

DYNAMICZNE ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI POWŁOKI STOŻKOWEJ W UJĘCIU NIELINIOWYM

STEFAN JONIAK i WOJCIECH OSMÓLSKI (POZNAŃ)

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

- h grubość powłoki,
 s, φ współrzędne punktu na powierzchni środkowej powłoki,
 s_1, s_0 wymiary powłoki,
 2α kąt wierzchołkowy stożka,
 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ sztywność zginania powłoki,
 ν liczba Poissona
 $\nu_1 = \frac{1-\nu}{2}$,
 $\varphi_1 = \varphi \sin \alpha$,
 p ciśnienie zewnętrzne,
 t czas,
 γ ciężar właściwy,
 g przyspieszenie ziemskie,
 ψ funkcja siły
 w funkcja ugięcia,
 w_0 funkcja ugięcia początkowego,
 f, f_1, f_0 parametry funkcji ugięć,
 k liczba fal obwodowych,
 $n = \frac{k}{\sin \alpha}$
 m liczba półfal w kierunku tworzącej,
 $m_1 = \frac{\pi m}{\ln \frac{s_1}{s_0}}$

1. WSTĘP

W pracy rozpatruje się nieliniowe zagadnienie dynamiczne stateczności powłoki w kształcie stożka ściętego, obciążonej wszechstronnie ciśnieniem zewnętrznym, wzrastającym szybko w czasie. Powłoka jest cienkościenna i wykazuje początkowe

odstępstwa od prawidłowego kształtu geometrycznego (ugięcia początkowe) rzędu grubości. Brzegi powłoki są podparte swobodnie. Jeżeli powłoka jest obciążona w sposób dynamiczny (siłą, która zmienia się w czasie według określonego prawa) należy, zgodnie z nieliniową teorią dynamiczną, wyznaczyć warunek, przy którym zachodzi tzw. przeskok powłoki, a w przypadku, kiedy to ma miejsce, należy wyznaczyć ugięcia i naprężenia w powłoce po przeskoku.

W dostępnej literaturze nie spotkano tak postawionego zagadnienia dla powłoki stożkowej. Rozpatrywano jedynie (w nielicznych zresztą pracach) zagadnienie takie w odniesieniu do powłoki walcowej.

Z ważniejszych prac dotyczących zagadnienia stateczności dynamicznej powłok walcowych należy wymienić prace AGAMIROWA i WOLMIRA [1], BOLOTINA i BOJCZENKI [2], PROCENKI i PAWŁOWSKIEGO [3] oraz SZYCA i TWARDOSZA [4]. Pierwsza i trzecia poświęcone są nieliniowej stateczności dynamicznej zamkniętej powłoki walcowej, swobodnie podpartej i obciążonej siłami powierzchniowymi, zmiennymi w czasie według prawa liniowego i parabolicznego. W drugiej rozwiązano zagadnienie dynamicznego wyboczenia otwartej powłoki walcowej uwzględniając również wpływ prędkości obciążenia, ugięcia początkowego oraz współczynnika tłumienia na obciążenie powodujące przeskok i na wartość ugięć maksymalnych po przeskoku. W czwartej pracy rozpatrywano zagadnienie powłoki zamkniętej, wykonanej z materiału o ortotropii naturalnej, przy czym do rozwiązania zagadnienia przyjęto funkcję spełniającą wszystkie warunki brzegowe. Zanalizowano wpływ prędkości obciążenia, ugięcia wstępnego i wymiarów powłoki na przebieg dynamicznej utraty stateczności.

2. RÓWNIANIA WYJŚCIOWE ZAGADNIENIA

Równania zagadnienia stateczności powłoki obciążonej wszechstronnie ciśnieniem hydrostatycznym ([6] i [7]) mają postać

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \nabla^2 \psi - Eh \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi_1} \right) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) \right]^2 + \right. \\
 \left. + \frac{\text{ctg } \alpha}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi_1^2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{s} \frac{\partial w_0}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right\} = 0, \quad (2.1) \\
 DV^2 \nabla^2 w + \frac{\text{ctg } \alpha}{s} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} (w + w_0) \left(\frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial s} \times \\
 \times \left[\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} (w + w_0) \right] \left(- \frac{1}{s} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial \varphi_1} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \left[\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} (w + w_0) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (w + w_0) \right] + ps \text{tg } \alpha \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

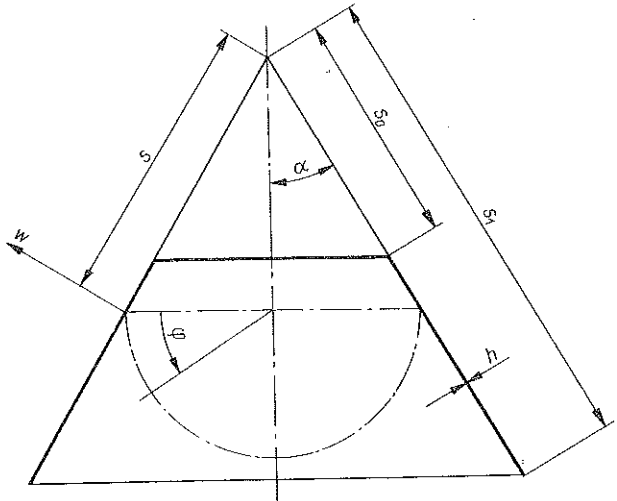
Równania powyższe opisują równowagę obojętną powłoki.

W zagadnieniu dynamicznym należy uwzględnić siły bezwładności odniesione do jednostki powierzchni środkowej. Do równania (2.1) do jego lewej strony należy w związku z tym wprowadzić wyraz

$$\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Pomija się tu składowe sił bezwładności o kierunkach stycznych do powierzchni środkowej ze względu na to, że sztywność powłoki w tych kierunkach jest wielokrotnie większa od sztywności w kierunku normalnej.

Równanie (2.1) (równanie nierozdzielności) traktuje się zgodnie z WOLMIREM [1] jako quasi-statyczne.



Rys 1.

Po wprowadzeniu nowej zmiennej $z = \ln s/s_0$ i uwzględnieniu wyrazu bezwładnościowego, równanie (2.1) przejdzie w równanie ruchu:

$$(2.2) \quad D\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{s_0^4 e^{4z}} \left\{ s_0 e^z \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1^2} \right) \left[\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial z^2} - \frac{\partial (w+w_0)}{\partial z} \right] - 2 \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \varphi_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} \right) \left[-\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial z \partial \varphi_1} \right] - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \times \left[\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial (w+w_0)}{\partial z} \right] + p s_0^3 e^{3z} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} \right) \right\} + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Równanie nierozdzielności (2.1) ma teraz postać:

$$(2.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 \psi - \frac{Eh}{s_0^4 e^{4z}} \left\{ s_0 e^z \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial \varphi_1} - \frac{\partial w_0}{\partial \varphi_1} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi_1} - \frac{\partial w}{\partial \varphi_1} \right) - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} - \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \right\} = 0.$$

Operator $\nabla^2 \nabla^2$ w równaniach (2.2) i (2.3) przedstawia się następująco:

$$(2.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 = \frac{1}{s_0^4 e^{4z}} \left(\frac{\partial^4}{\partial z^4} - 4 \frac{\partial^3}{\partial z^3} + 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} - 4 \frac{\partial^3}{\partial z \partial \varphi_1^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^4}{\partial \varphi_1^4} \right).$$

3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA NIEROZDZIELNOŚCI

Funkcję ugięcia i ugięcia początkowego przyjęto w postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} w &= s_0 \operatorname{ctg} \alpha e^{v_1 z} f(\sin m_1 z + f_1 \sin 2m_1 z) \cos n\varphi_1, \\ w_0 &= s_0 \operatorname{ctg} \alpha e^{v_1 z} f_0(\sin m_1 z + f_1 \sin 2m_1 z) \cos n\varphi_1. \end{aligned}$$

Spośród parametrów funkcji ugięcia i ugięcia początkowego tylko f jest zależne od czasu. Dla funkcji sił ψ przyjęto:

$$(3.2) \quad \psi = F(z) \cos n\varphi_1.$$

Uwzględniając zależności (3.1) i (3.2) w równaniu (2.3) oraz wykorzystując związek (3.2) po rozwiązaniu równania (2.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} F = C_1 e^{nz} + C_2 e^{-nz} + C_3 e^{(n+2)z} + C_4 e^{(2-n)z} + e^{(1+v)z} (A_1 \sin m_1 z + A_2 \sin 2m_1 z + \\ + A_3 \cos m_1 z + A_4 \cos 2m_1 z) + e^{2v_1 z} (A_5 + A_6 \sin 2m_1 z + A_7 \sin 4m_1 z + \\ + A_8 \sin 3m_1 z + A_9 \sin m_1 z + A_{10} \cos 2m_1 z + A_{11} \cos 4m_1 z + \\ + A_{12} \cos 3m_1 z + A_{13} \cos m_1 z). \end{aligned}$$

Stałe C_1, C_2, C_3, C_4 podlegają wyznaczeniu z warunków brzegowych. Zarówno stałe C_i jak i A_i są przedstawione w pracy [7].

4. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA RÓWNOWAGI DYNAMICZNEJ

Aby równanie (2.2) sprowadzić do związków między parametrami funkcji ugięcia i obciążeniem zewnętrznym, zastosujemy metodę Bubnowa-Galerkina. Oznaczamy więc lewą stronę równania (2.2) jako $K(z, \varphi_1, t)$. Funkcję $K(z, \varphi_1, t)$ ortogonalizujemy dwukrotnie za pomocą składników funkcji ugięcia (3.1). Otrzymujemy dwa następujące równania:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \int_0^{\ln \frac{s_1}{s_0}} \int_0^{2\pi \sin \alpha} K(z, \varphi_1, t) e^{(v_1+2)z} \sin m_1 z \cos n\varphi_1 dz d\varphi_1 = 0, \\ \int_0^{\ln \frac{s_1}{s_0}} \int_0^{2\pi \sin \alpha} K(z, \varphi_1, t) e^{v_1 z} \sin 2m_1 z \cos n\varphi_1 dz d\varphi_1 = 0. \end{aligned}$$

Po wstawieniu do $K(z, \varphi_1, t)$ funkcji ugięcia i funkcji sił, przeprowadzeniu całkowania i uporządkowaniu równania (4.1) dochodzimy do następującego nieliniowego równania różniczkowego:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} Ef(f+f_0)(f+2f_0)(H_1+H_2f_1+H_3f_1^2+H_4f_1^3)+ \\ +Ef(H_5+H_6f_1)+fp(H_7+H_8f_1)+\frac{d^2f}{dt^2}(K_1+K_2f_1)=0, \end{aligned}$$

gdzie

$$K_1 = \left[\left(\frac{s_1}{s_0} \right)^{2\nu_1+2} - 1 \right] \frac{1}{4(1+\nu_1)} \frac{s_0^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha}{g},$$

$$K_2 = \left[\left(\frac{s_1}{s_0} \right)^{2\nu_1+2} - 1 \right] \left[\frac{-2(1+\nu_1)}{(2\nu_1+2)^2 + m_1^2} + \frac{2(1+\nu_1)}{(2\nu_1+2)^2 + 9m_1^2} \right] \frac{s_0^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha}{g};$$

stałe H_i mają bardzo złożoną budowę; ich wartości są częściowo podane w pracy [7].

Drugiego z równań Bubnowa-Galerkina nie będziemy rozwiązywali, w związku z czym parametr f_1 obliczać będziemy tak jak w zagadnieniu statycznym [7].

5. ZWIĄZEK MIĘDZY PARAMETRAMI UGIĘCIA A CZASEM

Przyjmujemy, że ciśnienie zewnętrzne zmienia się w czasie w sposób następujący:

$$p = ct,$$

przy czym c jest prędkością narastania obciążenia.

Równanie (4.2) przekształci się więc do postaci

$$(5.1) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = -Ef(f+f_0)(f+2f_0) \frac{H_1 + H_2 f_1 + H_3 f_1^2 + H_4 f_1^3}{K_1 + K_2 f_1} -$$

$$- Ef \frac{H_5 + H_6 f_1}{K_1 + K_2 f_1} - ct f \frac{H_7 + H_8 f_1}{K_1 + K_2 f_1}.$$

Równanie powyższe będziemy rozwiązywać przy następujących warunkach początkowych:

$$f = f_0 \quad \text{dla} \quad t = 0$$

oraz

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

6. ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE ZAGADNIENIA I WNIOSKI Z OBLICZEŃ

Obliczenia przeprowadzono na elektronicznej maszynie cyfrowej, posługując się metodą Adamsa-Störmera. Do obliczeń przyjęto następujące dane:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad \alpha = 20^\circ, \quad s_0 = 10 \text{ cm}, \quad \frac{s_1}{s_0} = 2, \quad \frac{s_0}{h} = 250,$$

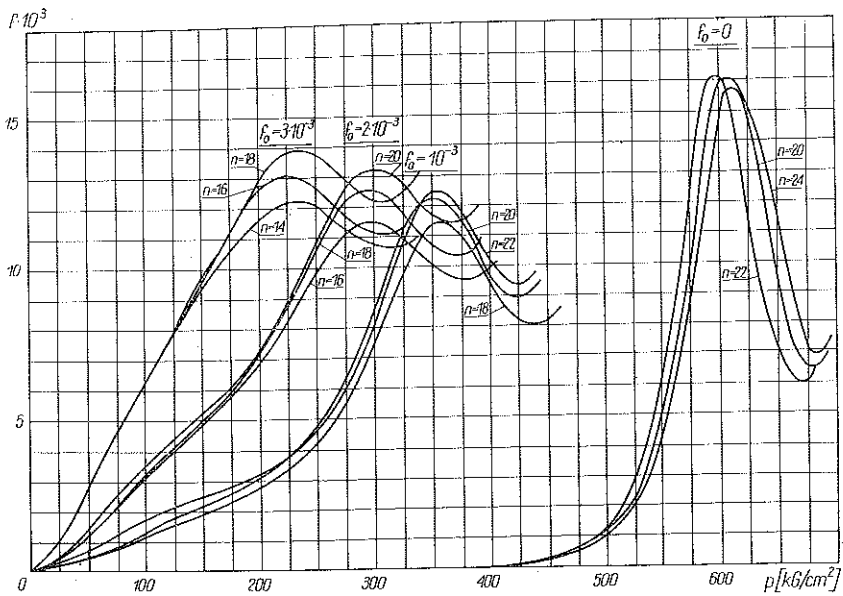
parametr wstępnego ugięcia f_0 o wartościach:

$$0,000; 0,001; 0,002; 0,003;$$

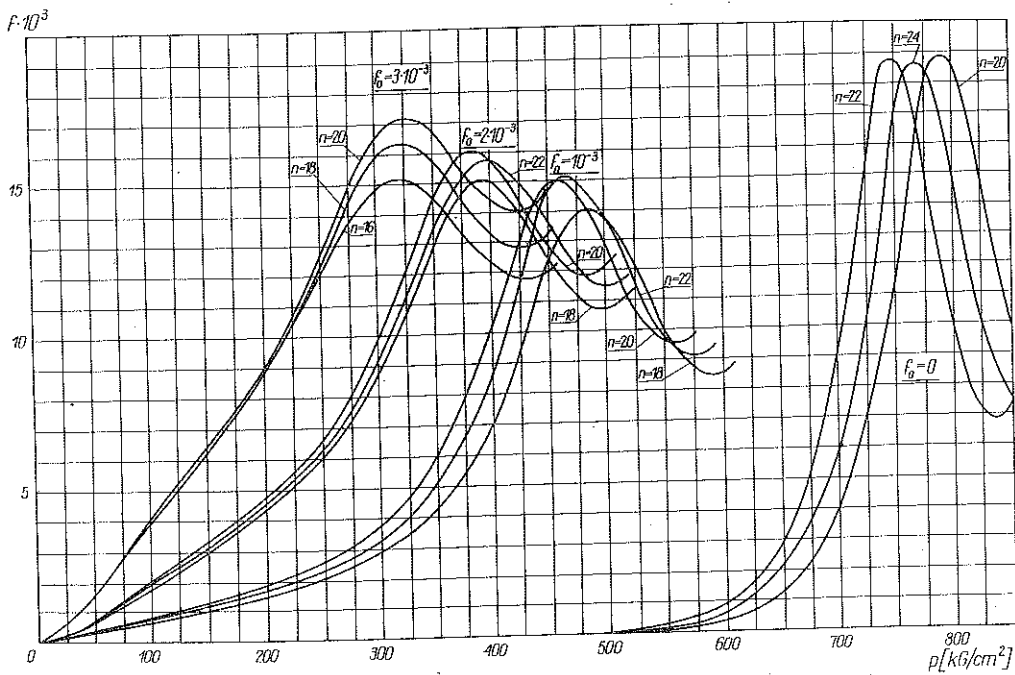
prędkość obciążenia c o wielkościach:

$$26000; \quad 39000 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \text{ s}^{-1}.$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach.



Rys. 2



Rys. 3

Na rys. 2 przedstawiono wykresy $f=f[p(t)]$ dla prędkości $c=26\ 000\ \text{kG/cm}^2\ \text{s}^{-1}$; na rys. 3 te same wykresy dla prędkości $c=39\ 000\ \text{kG/cm}^2\ \text{s}^{-1}$. Krzywe w obu przypadkach są podobne, co wskazuje na podobny przebieg zjawiska utraty stateczności. Wyróżnia się spośród innych grupa krzywych dotyczących powłoki idealnego kształtu. Przebieg dynamicznego zjawiska utraty stateczności jest dla powłoki idealnego kształtu ($f_0=0$) podobny do przebiegu tego zjawiska w przypadku powłoki walcowej. I tu zjawisko rozwija się początkowo bardzo wolno i dopiero po przekroczeniu pewnego ciśnienia, znacznie jednak przewyższającego krytyczne ciśnienie statyczne, tempo wzrostu ugięcia nabiera gwałtownego charakteru. Następuje tu przeskok powłoki do nowego położenia równowagi i zostaje osiągnięte maksimum ugięcia (wierzchołek krzywej), a następnie powłoka przechodzi w stan drgań nieliniowych.

Dla powłoki wykazującej ugięcia początkowe przebieg zjawiska jest nieco inny niż opisany poprzednio. W miarę wzrostu ugięć początkowych zjawisko nabiera coraz gwałtowniejszego charakteru już od samego początku, aby ostatecznie po osiągnięciu maksimum ugięcia przerodzić się w drgania nieliniowe. Wraz ze wzrostem wartości parametru f_0 maleją obciążenia, przy których powłoka traci stateczność. Maleje wtedy również liczba tworzących się fal ugięcia w kierunku obwodowym (reprezentowana przez parametr n).

Przy szybkości obciążenia $c=26000\ \text{kG/cm}^2\ \text{s}^{-1}$ tworzy się 5 ($f_0=0,003$), 6 ($f_0=0,002$), 7 ($f_0=0,001$), 8 ($f_0=0,000$) fal ugięcia w kierunku obwodowym, natomiast przy szybkości $c=39\ 000\ \text{kG/cm}^2\ \text{s}^{-1}$ liczba fal wynosi 6 ($f_0=0,003$), 7 ($f_0=0,002$), 7 ($f_0=0,001$) i 8 ($f_0=0,000$). Wydaje się, że w miarę wzrostu prędkości obciążenia powłoka traci stateczność przy coraz wyższych wartościach obciążenia. Przedstawione w pracy rozwiązanie numeryczne zagadnienia ma charakter tylko fragmentaryczny. Przeanalizowano jedynie wpływ ugięć początkowych na przebieg dynamicznego zjawiska utraty stateczności. Trudności natury rachunkowej nie pozwoliły na szerszą analizę zagadnienia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. Агамиров, А. С. Вольмир, *Поведение цилиндрических оболочек при динамическом нагружении всестороннего давления или осевого сжатия*, Изв. Акад. Наук СССР, Мех. и машиностр., 3, 1959.
2. В. В. Болотин, Г. А. Бойченко, *Исследования прощелкивания тонких, упругих оболочек под действием динамических нагрузок*, Расчеты на прочность, 5, машизн., 1960.
3. О. П. Проценко, В. С. Павловский, *Динамическая устойчивость эластичной цилиндрической оболочки при комбинированной, непериодической во времени нагрузке*, Проблемы устойчивости в строительной механике, Издат. Лит. по строительству, Москва 1965.
4. W. SZYC, F. TWARDOSZ, *O pewnym zagadnieniu stateczności powłoki walcowej*, Arch. Bud. Maszyn, 19, 1, 1972.
5. А. С. Вольмир, Л. Н. Сметанина, *Поведение оболочек из композиционных материалов при динамическом приложении осевого сжатия*, Строит. мех. Расчет 4, Москва 1970.
6. Н. М. Муштарш, К. З. Галимов, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткнигиздат, Казань 1957.
7. S. JONIAK, *Nieliniowe zagadnienie stateczności powłoki stożkowej, obciążonej wszechstronnie ciśnieniem hydrostatycznym*, Arch. Budowy Maszyn, 19, 2, 1972.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В статье дано решение нелинейной динамической задачи об устойчивости оболочки в виде усеченного конуса. Оболочка нагружена всесторонним внешним давлением, которое быстро нарастает во времени. Предполагается, что начальные прогибы имеют порядок толщины а края оболочки свободно оперты, причем оболочка является тонкостенной.

Исходные уравнения задачи состоят из уравнения равновесия, в котором учтена нормальная составляющая сил инерции, и из уравнения совместности деформации, рассматриваемого как квазистатическое.

Сперва решается уравнение совместности, что позволяет определить функцию сил для принятых предварительно функций прогибов и начальных прогибов. Затем решается уравнение равновесия, причем для его решения применен метод Бубнова—Галеркина.

В результате получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка по отношению ко времени. Дано численное решение данного уравнения. Результаты вычислений представлены в виде графиков.

SUMMARY

DYNAMIC STABILITY OF CONICAL SHELLS IN A NON-LINEAR APPROACH

The paper presents a solution of the non-linear, dynamic problem of stability of a shell in the form of a truncated cone. The entire shell is loaded by an external pressure increasing rapidly in time. The simply supported shell is thin-walled and its initial deflections are of the order of thickness. The governing equations consist of the equations of motion (including the inertia component in the normal direction) and the quasi-static compatibility equations. Solution of the compatibility conditions yields the function of forces (the functions of deflection and initial deflections being assumed) and is followed by the solution of the equilibrium equation. The Bubnov-Galerkin method is applied to the latter solution.

As a result, a non-linear differential equation of second order with respect to time is obtained. External pressure is assumed to vary in time a linear manner. A numerical solution and graphs conclude the paper.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 października 1972 r.
