

## ANALIZA DRGAŃ SAMOWZBUDNYCH WIRNIKA O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

AGNIESZKA MUSZYŃSKA (WARSZAWA)

### 1. WSTĘP

Celem niniejszej pracy jest analiza przebiegów ustalonych drgań samowzbudnych pewnego modelu wirnika. Jedną z przyczyn wywołujących drgania samowzbudne wirników jest tarcie wewnętrzne w materiale wału. Jak wiadomo [1-5], po przekroczeniu pewnej wartości prędkości obrotowej ruch czysto wirujący wału i prostoliniowa forma tego ostatniego stają się niestateczne. Tarcie wewnętrzne wywołuje transformację części energii wirowania w energię drgań giętnych wału. Liniowa teoria tarcia wewnętrznego tłumaczy utraty stateczności czysto wirującego ruchu wału [4], nie wyjaśnia jednak zjawiska powstawania drgań samowzbudnych, przejawiających się w postaci ustalonej kołowej asynchronicznej precesji wału.

W niniejszej pracy przedstawiono analizę teoretyczną drgań samowzbudnych wirującego wału o nieliniowych charakterystykach tarcia wewnętrznego i sprężystości, przy czym jako podstawę do rozważań przyjęto pewną szczególną postać charakterystyki materiałowej. Założono, że tłumienie zewnętrzne ma charakterystykę liniową. Znalaziono bezpośrednią zależność między charakterystyką materiałową a stanami drgań samowzbudnych oraz zanalizowano wpływ postaci tej charakterystyki na istnienie i liczbę ustalonych stanów drgań samowzbudnych wirnika. Wyznaczono zależności między amplitudami i częstościami drgań samowzbudnych a prędkością obrotową wału. Przeprowadzono analizę stateczności drgań samowzbudnych oraz stateczności ruchu czysto wirującego ze stałą prędkością obrotową.

### 2. RÓWNANIA RUCHU

W pracy [5] wyprowadzono równania ruchu wirnika o dwóch stopniach swobody, zmodelowanego w postaci ciężkiego krążka, zamocowanego w środku bezmasowego sprężystego wirującego wału o nieliniowej charakterystyce sprężystości i tłumienia wewnętrznego — w bardzo ogólnej postaci.

W niniejszej pracy przyjmuje się, że zależność między naprężeniem  $\sigma$  a odkształceniem  $\varepsilon$  we włóknach wirującego wału przedstawia się następująco:

$$(2.1) \quad \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^3 + a_3 \dot{\varepsilon} + a_4 \dot{\varepsilon}^3 + a_5 \varepsilon \dot{\varepsilon}^2 + a_6 \dot{\varepsilon} \varepsilon^2,$$

gdzie  $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$  oraz gdzie  $a_1, \dots, a_6$  są stałymi współczynnikami.

Równanie (2.1) stanowi szczególny przypadek charakterystyki materiałowej  $\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ ,  $f \in C^0$ , analizowanej w pracy [5]. Przedstawia jednocześnie pierwsze wyrazy rozkładu funkcji  $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$  w szereg potęgowy (wyrazy o parzystych potęgach pominięto, gdyż nie odgrywają roli w dalszych rozważaniach).

Równania ruchu wirnika mają następującą postać [5]:

$$(2.2) \quad \ddot{z} + a\dot{z} + z \left[ F_1 \left( |z|, \frac{d|z|}{dt}, \omega - \dot{\varphi} \right) - i F_2 \left( |z|, \frac{d|z|}{dt}, \omega - \dot{\varphi} \right) \right] = 0,$$

$$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

gdzie  $x, y$  są współrzędnymi punktu zamocowania krążka na wale (względem nieruchomego układu współrzędnych),  $a$  jest współczynnikiem tłumienia zewnętrznego, odniesionym do jednostki masy krążka,  $\omega$  — stałą prędkością obrotową wału oraz

$$(2.3) \quad F_i = \frac{l^5}{432m|z|^4} \int_{-s}^s dp_1 \int_{-\sqrt{s^2-p_1^2}}^{\sqrt{s^2-p_1^2}} p_i \sigma \left\{ p_1, \left[ \frac{p_1}{|z|} \frac{d|z|}{dt} + (\omega - \dot{\varphi}) p_2 \right] \right\} dp_2,$$

$$s = \frac{12r|z|}{l^2}, \quad i = 1, 2,$$

gdzie  $l$  oznacza długość wału,  $r$  promień przekroju kołowego wału oraz  $m$  masę krążka.

We wzorze (2.2) funkcje  $F_1$  i  $F_2$  będą miały następującą postać:

$$(2.4) \quad F_1 \left( |z|, \frac{d|z|}{dt}, \omega - \dot{\varphi} \right) = b_1 + b_2 |z|^2 + \frac{b_3}{|z|} \frac{d|z|}{dt} + b_4 \left[ \frac{1}{|z|} \left( \frac{d|z|}{dt} \right)^3 + \right. \\ \left. + |z| \frac{d|z|}{dt} (\omega - \dot{\varphi})^2 \right] + b_5 \left[ 3 \left( \frac{d|z|}{dt} \right)^2 + |z|^2 (\omega - \dot{\varphi})^2 \right] + 3b_6 |z| \frac{d|z|}{dt},$$

$$F_2 \left( |z|, \frac{d|z|}{dt}, \omega - \dot{\varphi} \right) = (\omega - \dot{\varphi}) \left\{ b_3 + b_4 \left[ \left( \frac{d|z|}{dt} \right)^2 + |z|^2 (\omega - \dot{\varphi})^2 \right] + \right. \\ \left. + 2b_5 |z| \frac{d|z|}{dt} + b_6 |z|^2 \right\},$$

gdzie

$$(2.5) \quad b_1 = \frac{12\pi r^4}{ml^3} a_1, \quad b_2 = \frac{12^3 \pi r^4}{ml^7} \frac{r^2}{2} a_2,$$

$$b_3 = \frac{12\pi r^4}{ml^3} a_3, \quad b_4 = \frac{12^3 \pi r^4}{ml^7} \frac{r^2}{2} a_4,$$

$$b_5 = \frac{12^3 \pi r^4}{ml^7} \frac{r^2}{6} a_5, \quad b_6 = \frac{12^3 \pi r^4}{ml^7} \frac{r^2}{6} a_6.$$

## 3. DRGANIA SAMOWZBUDNE

Równanie (2.2) ma ściśle rozwiązanie szczególne [5]:

$$(3.1) \quad z = B e^{i\alpha t},$$

opisujące drgania samowzbudne wału, wywołane działaniem tarcia wewnętrznego (precesja asynchroniczna). Amplitudę  $B$  i prędkość obrotową precesji  $\alpha$  wyznacza się z następującego równania:

$$(3.2) \quad B [F_1(B, 0, \omega - \alpha) - \alpha^2 + ai\alpha - iF_2(B, 0, \omega - \alpha)] = 0.$$

Dla charakterystyki (2.1) zależność (3.2) można przedstawić w postaci następującego układu równań algebraicznych:

$$(3.3) \quad [b_2 + b_5(\omega - \alpha)^2] B^2 + b_1 - \alpha^2 = 0, \\ (\omega - \alpha) [b_4(\omega - \alpha)^2 + b_6] B^2 + b_3(\omega - \alpha) - a\alpha = 0.$$

Niewiadomymi w tym układzie równań są: amplituda  $B$  i częstość precesji  $\alpha$ . Traktując prędkość obrotową wału  $\omega$  jako parametr układu równań (3.3) można wyznaczyć zależność między amplitudą a prędkością obrotową wału oraz zależność między częstością precesji i prędkością obrotową wału.

Przekształćmy równania (3.3) do następującej postaci:

$$(3.4) \quad b_4(\omega - \alpha)^5 - 2\omega b_4(\omega - \alpha)^4 + (\omega - \alpha)^3 [b_5(a + b_3) + b_4(\omega^2 - b_1) + b_6] - \\ - \omega(\omega - \alpha)^2(2b_6 + ab_5) + (\omega - \alpha) [b_6(\omega^2 - b_1) + b_2(a + b_3)] - a\omega b_2 = 0, \\ B^2 = \frac{b_1 - (\omega - \alpha)^2 + 2\omega(\omega - \alpha) - \omega^2}{b_2 + b_5(\omega - \alpha)^2}.$$

Wyrażenie stojące z lewej strony równania (3.4)<sub>1</sub> jest wielomianem piątego stopnia względem różnicy  $\omega - \alpha$ . Równanie (3.4) może więc mieć od jednego do pięciu rozwiązań  $\omega - \alpha$ . Dla każdej wartości, spełniającej równanie (3.4)<sub>1</sub>, wyznacza się z (3.4)<sub>2</sub> wartość  $B$  (wyrażenie stojące z prawej strony (3.4)<sub>2</sub> może przy pewnych wartościach  $\omega - \alpha$  okazać się ujemne; wtedy  $B$  rzeczywiste nie istnieje<sup>1)</sup>). Powyższe fakty oznaczają, że dla ustalonych wartości współczynników  $b_1, \dots, b_6, a, \omega$  może istnieć od zera do pięciu rozwiązań szczególnych (3.1) o różnych amplitudach  $B$  i częstościach  $\alpha$ .

Z równań (3.3) wynika, że dla wartości

$$(3.5) \quad \alpha = \frac{b_3 \omega}{a + b_3} = \pm \sqrt{b_1}$$

amplituda  $B = 0$ . Krytyczną wartość prędkości obrotowej wału, przy której zależność (3.5) ma miejsce, oznaczamy

$$(3.6) \quad \omega_{kr} = \frac{a + b_3}{b_3} \sqrt{b_1}.$$

W dalszej części pracy wykazemy, że przy tej wartości prędkości obrotowej wału następuje utrata stateczności prostoliniowej formy wału i powstają drgania samowzbudne.

<sup>1)</sup> Zakłada się, że  $b_2 + b_5(\omega - \alpha)^2 \neq 0$ .

## 4. BADANIE STATECZNOŚCI DRGAŃ SAMOWZBUDNYCH

Analizę stateczności rozwiązania (3.1) układu równań różniczkowych (2.2) przeprowadza się metodą wyprowadzoną w [6], badając przebieg funkcji  $dB/dt$  na płaszczyźnie fazowej  $B$ ,  $dB/dt$  w otoczeniu punktów  $B = \text{const}$ . W tym celu zakłada się powolną zmienność amplitudy  $B$  i fazy  $\beta$ :

$$(4.1) \quad z = B(t) e^{i[\alpha t + \beta(t)]},$$

$$(4.2) \quad \dot{z} = [\dot{B} + Bi(\alpha + \dot{\beta})] e^{i[\alpha t + \beta(t)]},$$

$$(4.3) \quad \ddot{z} = \alpha [2\dot{B}i - B(\alpha + 2\dot{\beta})] e^{i[\alpha t + \beta(t)]}.$$

Po podstawieniu powyższych zależności do równania (2.2) otrzymujemy

$$(4.4) \quad \frac{dB}{dt} = \frac{B}{4\alpha^2 + a^2} \{2\alpha [F_2(B, 0, \omega - \alpha) - a\alpha] - a [F_1(B, 0, \omega - \alpha) - \alpha^2]\} \equiv \Phi(B),$$

$$(4.5) \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\alpha}{4\alpha^2 + a^2} \{a [F_2(B, 0, \omega - \alpha) - a\alpha] + 2\alpha [F_1(B, 0, \omega - \alpha) - \alpha^2]\}.$$

Na podstawie przebiegu funkcji  $\Phi(B)$  na płaszczyźnie fazowej ( $B, dB/dt$ ) wnioskujemy, które rozwiązania (3.1) z amplitudami  $B = \text{const}$  i częstotściami  $\alpha = \text{const}$ , wyznaczonymi z równań (3.3), są stateczne, które niestateczne (rys. 1).

Warunek stateczności można zapisać następująco:

$$(4.6) \quad \left[ \frac{d}{dB} \Phi(B) \right]_{\substack{B = \text{const} \\ \alpha = \text{const}}} < 0.$$

Po uwzględnieniu zależności (2.4) i (3.1) i przeprowadzeniu różniczkowania kryterium stateczności dla rozwiązania (3.1) o amplitudzie  $B = \text{const}$  i częstotści  $\alpha = \text{const}$  można zapisać w następującej postaci:

$$(4.7) \quad 2\alpha(\omega - \alpha) [b_4(\omega - \alpha)^2 + b_6] < a[b_2 + b_5(\omega - \alpha)^2]$$

lub uwzględniając (3.3)

$$(4.8) \quad a(\alpha^2 + b_1) < 2b_3\alpha(\omega - \alpha).$$

Należy zwrócić uwagę, że funkcja stojąca z lewej strony nierówności (4.6) nie jest ciągłą funkcją  $B$ , ponadto jest niejednoznaczna; stąd możliwość występowania kilku kolejnych punktów  $B = \text{const}$  statecznych lub niestatecznych. Zależność  $\alpha(B)$  można wyznaczyć z pierwszego z równań (3.3):

$$(4.9) \quad \alpha(B) = \frac{b_5\omega B^2 \mp \sqrt{b_5 B^2(\omega^2 - b_1) - b_2 b_5 B^4 + b_2 B^2 + b_1}}{b_5 B^2 - 1}.$$

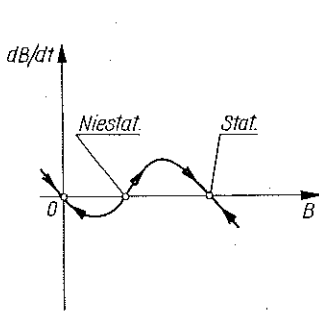
Stąd widać, że funkcja  $\alpha(B)$  ma dwa warianty dla górnego i dolnego znaku w (4.9). Gdy  $B^2 = 1/b_5$ , wtedy  $\alpha = \infty$ , gdy  $B^2 = -b_1/(b_2 + b_5\omega^2)$ , wtedy  $(\omega - \alpha)/\alpha = \infty$  (wariant dolnych znaków). Punkty  $B^2 = 1/b_5$  i  $B^2 = -b_1/(b_2 + b_5\omega^2)$  wyznaczają na osi  $B$  punkty nieciągłości funkcji  $\Phi$  (rys. 2).

Zbadamy stateczność rozwiązania zerowego równania (2.2), czyli  $B=0$ . Stateczność rozwiązania zerowego oznacza stateczność prostoliniowej formy wału, czyli stateczność czysto wirującego ruchu.

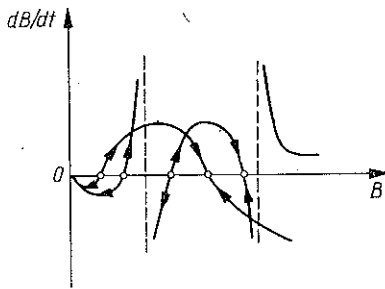
Uwzględniając zależności (3.3) nierówność (4.6) zapisujemy następująco:

$$(4.10) \quad \frac{d}{dB} \left[ \frac{B}{4\alpha^2 + a^2} \{ B^2 [2\alpha(\omega - \alpha)^3 b_4 + 2\alpha(\omega - \alpha) b_6 - ab_5(\omega - \alpha)^2 - ab_2] + \right. \\ \left. + 2\alpha(\omega - \alpha) b_3 - a\alpha^2 - ab_1 \} \right].$$

Wyrażenie wewnątrz dużych nawiasów kwadratowych przedstawia wielomian trzeciego stopnia względem  $B$ , mający jedno miejsce zerowe  $B=0$  lub trzy miejsca zerowe rzeczywiste:  $B=0$  oraz pierwiastek dodatni i pierwiastek ujemny. Interesuje



Rys. 1



Rys. 2

nas tylko wartość  $B=0$  i dodatni pierwiastek rzeczywisty. Warunkiem stateczności rozwiązania (3.1) z amplitudą  $B$  będącą tym dodatnim pierwiastkiem jest przedstawiona wyżej nierówność (4.7), czy też równoważna jej nierówność (4.8) [współczynnik przy  $B^3$  w (4.10) ujemny], a warunkiem stateczności rozwiązania zerowego równania (2.2) ( $B=0$ ) jest nierówność

$$(4.11) \quad 2\alpha(\omega - \alpha)b_3 - a\alpha^2 - ab_1 < 0$$

(współczynnik przy  $B$  ujemny). Uwzględniając zależności (3.3), z których wynika, że dla  $B=0$   $\alpha^2 = b_1$ , kryterium stateczności rozwiązania zerowego przedstawić można następująco:

$$(4.12) \quad |\omega| < \frac{a+b_3}{b_3} \sqrt{b_1},$$

czyli

$$(4.13) \quad \omega < \omega_{kr}.$$

Warunek (4.13) jest identyczny z warunkiem stateczności rozwiązania zerowego równania (3.1) w wersji liniowej, wyprowadzony np. z kryterium HURWITZA [2].

## 5. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

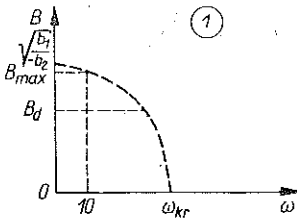
Rozpatrzmy kilka przypadków szczególnych postaci charakterystyki (2.1), dla których rozwiązania układu równań (3.3) można otrzymać w postaci analitycznej. W przypadkach bardziej skomplikowanych obliczenia przeprowadzono za pomocą maszyny cyfrowej.

## 5.1. Przypadek liniowego tarcia wewnętrznego i nieliniowej sprężystości

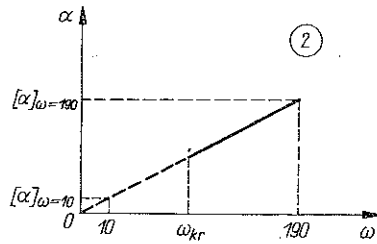
Rozpatrzmy przypadek, gdy we wzorze (2.1)  $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ , czyli  $b_4 = b_5 = b_6 = 0$ . Uwzględniając (2.4) i (2.5), z równań (3.3) otrzymujemy parę rozwiązań (precesja prosta asynchroniczna):

$$(5.1) \quad \alpha = \omega \frac{b_3}{a + b_3}, \quad B^2 = \frac{\alpha^2 - b_1}{b_2}.$$

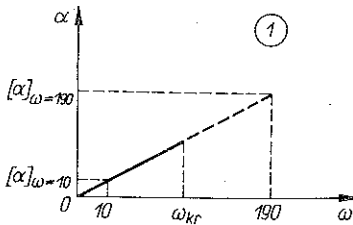
Funkcję  $B = B(\omega)$  i  $\alpha = \alpha(\omega)$  ilustrują rysunki 3 – 6. Na rysunkach tych uwzględniono wariant sztywnej charakterystyki sprężystości ( $b_2 > 0$ ) i miękkiej charakterystyki ( $b_2 < 0$ ). W tabelicy 1 ujęto szereg danych liczbowych dla rozpatrywanego



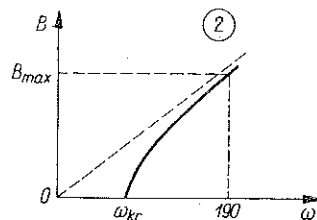
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

przypadku (lp. 1 – 7). W przypadku miękkiej charakterystyki sprężystości model (1) jest poprawny tylko w zakresie niemalejących wartości  $\sigma$  względem  $\varepsilon$ , czyli dla  $\varepsilon < a_1 / -3a_2$ , co odpowiada przedziałowi  $B < \sqrt{b_1 / -3b_2} = B_d$ . Zaznaczone to zostało na rys. 3.

Z warunku stateczności (21) otrzymujemy

$$(5.2) \quad \omega > \omega_{kr} = \frac{a + b_3}{b_3} \sqrt{b_1},$$

stąd wniosek, że drgania samowzbudne w przypadku miękkiej charakterystyki sprężystości są niestateczne dla całego przedziału; drgania samowzbudne (3.1) w przypadku sztywnej charakterystyki są stateczne. W obu przypadkach rozwiązanie zerowe jest stateczne tylko do wartości  $\omega_{kr}$ . Na rysunkach 3 i 4 linią ciągłą oznaczono rozwiązanie stateczne, linią przerywaną — rozwiązanie niestateczne.

### 5.2. Przypadek liniowej sprężystości

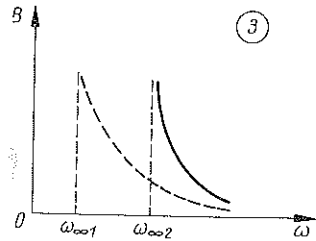
Rozważmy przypadek  $a_2 = a_5 = 0$  w (2.1), co odpowiada wartościom  $b_2 = b_5 = 0$ , oraz założmy dodatkowo, że tłumienie zewnętrzne jest pomijalne ( $a = 0$ ). Z równań (3.3) otrzymujemy trzy pary rozwiązań (precesja prosta synchroniczna, precesja prosta asynchroniczna i precesja odwrotna):

$$(5.3) \quad \alpha = \omega, \quad B = \sqrt{-\frac{b_3}{b_6}}$$

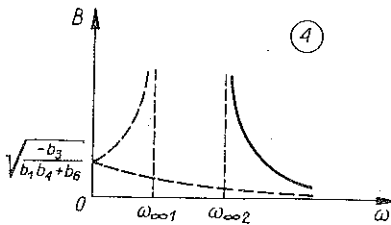
(rozwiązanie niestateczne) oraz

$$(5.4) \quad \alpha = \pm \sqrt{b_1}, \quad B = \sqrt{\frac{-b_3}{b_4(\omega \mp b_1)^2 + b_6}}$$

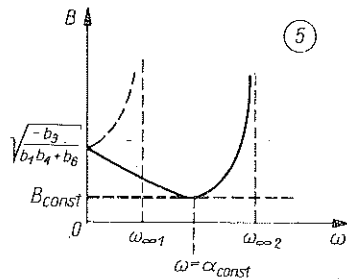
(dla górnych znaków rozwiązanie stateczne, dla dolnych niestateczne). Oczywiście funkcje te istnieją w zakresie rzeczywistym, gdy odpowiednie wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie. W tabelicy 1 przedstawiono dane liczbowe i podstawowe wyniki rozpatrzonych przypadków (lp. 8 – 11). Na rysunkach 7 – 11 przedstawiono odpowiednie wykresy  $B(\omega)$  i  $\alpha(\omega)$ . Jak widać, w przypadku tym istnieje jedno rozwiązanie stałe,  $\alpha = \text{const}$ ,  $B = \text{const}$ , niezależnie od wartości prędkości obrotowej wału, oraz para rozwiązań, w których dla określonych wartości prędkości obrotowej wału amplitudy  $B$  dążą do nieskończoności.



Rys. 7



Rys. 8

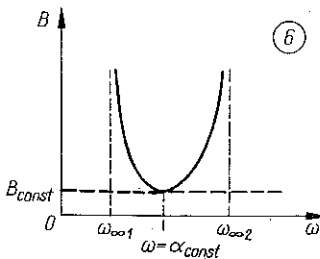


Rys. 9

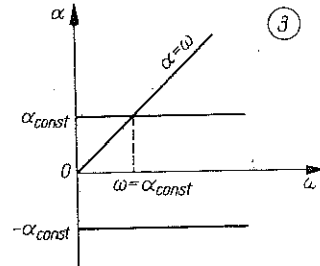
Efekt ten w przypadku istnienia tłumienia zewnętrznego ( $a \neq 0$ ) byłby zmniejszony. Niemniej w otoczeniu prędkości obrotowej wału  $\omega_{\infty 1}$ ,  $\omega_{\infty 2}$  (rysunki 7 – 10) również i w przypadku  $a \neq 0$  należy oczekiwać znacznego wzrostu amplitud drgań samowzbudnych.

Tablica 1

Lp.	Dane							Wyniki	
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$a$	Typ krzywej	Typ krzywej
	$[s^{-2}]$	$[mm^{-2} s^{-2}]$	$[s^{-1}]$	$[mm^{-2} s]$	$[mm^{-2}]$	$[mm^{-2} s^{-1}]$	$[s^{-1}]$	$B(\omega)$	$\alpha(\omega)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1600	-100	250	0	0	0	100	1* <sup>1)</sup> rys. 3	1* rys. 5
2	1600	-1	250	0	0	0	100	1* rys. 3	1* rys. 5
3	1600	-1	250	0	0	0	1	1* rys. 3	1* rys. 5
4	1600	-100	250	0	0	0	1	1* rys. 3	1* rys. 5
5	1600	50	250	0	0	0	1	2* rys. 4	2* rys. 6
6	1600	1	250	0	0	0	1	2* rys. 4	2* rys. 6
7	1600	1	250	0	0	0	100	2* rys. 4	2* rys. 6
8	1600	0	250	-0,1	0	360	0	3* rys. 7	3* rys. 11
9	1600	0	250	-1	0	400	0	4* rys. 8	3* rys. 11
10	1600	0	250	0,1	0	-360	0	5* rys. 9	3* rys. 11
11	1600	0	250	1	0	-400	0	6* rys. 10	3* rys. 11
12	1600	0	250	-50	-100	0	0	7* rys. 12	4* rys. 13
13	1600	0	250	50	1	0	0	7* rys. 12	4* rys. 13
14	1600	-100	250	0	0	-50	0	1* rys. 3	1* rys. 5
15	1600	50	250	0	0	-50	0	2* rys. 4	2* rys. 6
16	1600	-1	250	0	1	0	10	8* rys. 14	2* rys. 6
17	1600	-10	250	0	1	0	10	9* rys. 15	2* rys. 6
18	1600	50	250	0	-10	0	10	10* rys. 16	2* rys. 6
19	1600	50	250	0	1	0	10	11* rys. 17	2* rys. 6
20	1600	1	250	0	-1	0	10	12* rys. 18	2* rys. 6
21	1600	-100	250	0	-100	0	10	13* rys. 19	2* rys. 6



Rys. 10



Rys. 11

5.3. Przypadek  $a_2 = a_6 = a = 0$ 

W przypadku tym mamy  $b_2 = b_6 = a = 0$ . Z równań (3.3) otrzymujemy dwie pary rozwiązań (precesja prosta i odwrotna):

$$(5.5) \quad \alpha = \pm \sqrt{b_1 - \frac{b_3 b_5}{b_4}}, \quad B = \sqrt{\frac{-b_3}{b_4 \left( \omega \mp \sqrt{b_1 - \frac{b_3 b_5}{b_4}} \right)^2}}$$

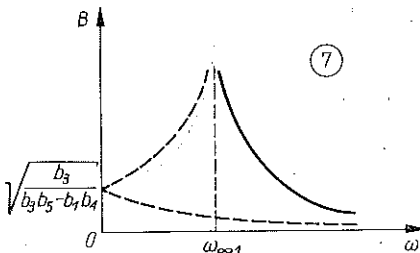
<sup>1)</sup> Numery z gwiazdkami w tablicach 1, 2 i 3 odpowiadają numerom w kółeczkach na rysunkach.



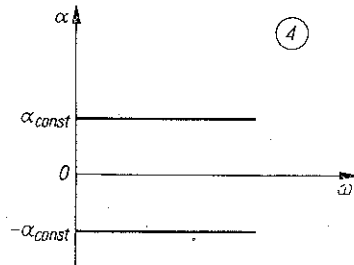
Tablica 1

Wyniki									
$\omega_{kr}$	$B_{max}$ w zakresie $10 \leq \omega \leq 190$	$\alpha_{const}$	$B_{const}$	$[\alpha]_{\omega=10}$	$[\alpha]_{\omega=190}$	$\omega_{\infty 1}$	$\omega_{\infty 2}$	$[B]_{\omega=10}$	$[B]_{\omega=190}$
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
56	3,95			7,15	135,8			3,88	
56	39,5			7,15	135,8			38,8	
40,16	39,5			9,95	189			38,8	
40,16	3,95			9,95	189			3,88	
56	75,5			9,95	189				26,35
56	169			9,95	189				186,2
56	156			7,15	135,8				186,2
	$\infty$	$\pm 40$		10	190	20	100		
	$\infty$	$\pm 40$		10	190	20	60		
	$\infty$	$\pm 40$	0,835	10	190	20	100		
	$\infty$	$\pm 40$	0,793	10	190	20	60		
	$\infty$	$\pm 33,20$					33,20	0,0962 0,0519	0,0143 0,0101
	$\infty$	$\pm 39,93$					39,93	0,0750 0,0450	0,0149 0,0096
40	3,88			10	190			3,88	
40	26,4			10	190				26,4
41,6	$\infty$			9,62	182,5	26		42,1	
41,6	$\infty$			9,62	182,5	82,1		39,2	27,2
41,6	$\infty$			9,62	182,5	58,1			
41,6	17,55			9,62	182,5				17,55
41,6	$\infty$			9,62	182,5	26			
41,6	3,9			9,62	182,5			3,9	

Rozwiązania te istnieją oczywiście, gdy wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie. W tabelicy 1 zestawiono dane dotyczące tego przypadku (lp. 12 i 13), a na rysunkach 12 i 13 przedstawiono odpowiednie krzywe  $\beta=B(\omega)$  i  $\alpha=\alpha(\omega)$ .



Rys. 12



Rys. 13

Z kryterium stateczności (4.5) wynika, że powinna być spełniona nierówność  $\omega > \sqrt{b_1 - (b_3 b_5 / b_4)}$  i tylko rozwiązania z amplitudami oznaczonymi na rys. 12 linią ciągłą są stateczne, pozostałe są niestateczne. W rozpatrzonym przypadku

również występuje zjawisko nieograniczonego wzrostu amplitudy drgań samowzbudnych przy pewnej wartości prędkości obrotowej wału. Zwróćmy uwagę, że drgania samowzbudne przebiegają tu ze stałą częstością  $\alpha_{\text{const}}$ . Precesja prosta jest stateczna dla dużych prędkości obrotowych wału, precesja odwrotna jest niestateczna w całym zakresie prędkości.

#### 5.4. Przypadek $a_4 = a_5 = a = 0$

W przypadku tym mamy  $b_4 = b_5 = a = 0$ . Z równań (3.3) otrzymuje się parę rozwiązań (precesja prosta synchroniczna):

$$(5.6) \quad \alpha = \omega, \quad B = \sqrt{\frac{\omega^2 - b_1}{b_2}}$$

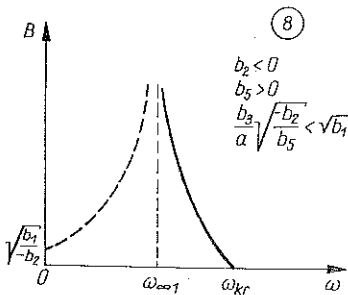
Jak widać, rozwiązanie to nie różni się od rozwiązania otrzymanego w p. 5.1. dla przypadku liniowego tarcia wewnętrznego. A więc współczynnik  $a_6$  nie wpływa na wartości amplitud i częstość drgań samowzbudnych. Odpowiednie dane liczbowe i wyniki dla tego przypadku zestawiono w tablicy 1 (lp. 14 i 15). W odróżnieniu od rozwiązania otrzymanego w 5.1 rozwiązanie (5.6) jest jednak niestateczne.

#### 5.5. Przypadek $a_4 = a_6 = 0$

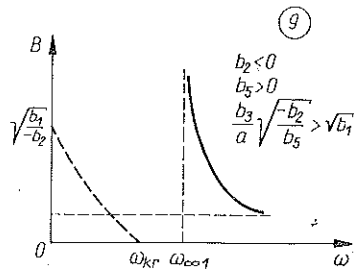
W przypadku tym mamy  $b_4 = b_6 = 0$ . Z równań (3.3) otrzymuje się parę rozwiązań (precesja prosta asynchroniczna):

$$(5.7) \quad \alpha = \frac{b_3 \omega}{a + b_3}, \quad B = \sqrt{\frac{b_3^2 \omega^2 - b_1 (a + b_3)^2}{b_2 (a + b_3)^2 + b_5 a^2 \omega^2}}$$

Rozwiązanie to istnieje, gdy wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie. W tablicy 1 ujęte zostały rozpatrzone przypadki liczbowe (lp. 16–21), a na rysunkach 14–19 przedstawiono wykresy funkcji  $B = B(\omega)$ .

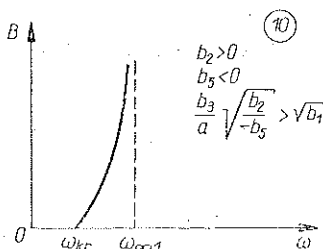


Rys. 14

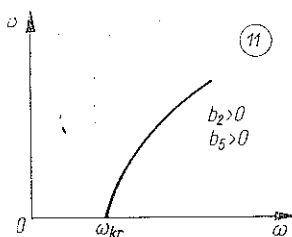


Rys. 15

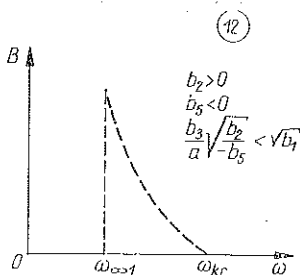
Z nierówności (4.7) wynika, które z rozwiązań dają stateczne amplitudy (linie ciągłe na rysunkach 14–19), a które niestateczne (linie przerywane). Jak widać, w rozpatrywanym przypadku przy pewnych wartościach prędkości obrotowych



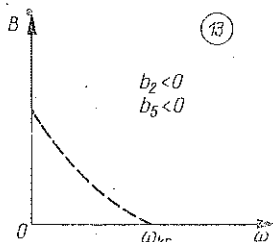
Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19

wału amplitudy drgań samowzbudnych mają tendencje do nieograniczonego wzrostu. Zwróćmy uwagę, że nawet istnienie tłumienia zewnętrznego w układzie ( $a \neq 0$ ) nie likwiduje tego zjawiska.

### 5.6. Przypadek bez tłumienia zewnętrznego i bez liniowej części charakterystyki tarcia wewnętrznego

Rozpatrzmy przypadek  $a = a_3 = 0$ , co odpowiada  $a = b_3 = 0$ . Z równań (3.3) otrzymujemy w tym przypadku trzy pary rozwiązań (precesja prosta synchroniczna, precesja prosta asynchroniczna i precesja odwrotna lub prosta asynchroniczna):

$$(5.8) \quad \alpha = \omega, \quad B = \sqrt{\frac{\omega^2 - b_1}{b_2}},$$

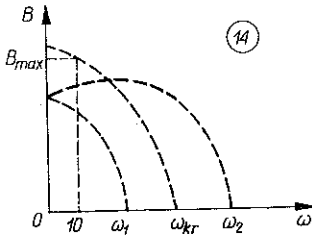
$$\alpha = \omega \pm \sqrt{\frac{-b_6}{b_4}}, \quad B = \sqrt{\frac{\left[ \left( \omega \pm \sqrt{\frac{-b_6}{b_4}} \right)^2 - b_1 \right] b_4}{b_2 b_4 - b_5 b_6}}.$$

Oczywiście rozwiązania te istnieją, gdy odpowiednie wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie a mianowniki różne od zera. W tabelicy 2 zestawiono dane liczbowe rozpatrzonych przypadków, a na rysunkach 20 – 38 przedstawiono wykresy funkcji  $B = B(\omega)$  i  $\alpha = \alpha(\omega)$ .

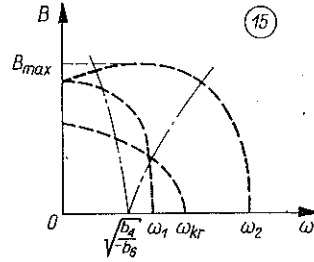
Jak widać, wykresy rozwiązań (5.8) przedstawiają elipsy lub hiperbole w zależności od parametrów  $b_2, b_4, b_5$  i  $b_6$ . Maksymalne wartości amplitud  $B_{\max}$  zależą głównie od wartości współczynników  $b_2$  i  $b_5$  ( $B_{\max}$  rośnie, gdy wartości  $b_2$  i  $b_5$  maleją). Z warunku (4.7) wynika wniosek, że rozwiązania (5.8) są niestateczne.

Tablica 2

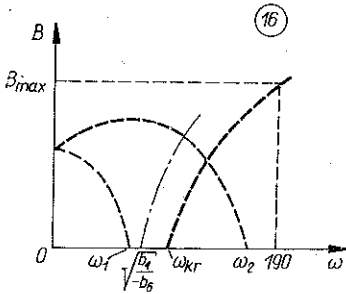
Lp.	Dane										Wyniki				
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$a$	Typ krzywej	Typ krzywej	$\omega_{kr}$	$P_{max}$ w zakresie $10 \leq \omega \leq 190$	$[\alpha]_{\omega=10}$	$[\alpha]_{\omega=190}$	$\omega_1$	$\omega_2$
	$[s^{-1}]$	$[mm^{-2} s^{-2}]$	$[s^{-1}]$	$[mm^{-2} s]$	$[mm^{-2}]$	$[mm^{-2} s^{-1}]$	$[s^{-1}]$	$B(\omega)$	$\alpha(\omega)$	$[s^{-1}]$	[mm]	$[s^{-1}]$	$[s^{-1}]$	$[s^{-1}]$	$[s^{-1}]$
1	1600	-100	0	1	-100	-400	0	14* rys. 20	5* rys. 38	40	3,88	10	190	20	60
2	1600	-450	0	1	1	-400	0	15* rys. 21	5* rys. 38	40	5,68	10	190	20	60
3	1600	50	0	1	-1	-400	0	16* rys. 22	5* rys. 38	40	26,35	10	190	20	60
4	1600	-100	0	0,1	-100	-360	0	17* rys. 23	5* rys. 38	40	3,88	10	190	20	100
5	1600	-450	0	0,1	0,1	-360	0	18* rys. 24	5* rys. 38	40	4,23	10	190	20	100
6	1600	50	0	0,1	-1	-360	0	19* rys. 25	5* rys. 38	40	26,35	10	190	20	100
7	1600	-100	0	0,01	0,0001	-100	0	20* rys. 26	5* rys. 38	40	4,03	10	190	60	140
8	1600	-100	0	0,01	-100	-100	0	21* rys. 27	5* rys. 38	40	3,88	10	190	60	140
9	1600	50	0	0,01	-1	-100	0	22* rys. 28	5* rys. 38	40	26,35	10	190	60	140
10	1600	-100	0	1	1	-400	0	23* rys. 29	5* rys. 38	40	11,63	10	190	20	60
11	1600	50	0	1	1	-400	0	24* rys. 30	5* rys. 38	40	26,35	10	190	20	60
12	1600	50	0	1	-0,1	-400	0	25* rys. 31	5* rys. 38	40	63,8	10	190	20	60
13	1600	50	0	0,1	-0,0001	-360	0	26* rys. 32	5* rys. 38	40	28,5	10	190	20	100
14	1600	50	0	0,1	1	-360	0	27* rys. 33	5* rys. 38	40	26,35	10	190	20	100
15	1600	-100	0	0,1	1	-360	0	28* rys. 34	5* rys. 38	40	4,19	10	190	20	100
16	1600	50	0	0,01	-0,0001	-100	0	29* rys. 35	5* rys. 38	40	40,7	10	190	60	140
17	1600	50	0	0,01	1	-100	0	30* rys. 36	5* rys. 38	40	26,35	10	190	60	140
18	1600	-100	0	0,01	1	-100	0	31* rys. 37	5* rys. 38	40	4,19	10	190	60	140



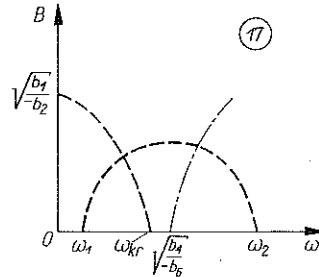
Rys. 20



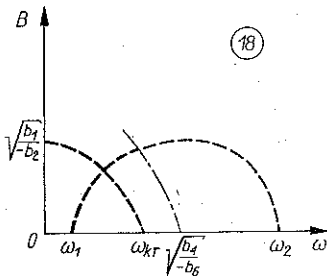
Rds. 21



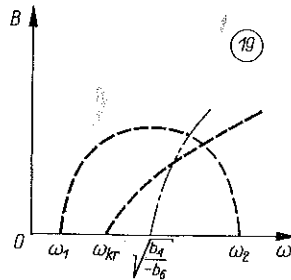
Rys. 22



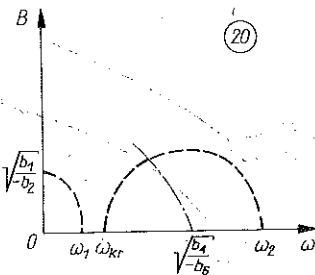
Rys. 23



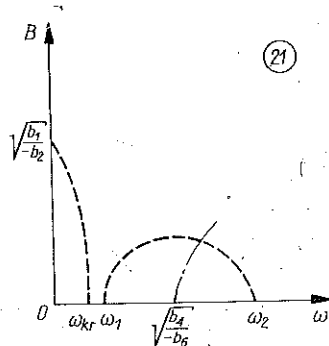
Rys. 24



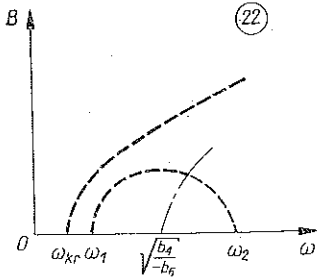
Rys. 25



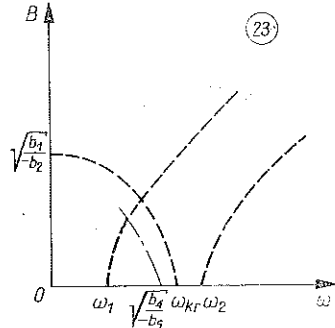
Rys. 26



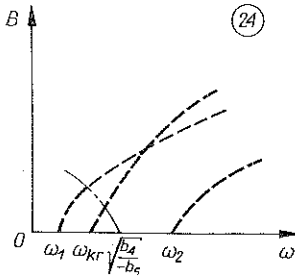
Rys. 27



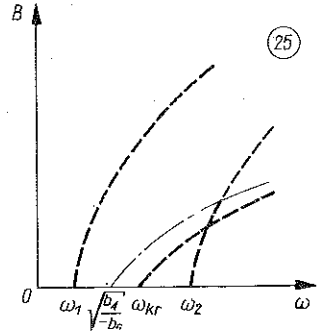
Rys. 28



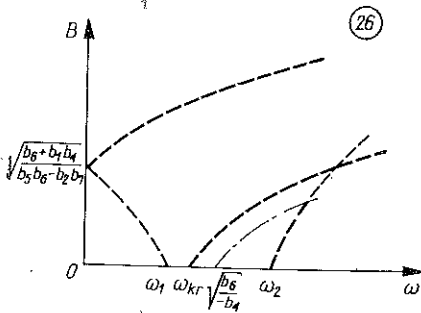
Rys. 29



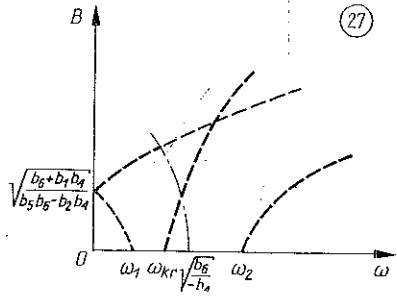
Rys. 30



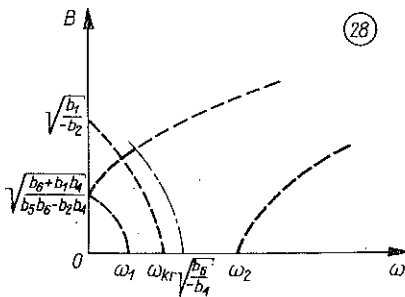
Rys. 31



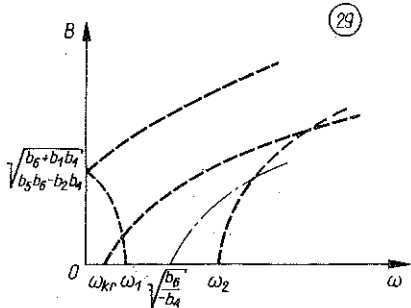
Rys. 32



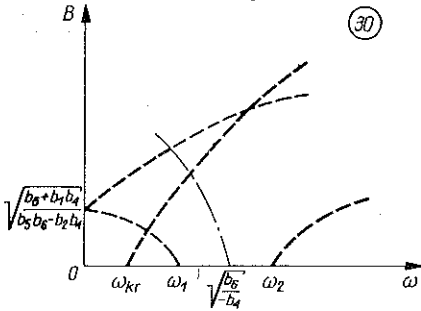
Rys. 33



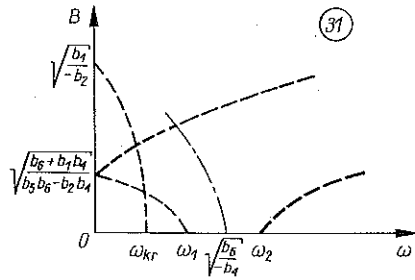
Rys. 34



Rys. 35



Rys. 36

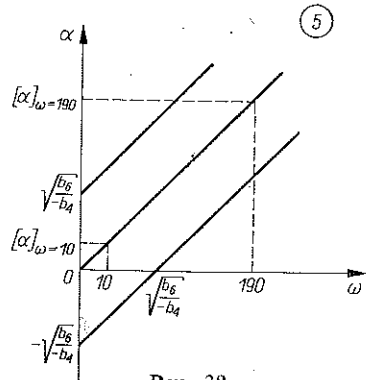


Rys. 37

Niewątpliwie tłumienie zewnętrzne ( $a \neq 0$ ) zmieniłoby nieco obraz krzywych  $B(\omega)$  i ich stateczność, co można stwierdzić na podstawie wyników następnie rozpatrzonych przypadków.

### 5.7. Przypadek ogólny

Dla przypadków, gdy wszystkie współczynniki w wyrażeniu (2.1) są różne od zera, przeprowadzono szereg obliczeń numerycznych na podstawie równań (3.4) dla różnych wariantów wartości współczynników  $a, b_1, \dots, b_6$  i parametru  $\omega$ . Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej CII-10070-256 Kocetets przy zastosowaniu języka Fortran IV. Przyjęte dane liczbowe i zasadnicze wyniki zostały zestawione w tabelicy 3. Na podstawie analizy otrzymanych wyników obliczeń numerycznych ustalono,

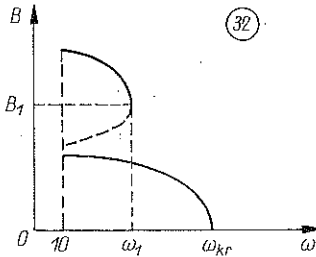


Rys. 38

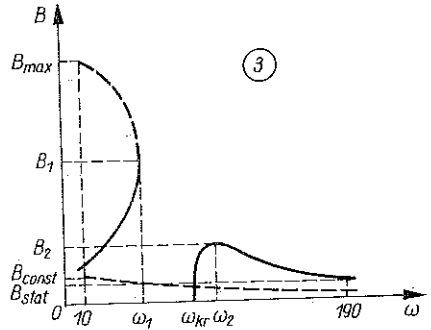
że istnieje kilkanaście typów funkcji  $B=B(\omega)$  oraz kilkanaście typów funkcji  $\alpha=\alpha(\omega)$ . Ilustrują to rysunki 39 – 59. Na rysunkach 39 – 49 liniami ciągłymi narysowano amplitudy rozwiązań statecznych, przerywanymi – niestatecznych.

W obliczeniach numerycznych rozważono szereg wariantów wartości parametrów  $a, b_2, \dots, b_6$ , przyjmując  $b_1 = \text{const} \equiv 1600 \text{ s}^{-2}$ . Ze względu na charakter sprężystości rozpatrzono charakterystyki miękkie ( $b_2 < 0$ ) i sztywne ( $b_2 > 0$ ). Ponieważ celem badań było znalezienie zależności między charakterystyką sprężystości i tarcia wewnętrznego w materiale wału a stanami ustalonymi drgań samowzbudnych, przeto w większości rozpatrzonych przypadków przyjęto, że współczynnik tłumienia zewnętrznego  $a$  jest mały w porównaniu ze współczynnikiem liniowej części charakterystyki tarcia wewnętrznego  $b_3$ . Wiadomo bowiem, że tłumienie zewnętrzne obniża amplitudy drgań i nieco zniekształca (wygładza) przebieg funkcji  $B=B(\omega)$  (por. rys. 40 i rys. 44, przypadki lp. 3 i 12). Otrzymano 13 różnych jakościowych wykresów krzywych  $B=B(\omega)$  (rysunki 3, 39 – 49), 10 dla miękkich charakterystyk sprężystości, 3 dla sztywnych. W większości przypadków miękkich charakterystyk, dla małych wartości prędkości obrotowej wału, istnieją (poza statecznym rozwiąza-

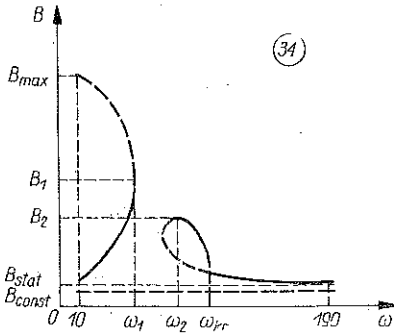
niem zerowym) również stateczne drgania samowzbudne (precesja prawie synchroniczna). W większości przypadków w przedziale  $\omega > \omega_{kr}$ , gdy rozwiązanie zerowe już jest niestateczne, istnieją stateczne drgania samowzbudne, których amplitudy maleją w miarę wzrostu prędkości obrotowej wału (precesja prosta o prawie stałej częstotliwości). W przypadku sztywnych charakterystyk w całym przedziale  $\omega$  istnieją niestateczne drgania samowzbudne o rosnących ze wzrostem  $\omega$  amplitudach (pre-



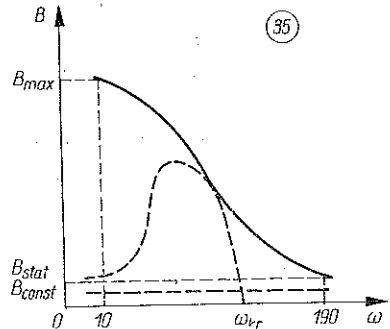
Rys. 39



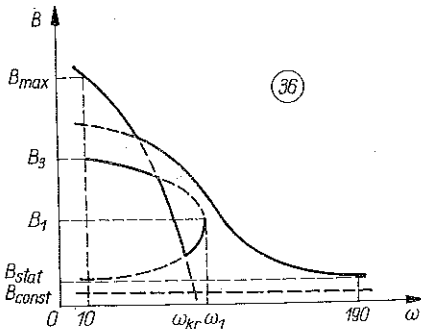
Rys. 40



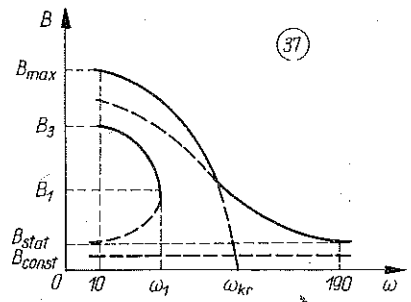
Rys. 41



Rys. 42



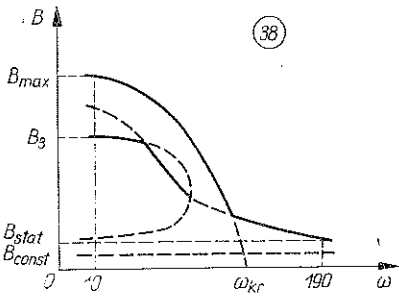
Rys. 43



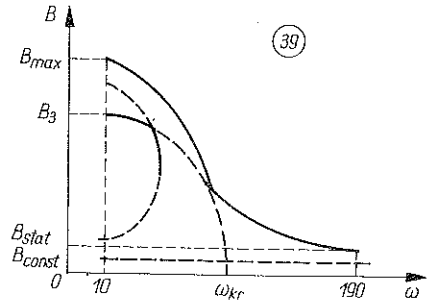
Rys. 44



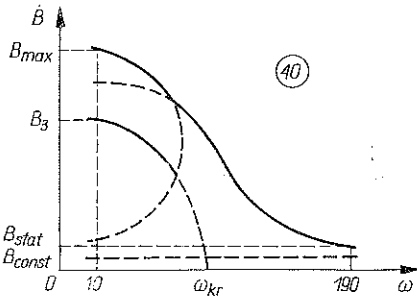
cesja prosta prawie synchroniczna). W większości przypadków nieliniowych charakterystyk istnieją niestateczne drgania samowzbudne (precesja odwrotna) o niewielkich, prawie stałych w całym zakresie  $\omega$  amplitudach (por.  $[B_{const}]_{\omega=10}$  i  $[B_{const}]_{\omega=190}$  w tablicy 3). Oznacza to, że wprawdzie dla  $\omega < \omega_{kr}$  rozwiązanie zerowe jest stateczne, jednak obszar stateczności jest niewielki i zewnętrzne zaburzenia ruchu mogą spowodować utratę stateczności czysto wirującego ruchu wału.



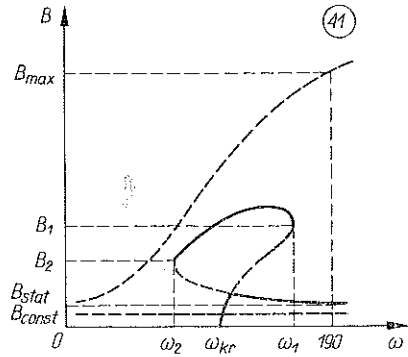
Rys. 45



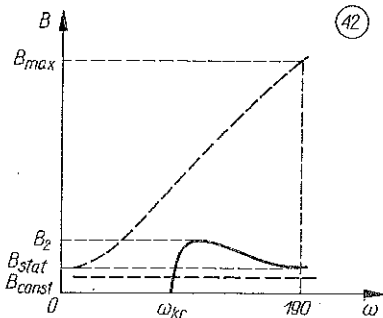
Rys. 46



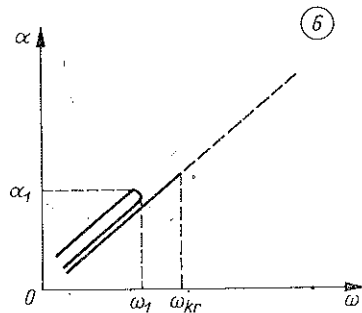
Rys. 47



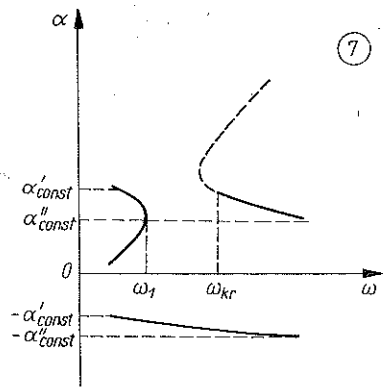
Rys. 48



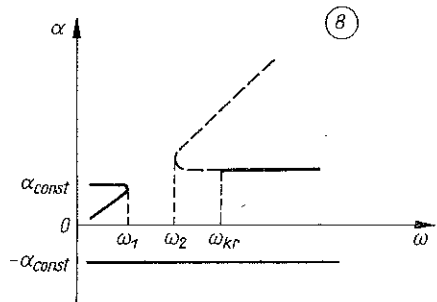
Rys. 49



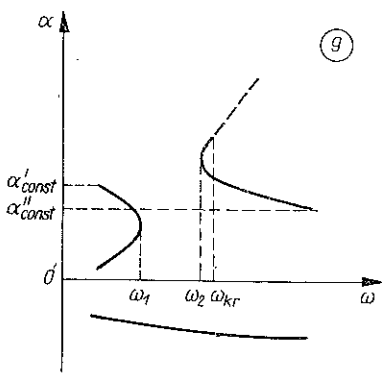
Rys. 50



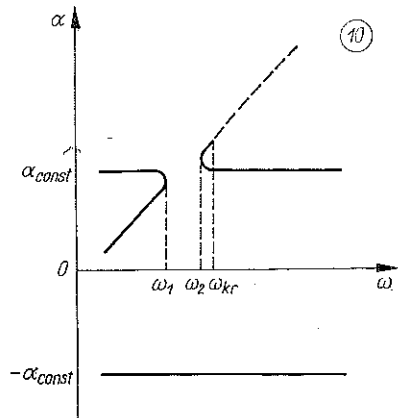
Rys. 51



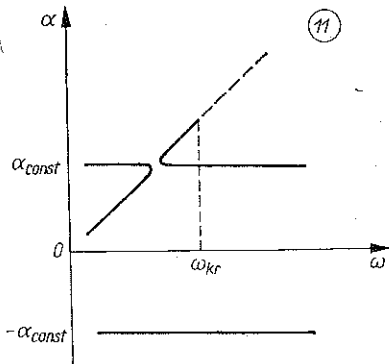
Rys. 52



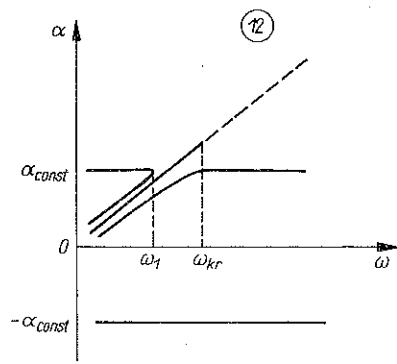
Rys. 53



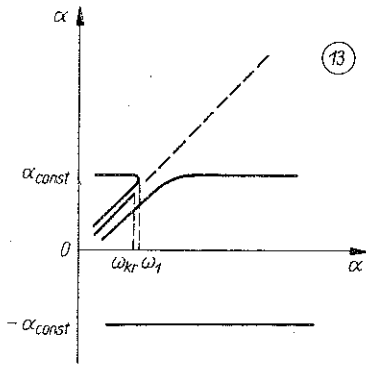
Rys. 54



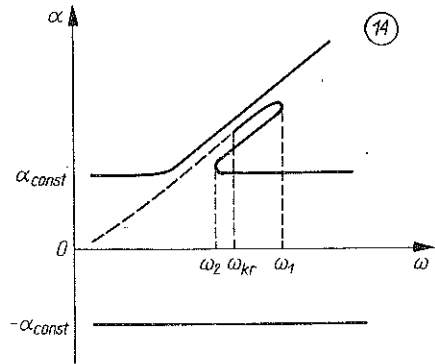
Rys. 55



Rys. 56



Rys. 57



Rys. 58

Przy małych wartościach  $a$  jedno z rozwiązań układu równań (3.3) jest następujące:

$$(5.9) \quad \alpha \approx \omega, \quad B \approx \sqrt{\frac{\omega^2 - b_1}{b_2}},$$

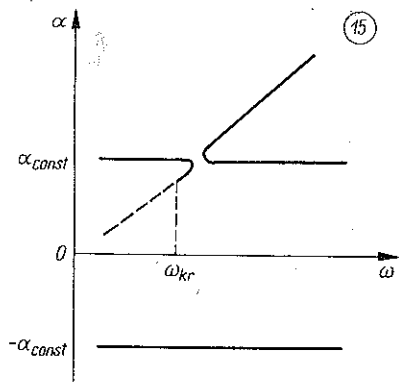
czyli rozwiązanie bliskie rozpatrzonemu wyżej rozwiązaniu w wariancie liniowego tarcia wewnętrznego. Rzeczywiście, na rysunkach 39 – 47 widać krzywe zbliżone do elips (miękką charakterystyką sprężystości —  $b_2 < 0$ ), a na rysunkach 48, 49 krzywe zbliżone do hiperbol (sztywna charakterystyka,  $b_2 > 0$ ).

Dla małych wartości współczynnika tłumienia zewnętrznego ( $a \approx 0$ ) pierwsze rozwiązanie opisuje funkcja (5.9), a równania (3.3) można przedstawić następująco:

$$(5.10) \quad [(\alpha^2 - b_1)b_4 + b_3b_5][b_4(\omega - \alpha)^2 + b_6] + b_3(b_2b_4 - b_5b_6) = 0.$$

Jeżeli  $b_2b_4 \approx b_5b_6$ , to dwa z rozwiązań tego równania będą następujące:

$$(5.11) \quad \alpha = \pm \sqrt{b_1 - \frac{b_3b_5}{b_4}}.$$



Rys. 59

Takie właśnie dwie wartości oznaczone w tabelicy 3 i na rysunkach 51 – 59 przez  $\alpha_{const}$  występują we wszystkich przypadkach, gdy  $b_4 = -50 \text{ m}^{-2} \text{ s}$  (por. przypadki rozpatrzone w punktach 4.2 i 4.3, rysunki 7 – 11, 12 i 13). Z wykresów przedstawionych na rysunkach 51 – 59 widać, że w otoczeniu wartości  $\omega_{kr}$  funkcje (5.9) i (5.11) nie są rozwiązaniami układu (3.3). Również zwiększenie wartości współczynnika tłumienia zewnętrznego zniekształca nieco obraz (por. rysunki 51 i 52, przypadki lp. 3 i 7 w tabelicy 3).

Tablica 3

Lp.	Dane							Wyniki				
	$b_1$ [s <sup>-2</sup> ]	$b_2$ [m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]	$b_3$ [s <sup>-1</sup> ]	$b_4$ [m <sup>-2</sup> s]	$b_5$ [m <sup>-2</sup> ]	$b_6$ [m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$a$ [s <sup>-1</sup> ]	Typ krzywej $B(\omega)$	Typ krzywej $\alpha(\omega)$	$\omega_{kr}$ [s <sup>-1</sup> ]	$B_{max}$ w zakresie 10 ≤ ω ≤ 190 [mm]	$[B_{total}]_{\omega=190}$ [mm]
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1600	-100	250	-1	-100	-1	1	1* rys. 3	1* rys. 5	40,16	3,881	
2	1600	-100	250	-1	-100	-50	1	32* rys. 39	6* rys. 50	40,16	3,871	
3	1600	-100	250	-50	-100	-1	100	33* rys. 40	7* rys. 51	56	1,094	0,01368
4	1600	-100	250	-50	-0,0001	-1	10	33* rys. 40	8* rys. 52	41,6	3,854	0,01483
5	1600	-100	250	-50	-100	-1	50	33* rys. 40	7* rys. 51	48	1,810	0,01398
6	1600	-100	250	-50	-100	-1	10	34* rys. 41	9* rys. 53	41,6	2,770	0,01420
7	1600	-100	250	-50	-100	-50	1	34* rys. 41	8* rys. 52	40,16	3,871	0,01232
8	1600	-100	100	-50	-100	-50	1	34* rys. 41	10* rys. 54	40,4	3,871	0,00926
9	1600	-1	250	-50	-100	-1	1	34* rys. 41	10* rys. 54	40,16	38,60	0,01425
10	1600	-1	250	-50	-0,0001	-1	1	35* rys. 42	11* rys. 55	40,16	38,73	0,01490
11	1600	-100	250	-50	-1	-1	1	36* rys. 43	12* rys. 56	40,16	3,877	0,01489
12	1600	-100	250	-50	-100	-1	1	37* rys. 44	12* rys. 56	40,16	3,872	0,01425
13	1600	-100	250	-50	0	-1	1	37* rys. 44	12* rys. 56	40,16	3,878	0,01489
14	1600	-100	250	-50	1	-1	1	38* rys. 45	12* rys. 56	40,16	3,892	0,01490
15	1600	-100	250	-50	10	-1	1	39* rys. 46	12* rys. 56	40,16	3,942	0,01496
16	1600	-100	250	-50	70	-1	1	40* rys. 47	13* rys. 57	40,16	4,291	0,01532
17	1600	1	250	-50	-100	-1	1	41* rys. 48	14* rys. 58	40,16	186,03	0,01425
18	1600	50	250	-50	-100	-1	1	41* rys. 48	14* rys. 58	40,16	26,89	0,01425
19	1600	0,01	250	-50	0,0001	-50	1	42* rys. 49	15* rys. 59	40,16	2344,8	0,01425

## 6. ZAKOŃCZENIE

W przedstawionej pracy zanalizowano kołowe drgania samowzbudne wirnika o dwóch stopniach swobody, powstające wskutek działania tarcia wewnętrznego w materiale wału.

Rozwiązanie (3.1) równania (2.2), opisujące kołową precesję wału, jest ścisłym rozwiązaniem szczególnym; prócz tego rozwiązania istnieje oczywiście szereg innych rozwiązań równania (2.2), opisujących inne rodzaje precesji wału. Można ich poszukiwać metodami przybliżonymi.

Mechanizm działania tarcia wewnętrznego, występującego przy odkształceniach części mechanicznych, nie został jeszcze w pełni wyjaśniony. Brak dotychczas ogólnej teorii, która ujmowałaby ilościowo wpływ wszystkich czynników na zjawiska, które

Tablica 3

Wyniki												
$\alpha = \text{const}$ [s <sup>-1</sup> ]	$B_{\text{const}, l_0=10}$ [mm]	$B_{\text{const}, l_0=190}$ [mm]	$[\alpha]_{l_0=10}$ [s <sup>-1</sup> ]	$[\alpha]_{l_0=190}$ [s <sup>-1</sup> ]	$\omega_1$ [s <sup>-1</sup> ]	$B_1$ [mm]	$\alpha_1$ [s <sup>-1</sup> ]	$\omega_2$ [s <sup>-1</sup> ]	$B_2$ [mm]	$\alpha_2$ [s <sup>-1</sup> ]	$B_3$ [mm]	$\alpha_3$ [s <sup>-1</sup> ]
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	22	24	25
			9,9576	189,68								
			10,020	189,99	29	2,6	28,3					
$\pm 28,049$ $\pm 33,812$	0,06253	0,01033	13,301	188,46	15	0,4197	22,8	61	0,05695	37,73		
$\pm 39,992$ $\pm 39,997$	0,04543	0,00976	10,719	189,54	36	0,501	40,2	42	0,542	39,63		
$\mp 30,83$ $\pm 33,48$	0,05716	0,01017	11,858	188,97	20	0,483	25,8	50	0,113	37,42		
$\pm 32,71$ $\pm 33,22$	0,05288	0,01005	10,963	189,51	27	0,676	29,6	40	0,554	37,95		
$\pm 37,38$	0,04093	0,00812	10,014	189,99	32	1,54	32,0	40	0,56	39,50		
$\pm 37,40$	0,02995	0,00622	10,015	189,99	36	1,18	36,2	40	0,56	39,51		
$\pm 33,14$	0,05190	0,01002	10,008	189,99	32	3,41	32,0	38	4,899	37,75		
$\pm 39,99$	0,04479	0,00973	10,008	189,99								
$\pm 39,94$	0,04485	0,00973	9,957	189,83	40	0,98	41,6				3,846	10,58
$\pm 33,14$	0,05191	0,01002	9,957	189,82	30	0,85	31,6				3,118	10,724
$\pm 39,99$	0,04479	0,00973	9,957	189,83	38	0,98	39,6				3,849	10,585
$\pm 40,06$	0,04474	0,00972	10,582	189,83	40	1,00	41,6				3,864	10,582
$\pm 40,62$	0,07322	0,00970	9,957	189,82	39	0,97	40,4				3,874	9,957
$\pm 44,16$	0,04134	0,00955	9,957	189,83	40	1,11	42,7				3,876	9,957
$\pm 33,14$	0,05190	0,01002	9,994	190,01	42	2,17	40,8	36	2,041	34,52		
$\pm 33,15$	0,05190	0,01002	9,964	190,15	48	4,03	47,7	37	1,095	34,72		
$\pm 39,93$	0,04479	0,01002	9,999	190,01				41	2,030	40,00		

nazywa się ogólnym mianem działania tarcia wewnętrznego (por. [4]). (Czynniki te — to m.in. rodzaj i struktura wewnętrzna materiału odkształcanego, parametry ruchowe, formy drgań, rozkład naprężeń, temperatura, cechy geometryczne układu mechanicznego, stan powierzchni poszczególnych jego elementów).

W niniejszej pracy przyjęto, że charakterystyki sprężystości i tarcia wewnętrznego w materiale wału mają postać opisaną zależnością (2.1). Przyjęto więc nieliniowy model reologiczny materiału, w którym obok nieliniowych wyrazów opisujących sprężystość i tarcie wewnętrzne ( $a_2 \dot{\varepsilon}^3$  i  $a_4 \dot{\varepsilon}^3$ ) wprowadzono wyrazy mieszane ( $a_5 \dot{\varepsilon}^2$  i  $a_6 \dot{\varepsilon}^2$ ). Trzy ostatnie wyrazy (2.1) można potraktować jako «nieliniowy współczynnik» tarcia wewnętrznego:

$$(6.1) \quad (a_4 \dot{\varepsilon}^2 + a_5 \dot{\varepsilon} + a_6 \varepsilon^2) \dot{\varepsilon},$$

który dodaje się do współczynnika  $a_3$ . Ten «nieliniowy współczynnik» jest jak widać formą kwadratową, która jest zawsze dodatnia, gdy  $a_4 > 0$  i  $a_5^2 < 4a_4 a_6$ , lub zawsze ujemna, gdy  $a_4 < 0$  i  $a_5^2 < 4a_4 a_6$ . Jeżeli  $a_5^2 > 4a_4 a_6$ , to w zależności od znaków  $a_4$  i  $a_6$  ten «nieliniowy współczynnik» jest dla małych odkształceń  $\varepsilon$  i dla małych prędkości odkształceń  $\dot{\varepsilon}$  albo dodatni, albo ujemny.

W modelu reologicznym (2.1) uwzględniono tylko nieparzyste potęgi  $\varepsilon$  i  $\dot{\varepsilon}$ . Dodanie w (3.1) wyrazów typu  $\varepsilon^0, \dot{\varepsilon}^0, \varepsilon^2, \dot{\varepsilon}^2, \varepsilon^4, \dot{\varepsilon}^4, \varepsilon\dot{\varepsilon}, \varepsilon\dot{\varepsilon}^3, \varepsilon^3\dot{\varepsilon}$  nie zmieniłoby uzyskanych dalej wyników, gdyż całka (2.3) z wyrazów tego typu przyjmuje wartość zera i nie weszłyby one do wyrażeń na  $F_1$  i  $F_2$ .

W pracy zanalizowano istnienie i stateczność drgań samowzbudnych wału (3.1) w zależności od wartości poszczególnych współczynników w (2.1) oraz w zależności od wartości współczynnika tłumienia zewnętrznego i prędkości obrotowej wału. Znaleziono kilkadziesiąt postaci zależności między amplitudą drgań samowzbudnych a prędkością obrotową wału oraz kilkanaście postaci zależności między częstością precesji a prędkością obrotową wału.

Otrzymane wyniki mogą posłużyć do weryfikacji poprawności przyjętego modelu reologicznego, a także do odtworzenia właściwej postaci charakterystyki materiałowej (2.1) na podstawie doświadczalnych pomiarów amplitud i częstości drgań samowzbudnych konkretnych wirników i tym samym przyczynić się do wyjaśnienia mechanizmu działania tarcia wewnętrznego.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. TONDL, *Some problems of rotor dynamics*, Prague 1965.
2. Ф. М. Диментберг, *Изгибные колебания вращающихся валов*, Москва 1959.
3. В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Москва 1961.
4. A. MUSZYŃSKA, *On rotor dynamics (Survey)*, *Zagadnienia Drgań Nieliniowych (Nonlinear Vibration Problems)*, **13**, 1972.
5. A. MUSZYŃSKA, *O tłumieniu wewnętrznym w wałach wirujących*, *Zagadnienia Drgań Nieliniowych (Nonlinear Vibration Problems)*, **11**, 1970.
6. A. MUSZYŃSKA, *An analysis of the motion of a shaft with nonlinear characteristic of elasticity and damping*, *Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn.*, **16**, 7, 1968.

#### Резюме

#### АНАЛИЗ САМОВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В работе исследованы установившиеся круговые самовозбуждающиеся колебания ротора с двумя степенями свободы, возникающие вследствие действия внутреннего трения в материале вала. Принято, что характеристики упругости и внутреннего трения нелинейны и имеют вид представленный зависимостью (2.1). Исследованы существование и устойчивость установившихся самовозбужденных колебаний вала в зависимости от вида характеристики (2.1), внешнего трения и скорости вращения вала. Полученные результаты могут послужить для проверки правильности принятой реологической модели и для качественной идентификации характеристики внутреннего трения материала.

## SUMMARY

## ANALYSIS OF SELF-EXCITED VIBRATIONS OF A ROTOR WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

In the paper stationary, self-excited vibrations of rotor with two degrees of freedom, excited by the action of internal friction within the material of the rotor are analyzed. The characteristics of elasticity and internal friction are assumed to be non-linear and given by Eqs. (2.1). Existence and stability of stationary self-excited vibrations are analyzed as functions of the characteristics (2.1), of internal friction and of the rotational velocity of the rotor. The results obtained may serve to decide whether the rheological model assumed is correct, and to qualitative identification of the internal friction characteristics.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 listopada 1973 r.*

---