości widmowej wykonano zgodnie z procedurą przewidzianą dla aparatury firmy

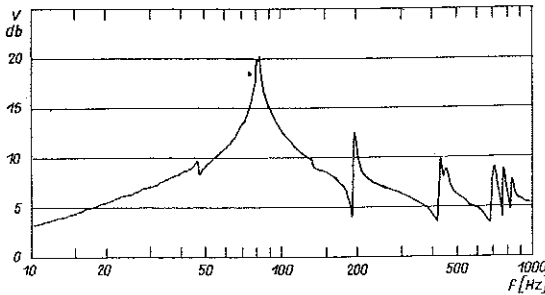


Rys. 5. Charakterystyka częstotliwościowa przemieszczeń modelu ramy przy wartości siły wzbudzającej  $F=2$  N. Parametry rejestratora B – K, 2305. Skala logarytm. 75 dB, rejestr. wart. skut. (RMS), prędkość papieru 0,1 mms<sup>-1</sup>, prędkość zapisu 125 mms<sup>-1</sup>

Bruel-Kjaer [7] dla tercji o częstotści środkowej  $f=50$  [Hz]. Zapis ten przedstawiono na rys. 7. Dysponując danymi z powyższych pomiarów obliczono podatność szerokopasmową modelu za pomocą wzoru (3.10) oraz średni kwadrat amplitudy

drgań przypadkowych podług wzoru (4.12). Tok postępowania i dane do obliczeń przedstawiono w tabelicy 1.

Porównując uzyskaną z obliczeń wartość amplitudy drgań przypadkowych  $\sqrt{\bar{x}_r^2} = 63,71$  [ $\mu\text{m}$ ] z wartością zmierzoną podczas eksperymentu  $x_{RMS} = 60$  [ $\mu\text{m}$ ]



Rys. 6. Charakterystyka częstotliwościowa prędkości modelu ramy przy wartości siły wzbudzającej  $F=2$  N. Parametry rejestratora B-K, 2305, jak dla rys. 5

$\text{Max } G_s(\omega) = 25,888 \cdot 10^{-4}$  [ $\text{N}^2/\text{rd s}^{-1}$ ]. Biorąc zatem z tabelicy wartość podatności szeroko-pasmowej znajdziemy

$$\bar{x}_r^2 \leq \text{Max } G_s(\omega) \mu_{rs} = 94,854 \cdot 10^{-4} [\text{mm}^2],$$

$$\sqrt{\bar{x}_r^2} \leq 97,41 [\mu\text{m}].$$

Biorąc pod uwagę widmo wymuszenia (rys. 7) i powyższy wynik można stwierdzić, że uzyskane oszacowanie amplitudy drgań jest dobre.

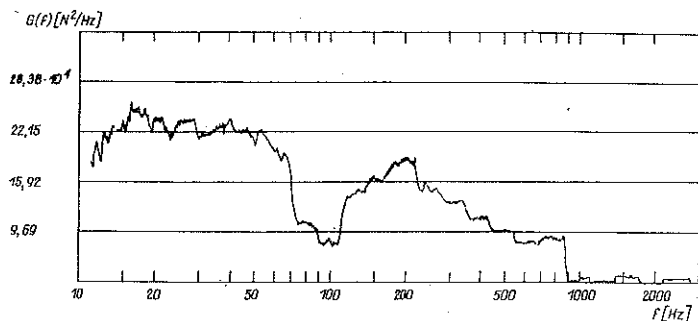
Tablica 1

$f_k$ [Hz]	89,8	222,5	483	785	856	928
Wielkość obliczeniowa						
$\Delta f_k$ [Hz]	4,22	3,14	13,13	14,87	11,95	13,70
$A_{rs}^2(\omega_k)$ [ $\text{mmN}^{-1}$ ]	$36,5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$35 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-7}$
$\Delta f_k A_{rs}^2(\omega_k)$	1,163032	0,004082	0,000013		0,000143	
$\mu_{rs}$ [ $\text{mm}^2 \text{N}^{-2}/\text{rds}^{-1}$ ]	$\mu_{rs} = \pi \sum_1^6 \Delta f_k A_{rs}^2(\omega_k) = 3,6652$					
$G_s(\omega_k)$ [ $\text{N}^2/\text{rds}^{-1}$ ]	$10,936 \cdot 10^{-4}$	$15,920 \cdot 10^{-4}$	$9,69 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$\Delta f_k A_{rs}^2(\omega_k) G_s(\omega_k)$	$12,8612 \cdot 10^{-4}$	$0,0665 \cdot 10^{-4}$	$0,0001 \cdot 10^{-4}$		$0,0013 \cdot 10^{-4}$	
$\bar{x}_r^2$ [ $\text{mm}^2$ ]	$\bar{x}_r^2 = \pi \sum_1^6 \Delta f_k G_s(\omega_k) A_{rs}^2(\omega_k) = 40,5975 \cdot 10^{-4}$					
$\sqrt{\bar{x}_r^2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\sqrt{\bar{x}_r^2} = 63,71 [\mu\text{m}]$					

widać, że błąd obliczeń jest niewielki. Stąd wniosek, że zaproponowana w pracy metoda określenia odpowiedzi obiektu mechanicznego na podstawie jego charakterystyk jest dla celów praktyki projektowej zupełnie wystarczająca.

Sprawdźmy jeszcze możliwość oszacowania amplitudy drgań na podstawie nierówności (2.6). Z wykresu gęstości widmowej (rys. 7) wynika, że

Max  $G_s(\omega) = 25,888 \cdot 10^{-4}$  [ $\text{N}^2/\text{rd s}^{-1}$ ]. Biorąc zatem z tabelicy wartość podatności szeroko-pasmowej znajdziemy



Rys. 7. Gęstość widmowa mocy siły wymuszającej drgania ramy przy wartości siły wzbudzającej  $F=2$  N. Parametry rejestratora B-K, 2305. Skala liniowa, rejestr. wart. skut. (RMS), prędkość papieru  $0,1$  mms $^{-1}$ , prędkość zapisu  $4$  mms $^{-1}$

## 6. WNIOSKI

Podsumowując przeprowadzone wyżej rozważania można stwierdzić, że dla obiektów mechanicznych o małym tłumieniu możliwe jest wyrażenie podatności szerokopasmowej za pomocą parametrów charakterystyki częstościowej obiektu. Podatność ta może służyć do oszacowania maksymalnej amplitudy drgań obiektu, przy czym szacowanie to jest tym lepsze, im bardziej płaskie jest widmo wymuszenia. Okazuje się również, że w przypadku znanych widm wymuszenia możliwe jest dokładne określenie amplitudy drgań przypadkowych obiektu. W przypadku tym wartości gęstości widmowej wymuszenia spełniają rolę współczynników wagi składowych podatności szerokopasmowej. Wydaje się, że wyprowadzone związki mogą być pomocne przy ocenie dynamiczności obiektów mechanicznych.

Korzystając z okazji autor składa podziękowania dr Urszuli KOSIEL i mgr Markowi MAJEWSKIEMU za pomoc w przeprowadzeniu i opracowaniu eksperymentu.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. CZ. SEMPEL, *Całkowite kryterium oceny dynamiczności obiektów mechanicznych*, Rozpr. Inżyn., 21, 2, 1973.
2. Ф. А. Михайлов, *Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными случайными параметрами*, стр. 302—316, Наука, Москва 1971.
3. C. M. HARRIS, CH. E. CREDE, *Shock and vibration handbook*, 1, ch. 2, Mc Graw-Hill, New York 1961.
4. CZ. SEMPEL, *Oszacowanie odpowiedzi struktury mechanicznej na dowolne wymuszenie*, Rozpr. Inżyn., 21, 1, 1973.
5. В. С. Пугачев, *Теория случайных функции*, стр. 863, Физматгиз, Москва 1962.
6. М. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений*, стр. 81, Физматгиз, Москва 1962.
7. *Application of B-K equipment to frequency analysis and power spectral density measurements*, Bruel—Kjaer, 1969.

## Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕАКЦИИ  
МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

В предыдущей работе [1] введена Т. наз. широкополосная податливость (подвижность) для произвольного механического объекта. Здесь доказано, что эту величину можно выразить в функции параметров амплитудно-частотной характеристики объекта. Затем показано, что зная широкополосную податливость и спектральную плотность возмущения можно вычислить или оценить реакцию объекта на произвольное возмущение с известным спектром. Эксперимент проведенные в дальнейшей части работы показал хорошее совпадение между результатами теории и эксперимента.

## SUMMARY

APPLICATION OF THE «WIDE-BAND RECEPTANCE» TO THE ESTIMATION OF  
RESPONSE OF MECHANICAL OBJECTS TO ARBITRARY EXCITATIONS

In the previous paper [1], the so-called «wide-band response» (mobility) of an arbitrary mechanical object was introduced. It is proved now that magnitude may be expressed as a function of certain parameters of the mechanical object frequency characteristics. Once the wide-band receptance and the spectral density of excitation are known, object's response to an arbitrary, excitation of a known spectrum may be either calculated or estimated. Experimental verification presented demonstrates a good agreement between the theoretical predictions and experimental data.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 marca 1973 r.*

---