

DYNAMICZNE UGIĘCIA KRÓTKIEGO MOSTU KOLEJOWEGO

JERZY BOBLEWSKI (GLIWICE)

WSTĘP

Analiza drgań złożonego układu dynamicznego, jakim jest belka mostowa z poruszającym się po niej pojazdem, prowadzi do skomplikowanych równań różniczkowych. Otrzymanie rozwiązania w zamkniętej postaci jest na ogół bardzo trudne, a dyskusja wyników ze względu na skomplikowaną formę — żmudna i nieprzejrzysta.

W pracy przedstawiono rozwiązanie równania różniczkowego drgań belki otrzymanego na maszynie cyfrowej ZAM-2 w Ośrodku Maszyn Cyfrowych «Prosynchem» Gliwice wg programu BEL-3. Program umożliwia obliczenie maksymalnego ugięcia belki mostowej, analizę wpływu «przyrostu masy», «pozornego tłumienia» oraz «pozornej sztywności» na wielkość tego ugięcia a także wartości siły dynamicznej wywołanej drganiami pojazdu.

1. ZAŁOŻENIA

W pracy przyjęto, że belka mostowa ma stałą sztywność zginania; masa rozłożona jest równomiernie wzdłuż długości, obciążenie działa w płaszczyźnie symetrii belki, oś belki jest przed obciążeniem prosta oraz masa pojazdu w odniesieniu do masy belki jest wielkością tego samego rzędu.

2. RÓWNIANIE DRGAŃ

Wyprowadzenia równania różniczkowego drgań belki dokonano opierając się na znanym wzorze

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k - \partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_t}{\partial q_i} = P_j, \quad j=1, 2, \dots, r, \quad i=1, 2, \dots, \infty.$$

Założono, że oś odkształcona belki ma postać szeregu

$$y(x; t) = \sum_i q_i \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Wtedy składniki energii układu przedstawionego na rys. 1 wyrażają się następującymi wzorami:

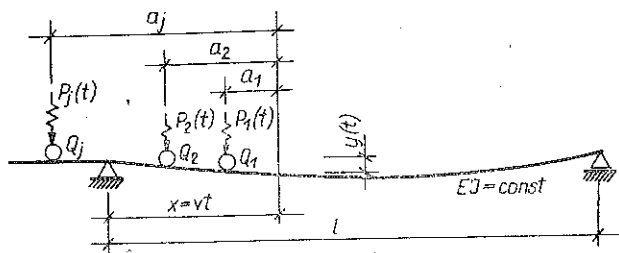
$${}^{(b)}E_k = \frac{1}{4} m_{(b)} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i^2,$$

$${}^{(v)}E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r m_j \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_j \left[\dot{q}_i \sin \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k \sin \frac{k\pi(vt-a_j)}{l} + \right. \\ \left. + \dot{q}_i \sin \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi v}{l} \cos \frac{k\pi(vt-a_j)}{l} + \right. \\ \left. + q_i \frac{i\pi v}{l} \cos \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k \sin \frac{k\pi(vt-a_j)}{l} + \right. \\ \left. + q_i \frac{i\pi v}{l} \cos \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{k\pi v}{l} \cos \frac{k\pi(vt-a_j)}{l} \right],$$

$${}^{(b)}E_p = \frac{1}{4} \frac{\pi^4 EJ}{l^3} \sum_{i=1}^{\infty} i^4 q_i, \quad {}^{(v)}E_p = \sum_{j=1}^r \alpha_j Q_j \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sin \frac{i\pi(vt-a_j)}{l},$$

$$E_t = \frac{1}{4} k_t \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2.$$

W powyższych wzorach przyjęto oznaczenia: (p) oznacza indeks odnoszący się do pojazdu, (b) analogicznie indeks odnoszący się do belki, $m_{(b)}$ oznacza masę belki,



Rys. 1

m_j masę j -tego pojazdu, Q_j ciężar j -tego pojazdu, k_t współczynnik tłumienia, q_i nieznane funkcje czasu, v prędkość pojazdu, α_j funkcję określającą przynależność masy do przedziału $0 \leq x \leq l$ oraz

$$\alpha_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } vt - a_j \in [0; l], \\ 0, & \text{jeżeli } vt - a_j \notin [0; l]. \end{cases}$$

Po wykonaniu operacji określonych wzorem (1) i uporządkowaniu otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{2} m_{(b)} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^r \alpha_j m_j \sin \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k \sin \frac{k\pi(vt-a_j)}{l} + \\
 & + \frac{1}{2} k_t \dot{q}_i + 2 \sum_{j=1}^r \alpha_j m_j \sin \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k \frac{k\pi v}{l} \cos \frac{k\pi(vt-a_j)}{l} + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{i^4 \pi^4 EJ}{l^3} q_i - \sum_{j=1}^r \alpha_j m_j \sin \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{k\pi v}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi(vt-a_j)}{l} = \\
 & = \sum_{j=1}^r \alpha_j \left[Q_j \sin \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} + P_j \sin \frac{i\pi(vt-a_j)}{l} \right],
 \end{aligned}$$

gdzie P_j oznacza dynamiczne działanie pojazdu. Ciężar Q_j jak i obciążenie P_j zostały sprowadzone do punktu i . Z równań (2) przy odpowiednich założeniach można otrzymać szereg szczególnych rozwiązań, które były podstawą przybliżonej analizy drgań belki mostowej.

Zakładając np., że $k_t=0$, $P_j=0$ oraz $j, i=1$ otrzymamy równanie, którego rozwiązanie i dyskusję przedstawił J. NALESZKIEWICZ w pracy [1].

3. METODA I SCHEMAT ROZWIĄZANIA

Dla analizy drgań «krótkich» belek mostowych dobrze nadaje się model o jednym stopniu swobody. Przyjmując zatem $i=1$ oraz podstawiając $x_1=t$, $x_2=q$ oraz $x_3=\dot{q}$, układ równań (2) doprowadzamy do następującego układu równań:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 1, \quad \dot{x}_2 = x_3, \\
 \dot{x}_3 &= \left[\sum_{j=1}^r \alpha_j \left(Q_j \sin \frac{\pi(vx_1-a_j)}{l} + P_j(x_1) \sin \frac{\pi(vx_1-a_j)}{l} \right) - \right. \\
 & \quad - x_2 \left(\frac{\pi^4 EJ}{2l^3} - \sum_{j=1}^r L_j \alpha_j m_j \left(\frac{\pi v}{l} \sin \frac{\pi(vx_1-a_j)}{l} \right)^2 \right) - \\
 & \quad \left. - x_3 \left(\frac{1}{2} k_t + \sum_{j=1}^r H_j \alpha_j m_j \frac{\pi v}{l} \sin \frac{2\pi(vx_1-a_j)}{l} \right) \right] : \\
 & \quad : \left(\frac{1}{2} m_{(b)} + \sum_{j=1}^r S_j \alpha_j m_j \sin^2 \frac{\pi(vx_1-a_j)}{l} \right)
 \end{aligned}$$

o następujących warunkach początkowych:

$$x_1(0)=0, \quad x_2(0)=0, \quad x_3(0)=0.$$

Następnie metodą Rungego-Kutta-Gilla układ tych równań zostaje scałkowany za pomocą programu BEL-3.

Powyższa metoda pozwala znaleźć wartość funkcji w punkcie $x_1=t+h$, gdy znana jest jej wartość w punkcie $x_1=t$.

Wielkość h jest krokiem całkowania. Dokładność metody zależy od kroku całkowania i wynosi h^5 . Parametry H_j, L_j oraz S_j wprowadzono do równania w celu umożliwienia badania wpływu przyrostu masy, pozornej sztywności lub pozornego tłumienia, na wielkość ugięcia belki.

Przyjęcie $L=0, H=0$ i $S=0$ prowadzi do równania przedstawionego w [2].

Analizę numeryczną równania przeprowadzono dla obiektu rzeczywistego, którego ugięcia były mierzone w czasie badań połowych prowadzonych przez COB i RTK w roku 1965, w celu określenia krytycznej prędkości przejazdu przez badany most. Układ nośny mostu stanowią blachownice nitowane o rozpiętości $l=11,3$ m podparte na przyczółkach betonowych. Tor na moście ułożony jest na mostownicach zamocowanych bezpośrednio na dźwigarach głównych. Na moście nie ma styków szyn. Obliczona sztywność mostu $c=14850$ T/m, ciężar $G=10$ T. Współczynnik tłumienia określony doświadczalnie $k=5,36$ m/s. Obciążenie obiektu w czasie drgań realizowano elektrowozem EU-06 o następujących parametrach technicznych: ciężar pojazdu wynosił $Q=80$ T, rozkład obciążenia na «wózki» 50%—50%, sztywność zawieszenia $c=816$ T/m, rozstaw wózków $L=8,5$ m, częstość drgań własnych $n=1,59$ Hz oraz współczynnik tłumienia $k=2$ m/s.

Porównanie wyników obliczeń numerycznych z wartościami zmierzonymi wykazało ich dużą zbieżność. Tak więc prędkość przejazdu elektrowozu, przy której wystąpiły maksymalne ugięcia w czasie badań, wynosi 80 km/godz, a wartość ugięcia $w=0,34$ cm, wg analizy numerycznej odpowiednio 75 km/godz. i 0,31 cm. Charakter zarejestrowanych ugięć środka belki pokrywa się z wykresem $y(t)$ otrzymanym z analizy numerycznej.

Z przeprowadzonych badań połowych wynika, że dla pewnej klasy rozpiętości mostów pomijanie masy pojazdu przy analizie drgań jest niedopuszczalne, a także że model o jednym stopniu swobody dostatecznie wiernie oddaje stan faktyczny.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. NALESZKIEWICZ, *Z dynamiki belki mostowej*, Arch. Mech. Stos., 4, 1953.
2. J. ГЛОМВ, *Niektóre problemy dynamiki mostów drogowych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., 42, 1962.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОГИБЫ КОРОТКОГО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО МОСТА

В статье содержится информация о разработке программы BEL-3 для ЭЦВМ ZAM-2, дающей возможность решения дифференциального уравнения, описывающего колебания балки моста при проезде транспорта с постоянной скоростью.

Предполагается, что жесткость балки постоянна вдоль пролета, нагрузка действует в плоскости симметрии балки, ось балки до нагружения, является прямой, а масса транспорта не пренебрежима по сравнению с массой балки.

В работе кратко изложен метод вывода системы дифференциальных уравнений, а также дана схема решения в случае, когда балку можно рассматривать как систему с одной степенью свободы.

SUMMARY

DYNAMIC DEFLECTIONS OF A SHORT RAILWAY BRIDGE

The paper contains an information concerning the program BEL-3 for a ZAM-2 digital computer which makes it possible to solve the differential equation of vibration of a beam produced by a vehicle moving on that beam at a constant velocity. The rigidity of the beam is assumed to be constant, the load acts in the plane of symmetry of the beam, its axis is rectilinear before deformation, and the mass of the vehicle can not be disregarded in comparison with the mass of the beam. The paper presents the method of derivation of the set of differential equations and the scheme of its solution under the assumption that the beam may be considered as a system with one degree of freedom.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 kwietnia 1973 r.
