

## PLYTA REISSNERA O NIEJEDNORODNOŚCI WYKŁADNICZEJ

ANDRZEJ G A W Ę C K I (POZNAŃ)

### 1. WSTĘP

Problemy niejednorodnych ciał sprężystych opisywane są równaniami różniczkowymi o zmiennych współczynnikach. W przypadku płyt średniej grubości otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych cząstkowych na dwie funkcje kąta obrotu  $w_1, w_2$  i funkcję ugięcia  $w_3$  (por. [4]). Fakt, iż współczynniki tych równań są zmienne, utrudnia bardzo uzyskanie rozwiązania. W pewnych szczególnych przypadkach niejednorodności zdarza się jednak, że układ równań problemu ma współczynniki stałe. Pozwala to niejednokrotnie uzyskać rozwiązanie ściśle oraz ocenić wpływ niejednorodności na ostateczne rezultaty obliczeń. Między innymi równania o stałych współczynnikach otrzymuje się, gdy funkcja niejednorodności jest funkcją wykładniczą. Najbardziej istotne znaczenie ma tutaj własność funkcji wykładniczej polegająca na tym, że stosunek funkcji do jej pochodnej jest wartością stałą. Ponadto funkcja ta i jej pochodne dowolnego rzędu są zawsze dodatnie i regularne. Dzięki wyżej wymienionym własnościom omawianej funkcji niejednorodności E. BOROWCZYK i M. SUCHAR [2] uzyskali ściśle rozwiązanie płyty cienkiej o grubości zmieniającej się według funkcji wykładniczej.

W pracy niniejszej podjęto próbę rozwiązania izotropowej płyty Reissnera, w której moduł Younga jest określony funkcją  $E(x_1, x_2) = E_0 e^{2A_1 x_1 + 2A_2 x_2}$  ( $E_0, A_1, A_2 = \text{const}$ ), a współczynnik Poissona  $\nu$  i grubość płyty  $h$  są stałe. Równania podstawowe dla takiej płyty są szczególnym przypadkiem równań wyprowadzonych przez autora w pracy [4], gdzie rozważana była podłużnie niejednorodna płyta ortotropowa o zmiennej grubości.

Całość rozważań przedstawionych w niniejszej pracy odniesiono do pewnego uproszczonego modelu płyty Reissnera, w którym pomija się wpływ poprzecznych naprężeń normalnych. Uproszczenie to wprowadzono mając na uwadze wyniki pracy R. GANOWICZA [3]. Autor tej pracy omawiając działanie obciążeń skupionych na jednorodną płytę Reissnera o stałej grubości wykazał, że rozwiązanie nie jest jednoznaczne. Warunki jednoznaczności spełnia jedynie pewna część rozwiązania. Pozostała część rozwiązania spełnia równania równowagi, równania różniczkowe płyty i warunki brzegowe, nie spełnia natomiast równania wyrażającego treść twierdzenia Bettiego o wzajemności prac. Z dalszych rozważań cytowanej pracy wynika, że niejednoznaczność rozwiązania nie występuje, jeżeli pominiemy wpływ po-

przeczynnych naprężeń normalnych, jak to ma miejsce na przykład w płycie trójwarstwowej. Warto dodać, że taki uproszczony model płyty Reissnera daje wyniki zbliżone z innymi teoriami płyt średniej grubości (por. np. [5]).

## 2. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Dla  $h, \nu = \text{const}$  i  $E = E_0 e^{2A_\eta x_\eta}$  otrzymujemy następujące równania wiążące siły wewnętrzne i przemieszczenia [4] <sup>(1)</sup>:

$$(2.1) \quad M_{\alpha\beta} = D(1-\nu) \left[ \frac{1}{2} (w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha}) + \frac{\nu}{1-\nu} w_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right], \quad Q_\alpha = \frac{1-\nu}{2c^2} D (w_\alpha + w_{3,\alpha}),$$

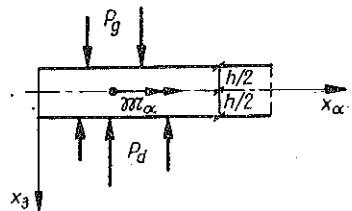
$$(2.2) \quad D = D_0 e^{2A_\eta x_\eta}, \quad D_0 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad c^2 = \frac{h^2}{10}.$$

W równaniach (2.1)  $\delta_{\alpha\beta}$  jest symbolem Kroneckera,  $w_\alpha(x_1, x_2)$  oznaczają średnie kąty obrotu normalnej do płaszczyzny środkowej a  $w_3(x_1, x_2)$  jest średnim ugięciem płyty. Funkcje  $w_\alpha$  związane są z przemieszczeniami  $u_\alpha$  następująco:

$$(2.3) \quad u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_3 w_\alpha(x_1, x_2).$$

Zależności (2.1) łącznie z równaniami równowagi płyty (por. rys. 1)

$$(2.4) \quad \begin{aligned} M_{\beta\alpha,\beta} - Q_\alpha &= e_{\beta\alpha 3} m_\beta \\ Q_{\alpha,\alpha} &= \bar{p}, \quad \bar{p} = p_d - p_g \end{aligned}$$



Rys. 1

stanowią równania podstawowe problemu. We wzorach (2.4)  $e_{ijk}$  oznacza symbol permutacyjny Leviego-Civity, a dodatni wektor momentu powierzchniowego  $m_\alpha$  jest, podobnie jak układ współrzędnych, prawoskrętny.

## 3. RÓWNANIA PRZEMIESZCZENIOWE

Podstawiając zależności (2.1) do równań równowagi (2.4) uzyskujemy trzy równania różniczkowe cząstkowe na dwie funkcje kąta obrotu  $w_\alpha$  i na funkcję ugięcia płyty  $w_3$ :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} -c^2 \left\{ w_{\alpha,\beta\beta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} w_{\beta,\beta\alpha} + 2 \left[ A_\beta (w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha}) + \frac{2\nu}{1-\nu} A_\alpha w_{\beta,\beta} \right] \right\} + \\ + (w_\alpha + w_{3,\alpha}) = \frac{2c^2}{D(1-\nu)} e_{\beta\alpha 3} m_\beta, \\ w_{\alpha,\alpha} + w_{3,\alpha\alpha} + 2A_\alpha (w_\alpha + w_{3,\alpha}) = \frac{2c^2}{D(1-\nu)} \bar{p}. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> W pracy przyjęto zapis wskaźnikowy i umowę sumacyjną. Wskaźniki greckie przyjmują wartości 1, 2 a łacińskie — wartości 1, 2, 3. Przecinek na poziomie wskaźnika oznacza różniczkowanie cząstkowe względem odpowiedniej współrzędnej.

Każde z równań tworzących układ (3.1) jest równaniem II rzędu. Stosując postępowanie G. C. MOISILA [7] (por. [9], str. 167) układ ten można doprowadzić do trzech oddzielnych równań VI rzędu na trzy funkcje przemieszczeń  $\Psi_i$ . Równania na funkcje przemieszczeń uzyskuje się wychodząc z równań (3.1) zapisanych w postaci:

$$(3.2) \quad L_{ij}(w_j) = \frac{2c^2}{D(1-\nu)} (e_{\beta\alpha 3} m_\beta \delta_{i\alpha} + \bar{p} \delta_{i3}),$$

gdzie  $L_{ij}$  oznacza macierz operatorów różniczkowych równań (3.1). Wzory (3.3) przedstawiają poszczególne elementy składowe tej macierzy:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} L_{11} &= 1 - c^2 (\nabla^2 + 2A_\alpha \partial_\alpha) - \frac{1+\nu}{1-\nu} c^2 \partial_1 (2A_1 + \partial_1), \\ L_{12} &= -c^2 \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} \partial_1 (2A_2 + \partial_2) + \frac{2\nu}{1-\nu} (2A_1 \partial_2 - 2A_2 \partial_1) \right], \quad L_{13} = \partial_1, \\ L_{21} &= -c^2 \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} \partial_2 (2A_1 + \partial_1) - \frac{2\nu}{1-\nu} (2A_1 \partial_2 - 2A_2 \partial_1) \right], \\ L_{22} &= 1 - c^2 (\nabla^2 + 2A_\alpha \partial_\alpha) - \frac{1+\nu}{1-\nu} c^2 \partial_2 (2A_2 + \partial_2), \\ L_{23} &= \partial_2, \quad L_{31} = 2A_1 + \partial_1, \quad L_{32} = 2A_2 + \partial_2, \\ L_{33} &= 2A_\alpha \partial_\alpha + \nabla^2, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \nabla^2 = \partial_\alpha \partial_\alpha. \end{aligned}$$

Rozwikłane równania na funkcje przemieszczeń są następujące:

$$(3.4) \quad H(\Psi_k) = \frac{2c^2}{D(1-\nu)} (e_{\beta\alpha 3} m_\beta \delta_{k\alpha} + \bar{p} \delta_{k3}), \quad k=1, 2, 3,$$

gdzie

$$H = \det |L_{ij}| = - \frac{2c^2}{1-\nu} [(\nabla^2 + 2A_\alpha \partial_\alpha)^2 + \nu (A_1 \partial_2 - A_2 \partial_1)^2] [1 - c^2 (\nabla^2 + 2A_\alpha \partial_\alpha)].$$

Pomiędzy funkcjami  $w_i$  a funkcjami  $\Psi_i$  zachodzą następujące zależności:

$$(3.5) \quad w_1 = \begin{vmatrix} \Psi_1 & L_{12} & L_{13} \\ \Psi_2 & L_{22} & L_{23} \\ \Psi_3 & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \Psi_1 & L_{13} \\ L_{21} & \Psi_2 & L_{23} \\ L_{31} & \Psi_3 & L_{33} \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \Psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \Psi_2 \\ L_{31} & L_{32} & \Psi_3 \end{vmatrix}.$$

W celu wyeliminowania w operatorze  $H$  pochodnych nieparzystych wprowadzono nowe funkcje przemieszczeń  $\Phi_i$ :

$$(3.6) \quad \Phi_i = \Psi_i e^{A_n x_n}.$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji różniczkowania równania na funkcje przemieszczeń modyfikują się do postaci:

$$(3.7) \quad \bar{H}(\Phi_i) = \pi_i,$$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{H} &= [(\nabla^2 - a^2)^2 + \nu(2A_1 \partial_2 - 2A_2 \partial_1)^2] [1 - c^2(\nabla^2 - a^2)], \\ \pi_i &= -(D_0 e^{A_n x_n})^{-1} (e_{\beta\alpha 3} m_\beta \delta_{i\alpha} + \bar{p} \delta_{i3}), \quad a^2 = A_\alpha A_\alpha. \end{aligned}$$

Ponieważ forma charakterystyczna każdego z równań (3.7),  $G_6(\bar{\chi}) = (\chi_1^2 + \chi_2^2)^3$ , jest określona, więc w całym obszarze zmienności  $x_1$  i  $x_2$  równania (3.7) są eliptyczne (por. [6], cz. I, str. 98).

Gdy płyta jest jednorodna ( $A_1 = A_2 = 0$ ), równania (3.7) uzyskują znaną postać (por. np. [3]):

$$\nabla^2 \nabla^2 [1 - c^2 \nabla] \Phi_i = \pi_i.$$

Na podstawie związków (3.5) i przy uwzględnieniu zależności (3.7) wzory na przemieszczenia  $w_i$  przyjmują następującą postać:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} w_1 &= e^{-A_n x_n} \left\{ \left[ [1 - c^2(\nabla^2 - a^2)](\nabla^2 - a^2) - \left[ 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} c^2(\nabla^2 - a^2) \right] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\partial_2^2 - A_2^2) \right] \Phi_1 + \left[ [1 + c^2(\nabla^2 - a^2)](\partial_1 - A_1)(\partial_2 + A_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\nu c^2}{1-\nu}(\nabla^2 - a^2)(\partial_1 + A_1)(\partial_2 - A_2) \right] \Phi_2 - \left[ (\partial_1 - A_1)[1 - c^2(\nabla^2 - a^2)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\nu c^2}{1-\nu}(\partial_2 - A_2)(2A_1 \partial_2 - 2A_2 \partial_1) \right] \Phi_3 \right\}, \\ w_2 &= e^{-A_n x_n} \left\{ \left[ [1 + c^2(\nabla^2 - a^2)](\partial_1 + A_1)(\partial_2 - A_2) + \frac{2\nu c^2}{1-\nu}(\nabla^2 - a^2) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\partial_1 - A_1)(\partial_2 + A_2) \right] \Phi_1 + \left[ [1 - c^2(\nabla^2 - a^2)](\nabla^2 - a^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[ 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} c^2(\nabla^2 - a^2) \right](\partial_1^2 - A_1^2) \right] \Phi_2 - \left[ (\partial_2 - A_2)[1 - c^2(\nabla^2 - a^2)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\nu c^2}{1-\nu}(\partial_1 - A_1)(2A_2 \partial_1 - 2A_1 \partial_2) \right] \Phi_3 \right\}, \\ w_3 &= e^{-A_n x_n} \left\{ - \left[ [1 - c^2(\nabla^2 - a^2)](\partial_1 + A_1) - \frac{2\nu c^2}{1-\nu}(\partial_2 + A_2) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (2A_1 \partial_2 - 2A_2 \partial_1) \right] \Phi_1 - \left[ [1 - c^2(\nabla^2 - a^2)](\partial_2 + A_2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\nu c^2}{1-\nu}(\partial_1 + A_1)(2A_2 \partial_1 - 2A_1 \partial_2) \right] \Phi_2 + \left[ [1 - c^2(\nabla^2 - a^2)] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[ 1 - \frac{2c^2}{1-\nu}(\nabla^2 - a^2) \right] - \frac{2\nu c^4}{1-\nu}(2A_1 \partial_2 - 2A_2 \partial_1)^2 \right] \Phi_3 \right\}. \end{aligned}$$

Równania (3.7) i (3.9) są równoważne układowi (3.1). Rozwiązania układu równań (3.7) składają się z rozwiązań szczególnych  $\hat{\Phi}_i$  oraz rozwiązania ogólnego równania jednorodnego  $\Phi^0$ . Rozwiązania szczególne  $\hat{\Phi}_i$  w wielu przypadkach można

uzyskać za pomocą transformacji całkowych. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$(3.10) \quad \bar{H}(\Phi^0) = 0$$

powinno być tak dobrane, aby były spełnione warunki brzegowe zadania. Ponieważ operator  $\bar{H}$  można przedstawić w postaci iloczynu dwóch operatorów:

$$(3.11) \quad \bar{H} = \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2,$$

gdzie

$$\bar{H}_1 = (\nabla^2 - a^2)^2 + \nu(2A_1 \partial_2 - 2A_2 \partial_1)^2 \quad \text{ i } \quad \bar{H}_2 = 1 - c^2(\nabla^2 - a^2),$$

rozwiązanie ogólne składa się z dwóch części [8]:

$$(3.12) \quad \Phi^0 = \bar{\Phi} + \bar{\bar{\Phi}},$$

przy czym funkcje  $\bar{\Phi}$  i  $\bar{\bar{\Phi}}$  spełniają równania:

$$(3.13) \quad \bar{H}_1(\bar{\Phi}) = 0 \quad \text{ i } \quad \bar{H}_2(\bar{\bar{\Phi}}) = 0.$$

Szczegółowy tok postępowania przy rozwiązywaniu równań przemieszczeniowych przedstawiony zostanie w następnym punkcie niniejszej pracy i w przykładzie liczbowym.

#### 4. ROZWIĄZANIA DLA OBCIĄŻEŃ SKUPIONYCH DZIAŁAJĄCYCH NA PŁYTĘ NIEOGRANICZONĄ

Ponieważ rozważania dotyczą płyty nieograniczonej, zadanie sprowadza się do wyznaczenia rozwiązań szczególnych układu równań (3.7). Rozwiązań poszukiwać będziemy za pomocą wykładniczej nieskończonej transformacji Fouriera, określonej następująco ([10], str. 43-44):

$$(4.1) \quad f_w(a_1, a_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(b_1, b_2) e^{i(b_1 a_1 + b_2 a_2)} db_1 db_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_w(a_1, a_2) e^{-i(a_1 x_1 + a_2 x_2)} da_1 da_2,$$

gdzie  $i = \sqrt{-1}$ .

Po wykonaniu transformacji równania (3.7) uzyskują postać:

$$\{[(a_1^2 + a_2^2) + a^2]^2 - \nu(2A_1 a_2 - 2A_2 a_1)^2\} \{1 + c^2[(a_1^2 + a_2^2) + a^2]\} \hat{\Phi}_{wj} = \pi_{wj}(a_1, a_2),$$

skąd

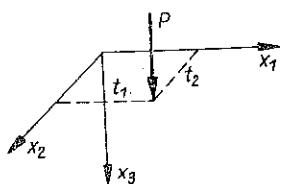
$$(4.2) \quad \hat{\Phi}_j(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{wj}(a_1, a_2) e^{-i(a_1 x_1 + a_2 x_2)} da_1 da_2}{\{[(a_1^2 + a_2^2) + a^2]^2 - \nu(2A_1 a_2 - 2A_2 a_1)^2\} \{1 + c^2[(a_1^2 + a_2^2) + a^2]\}}.$$

Jeśli dane są obciążenia  $\bar{p}$  i  $m_\alpha$ , to po obliczeniu transformat funkcji  $\pi_j$  ze wzoru (4.2) można wyznaczyć rozwiązania szczególne układu równań (3.7).

Przejdziemy obecnie do omówienia rozwiązań dla siły skupionej i momentu skupionego. Rozwiązania te mają charakter rozwiązań podstawowych, umożliwiającą budowę wzorów dla złożonych przypadków obciążeń. Dla uproszczenia obliczeń w dalszym ciągu ograniczymy się do materiału o współczynniku Poissona  $\nu=0$ .

#### 4.1. Działanie siły skupionej

Działanie siły skupionej (rys. 2) w punkcie o współrzędnych  $(t_1, t_2)$  odpowiada przyjęciu, że obciążenie  $m_\alpha=0$  (tj.  $\pi_\alpha=\hat{\Phi}_\alpha=0$ ) a  $\bar{p}=-P\delta(x_1-t_1)\delta(x_2-t_2)$ , gdzie  $\delta(x)$  oznacza dystrybucję «delta» Diraca. Wobec tego na podstawie (3.8)<sub>2</sub> i (4.1)<sub>1</sub>



Rys. 2

$$(4.3) \quad \pi_{w3}(a_1, a_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P}{D_0} \exp \times \\ \times [b_\alpha(-A_\alpha + ia_\alpha)] \delta(b_1 - t_1) \delta(b_2 - t_2) db_1 db_2 = \\ = \frac{P}{2\pi D_0} e^{t_\alpha(-A_\alpha + ia_\alpha)}.$$

Wyrażenie występujące pod znakiem całki we wzorze (4.2) można rozbić na ułamki proste:

$$\hat{\Phi}_3(x_1, x_2) = \frac{P}{4\pi^2 D_0} e^{-t_\alpha A_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia_\alpha(x_\alpha - t_\alpha)} \times \\ \times \left[ \frac{-c^2}{a_1^2 + a_2^2 + a^2} + \frac{1}{(a_1^2 + a_2^2 + a^2)^2} + \frac{c^4}{1 + c^2(a_1^2 + a_2^2 + a^2)} \right] da_1 da_2.$$

Obliczenie całek występujących w powyższym wyrażeniu wykonano za pomocą tablic H. BATEMANA [1]. Ostatecznie uzyskano:

$$(4.4) \quad \hat{\Phi}_3(x_1, x_2) = \hat{\Phi}_3(r) = \frac{P}{4\pi D_0} e^{-t_\alpha A_\alpha} \left\{ \frac{r}{a} K_1(ar) + 2c^2 [K_0(br) - K_0(ar)] \right\},$$

gdzie

$$r = \sqrt{(x_1 - t_1)^2 + (x_2 - t_2)^2}, \quad b^2 = a^2 + c^{-2}.$$

Funkcje  $K_0(r)$  i  $K_1(r)$  są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela drugiego rodzaju (tzw. funkcje Mc Donalda).

Z budowy wzoru (4.4) widać, że funkcja  $\hat{\Phi}_3$  jest osiowo-symetryczna. Dla  $r \rightarrow \infty$  funkcja ta i jej pochodne dowolnie wysokiego rzędu dążą do zera. Zależność modułu Younga od położenia punktu na płaszczyźnie środkowej uwidacznia się dopiero w wyrażeniach na przemieszczenia i siły wewnętrzne [por. wzory (4.5) i (4.6)]. Warto zaznaczyć, że w teorii płyty jednorodnej całki wyrażające funkcję przemieszczeń są rozbieżne. W celu znalezienia przemieszczeń w takiej płycie bierze się pod uwagę tylko części skończone tych całek. Rozwiązania podstawowe dla jednorodnej płyty Reissnera uzyskał tą drogą R. GANOWICZ [3].

Przejdziemy z kolei do obliczenia przemieszczeń  $\hat{w}_i$ . W tym celu wykorzystamy związki (3.9), w których przyjmiemy, że  $\Phi_a = 0$  i  $\Phi_3 = \hat{\Phi}_3$ . Ostatecznie otrzymujemy następujące wzory:

$$(4.5) \quad \hat{w}_\alpha = \frac{P}{4\pi D_0} e^{-A_\alpha(x_\eta + t_\eta)} \left[ \frac{A_\alpha}{a} r K_1(ar) + (x_\alpha - t_\alpha) K_0(ar) \right],$$

$$\hat{w}_3 = \frac{P}{4\pi D_0} e^{-A_\alpha(x_\eta + t_\eta)} \left[ \frac{r}{a} K_1(ar) + 4c^2 K_0(ar) \right].$$

Za pomocą równań (4.5) można obliczyć siły wewnętrzne z zależności (2.1):

$$(4.6) \quad \hat{M}_{\alpha\beta} = \frac{P}{4\pi} \left\{ e^{A_\alpha(x_\eta - t_\eta)} [\delta_{\alpha\beta} - A_\alpha(x_\beta - t_\beta) - A_\beta(x_\alpha - t_\alpha)] K_0(ar) - \right.$$

$$\left. - ar \left[ \frac{(x_\alpha - t_\alpha)(x_\beta - t_\beta)}{r^2} + \frac{A_\alpha A_\beta}{a^2} \right] K_1(ar) \right\},$$

$$\hat{Q}_\alpha = -\frac{P}{4\pi} A_\alpha(x_\eta - t_\eta) \left\{ A_\alpha K_0(ar) + a \frac{x_\alpha - t_\alpha}{r} K_1(ar) \right\}.$$

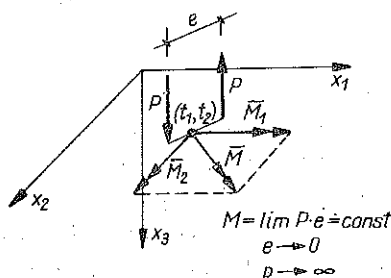
Wzór (4.5)<sub>2</sub>, co łatwo sprawdzić, gwarantuje spełnienie zasady wzajemności przemieszczeń.

Jeśli w równaniach (4.5) i (4.6) przyjąć  $t_\eta = A_2 = 0$ , to dla  $x_2 = 0$  i  $x_1 \rightarrow \infty$  przemieszczenia  $\hat{w}_i$  bardzo szybko maleją do zera, podczas gdy momenty zginające wolno narastają do minus nieskończoności. Natomiast dla  $x_2 = 0$  i  $x_1 \rightarrow -\infty$  obserwujemy z kolei, że siły wewnętrzne szybko maleją do zera, a ugięcia  $\hat{w}_3$  narastają powoli do nieskończoności. Wynika stąd wniosek, że w płytach niejednorodnych zaburzenia mogą rozchodzić się nieograniczenie. Należy jednak zaznaczyć, że potencjał sprężysty maleje do zera w miarę oddalania się od punktu przyłożenia siły.

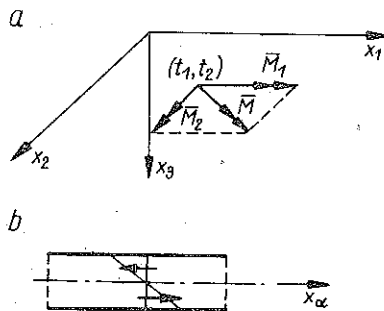
Zwróćmy uwagę jeszcze na fakt, że kąty obrotu  $\hat{w}_\alpha$  i siły wewnętrzne nie zależą od parametru uwzględniającego rząd grubości płyty,  $c^2 = h^2/10$ ; zależy od niego jedynie ugięcie płyty  $\hat{w}_3$ .

#### 4.2. Działanie momentu skupionego

Za pomocą rozwiązania dla siły skupionej można otrzymać rozwiązanie dla momentu skupionego pary sił pionowych (rys. 3). Rozwiązanie to uzyskuje się



Rys. 3



Rys. 4

przez proste różniczkowanie rozwiązania dla siły skupionej względem współrzędnych  $x_\alpha$ . Ponieważ postępowanie w takim przypadku jest na ogół znane i nie wnosi nowych elementów, omówimy działanie skupionego momentu powierzchniowego,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ . Odpowiada on działaniu sił poziomych (rys. 4). W równaniach przemieszczeniowych należy przyjąć

$$m_\beta = M_\beta \delta(x_1 - t_1) \delta(x_2 - t_2) \quad \text{i} \quad \pi_3 = 0, \quad \hat{\Phi}_3 = 0.$$

Funkcje  $\hat{\Phi}_\alpha$  określa wzór (4.4), w którym zamiast  $P$  należy podstawić  $-e_{\beta\alpha 3} M_\beta$ . Przeszacowania  $\hat{w}_i$  wyznaczyć można na podstawie zależności (3.9). Dla przypadku  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2 = 0$  otrzymano następujące wzory:

$$\begin{aligned} \hat{w}_1 = & -\frac{M_1}{4\pi D_0} e^{-A_\eta(x_\eta + t_\eta)} \left\{ K_0(ar) + \frac{4(x_2 - t_2)^2}{r^2} K_0(br) + \right. \\ & + 4c^2 \frac{(x_2 - t_2)^2 - (x_1 - t_1)^2}{r^3} [bK_1(br) - aK_1(ar)] + \\ & \left. + \left( \frac{a^2(x_2 - t_2)^2}{r^2} - A_2^2 \right) \left[ 4c^2 K_0(br) - 4c^2 K_0(ar) + \frac{r}{a} K_1(ar) \right] \right\}, \\ (4.7) \quad \hat{w}_2 = & -\frac{M_1}{4\pi D_0} e^{-A_\eta(x_\eta + t_\eta)} \left\{ [A_1(x_2 - t_2) - A_2(x_1 - t_1)] K_0(ar) - \right. \\ & - 4 \frac{(x_1 - t_1)(x_2 - t_2)}{r^2} K_0(br) + \frac{4c^2}{r} [A_1(x_1 - t_1) - A_2(x_2 - t_2) - \\ & \left. - \frac{2(x_1 - t_1)(x_2 - t_2)}{r^2}] [bK_1(br) - aK_1(ar)] - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{a^2(x_1 - t_1)(x_2 - t_2)}{r^2} - A_1 A_2 \right] \left[ 4c^2 K_0(br) - 4c^2 K_0(ar) + \frac{r}{a} K_1(ar) \right] \right\}, \\ \hat{w}_3 = & -\frac{M_1}{4\pi D_0} e^{-A_\eta(x_\eta + t_\eta)} \left[ A_1 \frac{r}{a} K_1(ar) - (x_1 - t_1) K_0(ar) \right]. \end{aligned}$$

Gdy  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}_1 = 0$ , formuły na funkcje  $\hat{w}_i$  otrzymuje się z równań (4.7) przez zamianę wskaźników 1 i 2. Siły wewnętrzne można obliczyć ze wzorów (2.1).

Interesujące jest, że ugięcie płyty  $\hat{w}_3$  nie zależy teraz od rzędu grubości płyty, podczas gdy w przypadku działania siły skupionej od rzędu grubości płyty nie zależały kąty obrotu  $\hat{w}_\alpha$  i siły wewnętrzne. Nadto odnotowujemy tutaj występowanie tensora obrotów  $w_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} - u_{\beta,\alpha})$ , ponieważ  $w_{1,2} \neq w_{2,1}$ . Tensor obrotów w przypadku płyty obciążonej siłą skupioną jest równy zeru. Jak widać, działanie momentu pary sił poziomych daje efekt jakościowo różny od działania momentu pary sił pionowych. Na fakt ten zwraca uwagę R. GANOWICZ [3].

W podsumowaniu warto zaznaczyć, że z przedstawionych wyżej rozwiązań nie można bezpośrednio przejść do rozwiązań dla płyty jednorodnej. Przyjmując bowiem  $A_\eta = 0$ , stwierdzamy, że funkcje  $\hat{\Phi}_i$  nie mają granicy właściwej. Jeżeli jednak wyznaczyć



części skończone tych funkcji względem odpowiednio dobranego układu odniesienia (por. [6] cz. II, str. 146–154), to okaże się, że są one identyczne z funkcjami uzyskanymi przez R. GANOWICZA dla płyty jednorodnej [3]. Do wniosku powyższego dochodzimy bezpośrednio, o ile poszczególne składniki rozwiązania przedstawimy w postaci całek Fouriera. Jeśli w wyrażeniach podcałkowych przyjmujemy, że  $A_n \rightarrow 0$ , to otrzymamy obok całek zbieżnych pewne całki rozbieżne. Biorąc części skończone całek rozbieżnych oraz funkcje odpowiadające całkom zbieżnym otrzymuje się taki sam wynik, jak w teorii płyty jednorodnej.

### 5. PRZYKŁAD LICZBOWY

Dla uwidocznienia charakterystycznych różnic między wynikami, jakie dają teorie płyt jednorodnych i niejednorodnych, przeprowadzono przeliczenia płyty dla następujących danych:

- moduł Younga  $E(x_1, x_2) = E(x_1) = E_0 e^{2Ax_1}$ ,
- współczynnik Poissona  $\nu = 0$ ,
- parametry stałe  $A = 0,1l^{-1}$ ,  $c^{-2} = 125l^{-2}$ , gdzie  $l$  oznacza pewną porównawczą długość. Płyta obciążona jest siłą skupioną.

1. Na rys. 5 przedstawiono wykresy sił wewnętrznych uzyskanych na podstawie wzorów (4.6). Wykresy te odnoszą się do płyty kwadratowej wyciętej z płyty nieograniczonej. Siła skupiona usytuowana jest centralnie w stosunku do wyciętego kwadratu. Interesujące jest, że moment zginający  $M_{11}$  w punkcie  $(1, 0)$  osiąga wartość ujemną, co można tłumaczyć jako efekt pewnego «utwierdzenia» płyty na tej krawędzi, gdzie sztywność jest większa.

2. W teorii płyt jednorodnych do najprostszych zadań należy przypadek działania obciążeń skupionych na półnieskończoną płytę podpartą swobodnie na krawędzi. Rozwiązanie tego zadania uzyskuje się bezpośrednio z rozwiązań osobliwych dla płyty nieograniczonej przez takie usytuowanie obciążeń, aby krawędź płyty była osią antysymetrii. W omawianym przypadku płyty niejednorodnej ustawienie dwóch sił skupionych  $+P$  i  $-P$  jak na rys. 6 spełnia warunki:  $M_{22} = w_1 = w_3 = 0$  dla  $x_2 = 0$ , co odpowiada «krawędzi swobodnie podpartej z przeponą».

3. Opisany wyżej sposób zawodzi, gdy zastosujemy go do brzegu  $x_1 = 0$ . Jeśli jednak odpowiednio zróżnicujemy intensywność obciążeń, to można spełnić część żądanych warunków. Z superpozycji działania dwóch sił:  $+Pe^{At_1}$  i  $-Pe^{-At_1}$  (rys. 7) wynika bowiem, że  $w_2 = w_3 = 0$ . Różny od zera pozostaje moment zginający  $\hat{M}_{11}$ :

$$(5.1) \quad \hat{M}_{11}(0, x_2) = \frac{PA t_1}{\pi} K_0(Ar), \quad r = \sqrt{t_1^2 + x_2^2}.$$

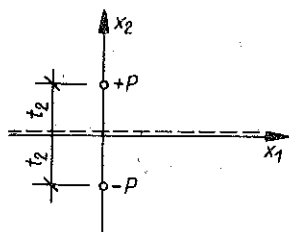
Aby spełnić warunek  $M_{11}(0, x_2) = 0$ , dodamy rozwiązanie regularne  $\Phi^0$ , które składa się z dwóch funkcji  $\bar{\Phi}$  i  $\bar{\bar{\Phi}}$  (por. p. 3). Funkcje te są rozwiązaniami równań jednorodnych:

$$(5.2) \quad (\nabla^2 - A^2)^2 \bar{\Phi} = 0, \quad [\nabla^2 - (A^2 + c^{-2})] \bar{\bar{\Phi}} = 0.$$

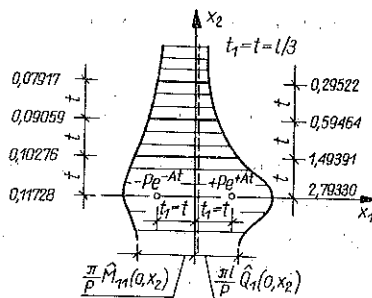


Ponadto muszą być one tak dobrane, aby były spełnione warunki brzegowe

$$(5.3) \quad w_2^0(0, x_2) = w_3^0(0, x_2) = 0, \quad M_{11}^0(0, x_2) = -\hat{M}_{11}(0, x_2) = -M(x_2).$$



Rys. 6



Rys. 7

Należy więc określić jeszcze zależność funkcji  $w_i^0$  od funkcji  $\bar{\Phi}$  i  $\bar{\bar{\Phi}}$ . Jednorodne równania (3.1) będą spełnione tożsamościowo, jeżeli przyjmiemy

$$(5.4) \quad \begin{aligned} w_1^0 &= e^{-A_1 x_2} [ -(\partial_1 - A_1) \bar{\Phi} + (\partial_2 + A_2) \bar{\bar{\Phi}} ], \\ w_2^0 &= e^{-A_2 x_2} [ -(\partial_2 - A_2) \bar{\Phi} - (\partial_1 + A_1) \bar{\bar{\Phi}} ], \\ w_3^0 &= e^{-A_3 x_2} [ 1 - 2c^2 (\nabla^2 - a^2) ] \bar{\Phi}. \end{aligned}$$

Związki (5.4) są pewnym uogólnieniem zależności, którą podał R. GANOWICZ [3]. Gdy przyjmą  $A_1 = A_2 = 0$ , to równania (5.4) przechodzą w równania (2.8) podane w cytowanej pracy na str. 60 dla przypadku, gdy  $\nu = 0$ .

Po uwzględnieniu (5.4) oraz równań (2.1) warunki (5.3) można zapisać następująco:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} -\partial_2 \bar{\Phi} - (\partial_1 + A) \bar{\bar{\Phi}} &= 0, \quad [\nabla^2 - (A^2 + 0,5c^{-2})] \bar{\Phi} = 0, \\ -(\partial_1 - A)^2 \bar{\Phi} + \partial_2 (\partial_1 - A) \bar{\bar{\Phi}} &= -\frac{M(x_2)}{D_0}. \end{aligned}$$

Na równaniach (5.2) i (5.5) wykonamy wykładniczą transformację Fouriera względem współrzędnej  $x_2$ . W rezultacie otrzymamy równania różniczkowe zwyczajne ze względu na  $x_1$ :

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}_w^{IV} - 2(a_2^2 + A^2) \bar{\Phi}_w^{II} + (a_2^2 + A^2)^2 \bar{\Phi}_w &= 0, \\ \bar{\Phi}_w^{II} - (a_2^2 + A^2 + c^{-2}) \bar{\Phi}_w &= 0 \end{aligned}$$

oraz warunki brzegowe

$$(5.7) \quad \begin{aligned} ia_2 \bar{\Phi}_w - \bar{\Phi}_w^I - A \bar{\Phi}_w &= 0, \\ -\bar{\Phi}_w^{II} + 2A \bar{\Phi}_w^I - A^2 \bar{\Phi}_w - ia_2 \bar{\Phi}_w^I + ia_2 A \bar{\Phi}_w &= -\frac{M_w(a_2)}{D_0}, \\ \bar{\Phi}_w^{II} - (a_2^2 + A^2 + 0,5c^{-2}) \bar{\Phi}_w &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązania równań (5.6) można przedstawić następująco:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}_w(x_1) &= C_1 e^{s_1 x_1} + C_2 e^{-s_1 x_1} + C_3 x_1 e^{s_1 x_1} + C_4 x_1 e^{-s_1 x_1}, \\ \bar{\bar{\Phi}}_w(x_1) &= C_5 e^{s_2 x_1} + C_6 e^{-s_2 x_1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$s_1 = s_1(a_2) = \sqrt{a_2^2 + A^2}, \quad s_2 = s_2(a_2) = \sqrt{a_2^2 + A^2 + c^{-2}}.$$

Ponieważ z własności funkcji przemieszczeń wynika, że dla  $x_1 \rightarrow \infty$  funkcje  $\bar{\Phi}$  i  $\bar{\bar{\Phi}}$  mają dążyć do zera, to stałe  $C_1 = C_3 = C_5 = 0$ . Podstawiając równania (5.8) dla  $x_1 = 0$  do warunków brzegowych (5.7) otrzymujemy układ algebraicznych równań liniowych na stałe  $C_2, C_4$  i  $C_6$ :

$$\begin{aligned} ia_2 C_2 + (s_2 - A) C_6 &= 0, \\ -(s_1 + A)^2 C_2 + 2(s_1 + A) C_4 + ia_2(s_2 + A) C_6 &= -\frac{M_w}{D_0}, \\ C_2 + 4c^2 s_1 C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wyznacznik tego układu

$$\Delta = -2(A + s_1) [(s_2 - A) + 4c^2 A s_1 (s_2 - s_1)] \neq 0.$$

Wynika stąd, że rozwiązanie równań (5.2) dla przyjętych warunków brzegowych jest jednoznaczne. Stałe całkowania wyrażają następujące wzory:

$$\begin{aligned} C_2 &= -M_w \frac{4c^2 s_1 (s_2 - A)}{D_0 \Delta}, & C_4 &= M_w \frac{(s_2 - A)}{D_0 \Delta}, \\ C_6 &= iM_w \frac{4c^2 s_1 a_2}{D_0 \Delta}, & M_w(a_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{M}_{11}(0, x_2) e^{ia_2 x_2} dx_2 = \frac{PA t_1 e^{-t_1 s_1}}{\sqrt{2\pi} s_1}. \end{aligned}$$

Poszukiwane rozwiązanie regularne  $\Phi^0 = \bar{\Phi} + \bar{\bar{\Phi}}$  otrzymamy wykonując transformację odwrotną funkcji  $\bar{\Phi}_w$  i  $\bar{\bar{\Phi}}_w$ , uwzględniając wartości obliczonych stałych całkowania.

Dalsze rozważania ograniczymy do obliczenia siły poprzecznej na brzegu  $x_1 = 0$ . Wychodząc ze wzoru (2.1)<sub>2</sub> po uwzględnieniu zależności (5.4) oraz wykonaniu transformacji otrzymano wzór

$$Q_{1w}^0(0, a_2) = \frac{PA t_1}{\sqrt{2\pi} c^2} \frac{e^{-t_1 s_1}}{(s_1 + s_2)(s_2 - A) + 4A s_1}.$$

Występowanie parametru  $s_2(a_2)$  w powyższym wyrażeniu świadczy o tym, że funkcja  $\bar{\bar{\Phi}}$  nie jest tożsamościowo równa zero, jak to ma miejsce w teorii płyt jednorodnych dla omawianego warunku brzegowego. Funkcję  $Q_1^0(0, x_2)$  otrzymamy wykonując transformację odwrotną:

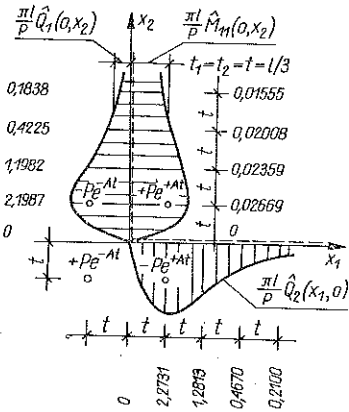
$$Q_1^0(0, x_2) = \frac{PA t_1}{\pi c^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t_1 s_1} \cos a_2 x_2}{(s_1 + s_2)(s_2 - A) + 4A s_1} da_2.$$

Uzyskana całka jest zbieżna, jednak obliczenie jej jest dosyć uciążliwe. Podamy jej wartość dla  $x_1 = x_2 = 0$  i  $t_1 = 1/3$ :

$$Q_1^0(0, 0) = 0,079042P/\pi l.$$

Wartość ta w porównaniu z siłą poprzeczną  $\hat{Q}_1(0, 0) = 2,79330P/\pi l$  jest niewielka. Wpływ regularnej części rozwiązania może być większy przy silniejszej niejednorodności materiału płyty.

4. Na zakończenie podamy wykresy sił brzegowych dla ćwierćpłaszczyzny obciążonej siłą skupioną  $Pe^{At_1}$  w punkcie o współrzędnych  $t_1 = t_2 = t = 1/3$  (rys. 8).



Rys. 8

Spełnienie warunku swobodnego podparcia na krawędzi  $x_1 = 0$  wymaga, podobnie jak w przypadku omawianym wyżej, dodania rozwiązania regularnego  $\Phi^0$  dobraneo tak, aby  $M_{11}(0, x_2) = 0$ . Sposób postępowania będzie analogiczny do podanego w zadaniu dla półpłaszczyzny.

## 6. WNIOSKI

1. Równania przemieszczeniowe dla płyty o niejednorodności wykładniczej tworzą układ trzech równań II rzędu o stałych współczynnikach. Rozwikłanie tego układu można uzyskać

stosując metodę G. C. MOISILA [7]. W efekcie otrzymuje się trzy oddzielne równania na trzy funkcje przemieszczeń  $\Psi_i$ .

2. Wprowadzenie nowych funkcji przemieszczeń  $\Phi_i = \Psi_i e^{A_n x_n}$  znacznie ułatwia rozwiązanie układu równań przemieszczeniowych, ponieważ w układzie tym wszystkie pochodne nieparzyste znikają.

3. Z rozwiązań dla obciążeń skupionych wynika, że zaburzenia w płytach niejednorodnych mogą rozchodzić się nieograniczenie, przy czym jednak potencjał sprężysty zanika do zera w miarę oddalania się od punktu przyłożenia obciążenia.

4. Przykład liczbowy ilustruje sposób otrzymywania rozwiązań dla płyt częściowo ograniczonych za pomocą rozwiązań dla płyty nieograniczonej. Stosowanie znanego z teorii płyt jednorodnych sposobu superpozycji obciążeń jest celowe z tym jednak zastrzeżeniem, że wartości obciążeń należy zróżnicować odpowiednio do zmiany sztywności płyty. Sposób ten pozwala spełnić dwa warunki dla «brzegu wolnopodpartego z przeponą». W celu spełnienia trzeciego warunku brzegowego należy dodać rozwiązanie regularne, będące rozwiązaniem równania jednorodnego.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. BATEMAN, *Tables of integral transforms*, 1, Mc Graw Hill Book Co., 1954.  
 2. E. BOROWCZYK, M. SUCHAR, *Bending of rectangular orthotropic plate of variable thickness*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 17, 7, 557-562, 1969.

3. R. GANOWICZ, *Wybrane zagadnienia z teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teor. i Stos., 4, 3, 55–95, 1966.
4. A. GAWĘCKI, *Statyka podłużnie niejednorodnej płyty Reissnera o zmiennej grubości*, Rozpr. Inżyn., 20, 4, 555–576, 1972.
5. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
6. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, Cz. I, PWN, Warszawa 1957, Cz. II, PWN, Warszawa 1962.
7. G. C. MOISIL, *Asupra sistemelor de ecuații cu derivate parțiale lineare și cu coeficienți constanți*, Bull. Acad. RPR, ser. A, vol. 1, 1949.
8. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1961.
9. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
10. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, Mc Graw Hill Book Co., New York 1951.

## Резюме

## ПЛАСТИНА ТИПА РЕЙССНЕРА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В работе выведены уравнения в перемещениях для линейно-упругой изотропной пластины типа Рейсснера постоянной толщины. Предполагается, что модуль Юнга материала пластины зависит экспоненциально от координат срединной поверхности пластины. Уравнения преобразованы к трем отдельным соотношениям для функций перемещений.

Получено сингулярное решение для случая неограниченной пластины под действием сосредоточенных силы и момента. Численный пример иллюстрирует способы решения некоторых краевых задач для частично ограниченных пластин. Общие результаты применены к некоторой модели упрощенной пластины типа Рейсснера, в которой не учитывается влияние поперечных нормальных напряжений. Это упрощение предложено, исходя из результатов Гановича [3].

## SUMMARY

## THE REISSNER PLATE WITH EXPONENTIAL NONHOMOGENEITY

The paper presents the displacement equations for a linear-elastic, isotropic Reissner plate of constant thickness, the Young modulus of the material being an exponential function of the middle surface coordinates. The equations are reduced to three separate equations for the displacement functions. In the case of an infinite plate, the singular solutions corresponding to concentrated forces and couples are given. The numerical example demonstrates the method of solution of certain boundary value problems for partially bounded plates. The considerations are generally referred to a simplified model of a Reissner plate in which the transversal normal stresses are disregarded. This simplification was made in view of the results of the paper by R. GANOWICZ [3].

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
INSTYTUT TECHNOLOGII I KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1973 r.