

IDENTYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH O CZŁONACH LEPKOSPĘŻYSTYCH

EUGENIUSZ KAMIŃSKI (WARSZAWA)

1. WSTĘP. METODY IDENTYFIKACJI OGÓLNEJ I PEŁNEJ

Termin «identyfikacja» ma znaczenie umowne. Według najprostszej definicji, podanej przez J. SEIDLERA [29] w zastosowaniu do automatyki, identyfikacją nazywa się «określenie własności obiektu sterowanego na drodze doświadczałnej». W mechanice identyfikacja sprowadza się do rozwiązania tzw. drugiego zadania, polegającego na określeniu sił działających na układ na podstawie znajomości ruchu układu, tj. rozwiązania zadania odwrotnego. W różnych gałęziach techniki inaczej się jednak rozumie zadanie «określenia własności układu». W automatyce wystarcza np. na ogół wyznaczenie transmitancji względnie macierzy transmitancji lub funkcji regresji [1, 6, 7, 16, 20, 32, 35, 40 i 41]. Identyfikacja w tym przypadku nazywana będzie ogólną. W mechanice, a także i w innych dyscyplinach, bardzo często chodzi również o wyznaczenie wartości parametrów następujących w równaniach różniczkowych, opisujących ruch układu [1-3, 5, 8, 11-15, 36, 42, 45 i 46]. Identyfikacja taka (rozważania na jej temat są zasadniczym motywem niniejszej pracy) nazywana będzie identyfikacją pełną. Na końcu pracy załączone jest «zestawienie bardziej znanych metod identyfikacji» (ss. 400-408).

Najdokładniejsze wyniki identyfikacji ogólnej daje metoda częstościowa. Jeżeli mechaniczny układ liniowy zostaje pobudzony na wejściu za pomocą sygnału sterującego $u = u_0 \sin \omega t$, to odpowiedź na wyjściu, po wygaśnięciu procesu przejściowego, mieć będzie postać: $x = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$. Pokazano to schematycznie na rys. 1. Zmieniając wartości ω otrzymać można dla układu liniowego trzy podstawowe rodzaje charakterystyk: amplitudowo-częstościową $A(\omega) = x_0/u_0(\omega)$, fazowo-częstościową $\Phi = \varphi(\omega)$ oraz amplitudowo-fazową $A(\varphi)$. W tej ostatniej ω pełni funkcję parametru. Dla układów mechanicznych sygnałem sterującym jest siła, $u_0 = P_0 [N]$; współrzędna stanu x [cm] jest przemieszczeniem, wobec czego charakterystyka amplitudowo-częstościowa stanowi charakterystykę «podatności dynamicznej». Charakterystyka amplitudowo-fazowa odpowiada dokładnie transmitancji widmowej



Rys. 1

$$(1.1) \quad G(j\omega) = \frac{x_0}{P_0} (\cos \varphi - j \sin \varphi) = A(\omega) e^{j\varphi}.$$

porównywane z widmami rzeczywistymi, wyznaczanymi bez większych trudności na drodze eksperymentalnej. Podstawowe znaczenie w badaniach identyfikacyjnych ma fakt, że dla losowych procesów stacjonarnych i ergodycznych obowiązuje ta sama reguła na wyznaczenie transmitancji układu, jak dla procesów zdeterminowanych. Jeżeli $u(t)$ oznacza przypadkową funkcję na wejściu układu, a $x(t)$ na wyjściu, to transformata Fouriera transmitancji wyraża się za pomocą transformat $A_u(j\omega)$ i $A_x(j\omega)$ funkcji na wejściu i wyjściu:

$$(1.8) \quad G(j\omega) = \frac{A_x(j\omega)}{A_u(j\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt}{\int_{-T}^T u(t) e^{-j\omega t} dt}.$$

Obok tego podawane są inne wzory określające transmitancję. W. W. SOŁODOWNIKOW [32] przyjmuje

$$(1.9) \quad G(j\omega) = \frac{S_{ux}(j\omega)}{S_u(\omega)},$$

gdzie $S_{ux}(j\omega)$ oznacza widmo gęstości mocy wzajemnej, a $S_u(\omega)$ widmo gęstości mocy własnej. Stosowany również bywa [16 i 32] wzór

$$(1.10) \quad |G(j\omega)|^2 = \frac{S_x(\omega)}{S_u(\omega)}.$$

Metody identyfikacji, oparte na wykorzystaniu procesów losowych, rozwijane usilnie w ostatnich latach [12, 24, 27, 32, 37, 38, 39, 40 i 41], znajdują niewątpliwie zastosowanie praktyczne, ponieważ budowane są coraz lepsze aparaty do wyznaczania widm gęstości mocy (np. przez firmę duńską Brüel i Kjaer) i funkcji korelacyjnych (np. firmy duńskiej DISA), a także rozwijane są metody pośrednie, umożliwiające wyznaczenie np. funkcji korelacyjnych za pomocą komputerów. Na razie jednak dokładność tych metod nie jest zbyt duża [17] i z tego względu rozwijane są również metody analizy regresyjnej lub czynnikowej, oparte na badaniu krótkotrwałych stanów ustalonych [16, 20 i 21].

Celem identyfikacji pełnej jest wyznaczenie wartości współczynników występujących w równaniach, opisujących ruch układu. W znanych autorowi pracach na ten temat, np. [1, 3, 5, 13, 14, 17, 35, 36, 42, 45 i 46], zakłada się, że znana jest struktura zarówno geometryczna, jak i fizyczna układu. Znana jest więc liczba mas i sposób ich wzajemnego powiązania, przy czym elementy łączące wyraźnie się rozdziela na człony sprężyste i rozpraszające energię, a właściwości tych ostatnich opisuje za pomocą tłumików wiskotycznych, histerezowych lub mieszanych. W toku dalszych rozważań zostanie wykazane, że ustalenie *a priori* modelu obliczeniowego prowadzić może do istotnych nieporozumień i błędów i że dla ich uniknięcia konieczne jest wykonanie wstępnych pomiarów, umożliwiających zbadanie struktury fizycznej elementów łączących.

Niech więc równania ruchu układu o n stopniach swobody mają np. postać

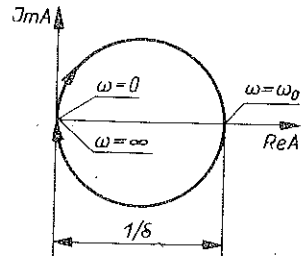
$$(1.11) \quad A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{P}(t),$$

Odwrotność impedancji nazywana jest admitancją $A=1/I$. Pojęcie to jest coraz szerzej wykorzystane w identyfikacji ze względu na swą specjalną własność [36 i 42]. Dla układu o jednym stopniu swobody, opisanego równaniem

$$(1.6) \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = q \sin \omega t,$$

wykres admitancji na płaszczyźnie zespolonej ma mianowicie kształt okręgu, którego średnica jest odwrotnie proporcjonalna do współczynnika tłumienia δ (rys. 2). Każde odchylenie od prawidłowości kształtu świadczy o odstępstwie modelu rzeczywistego od przyjętego do obliczeń. Okoliczność ta jest wykorzystywana przy identyfikacji układów o kilku stopniach swobody metodą badania głównych postaci drgań, co będzie bliżej opisane w dalszej części pracy (Zestawienie, pozycja 11) [36 i 42].

Układ mechaniczny może być również scharakteryzowany przez wyznaczenie jego głównych postaci drgań. Metody i warunki wyznaczania ich, omówione szczegółowo m.in. w pracy [1], będą jeszcze wykorzystane w dalszej części pracy (por. również Zestawienie, pozycja 3 i 4).



Rys. 2

Pojęcie transmitancji jest szersze od pojęcia podatności, ale jej istotne ograniczenie polega na tym, że w zasadzie może być ona wyznaczona tylko dla układów liniowych. (W niektórych pracach dotyczących teorii regulacji, np. w [16], wprowadza się pojęcie transmitancji elementu nieliniowego jako stosunku pierwszej harmonicznej sygnału wyjściowego do sinusoidalnego sygnału wejściowego). Tymczasem charakterystykę podatności wyznacza się również dla układów nieliniowych. Odpowiedź takich układów zawiera również składowe o częstościach innych niż częstość siły wymuszającej, a ponadto zależy od amplitudy siły wymuszającej.

Obok wymuszenia harmonicznego do wyznaczania charakterystyk dynamicznych stosuje się również wymuszenie za pomocą skoku jednostkowego lub impulsu jednostkowego. Metody te są prostsze w realizacji, ale obliczone na podstawie procesów przejściowych charakterystyki obciążone są znacznymi błędami. Z tego względu metody te są stosowane do układów prostych, np. o jednym stopniu swobody i o małym tłumieniu, ponieważ w tych warunkach błędy są stosunkowo małe. Odpowiedź impulsową $g(t)$ można uzyskać również nie na podstawie bezpośrednich pomiarów, a na drodze pośredniej przy wymuszeniu układu za pomocą sygnału przypadkowego, zwanego białym szumem. Jednostkową odpowiedź impulsową przedstawia wtedy funkcja korelacji wzajemnej:

$$(1.7) \quad R_{ux}(\tau) = g(\tau).$$

Wykorzystanie sygnału w postaci szumu białego stanowi przypadek szczególny ogólnej metody wyznaczania charakterystyk na podstawie obserwacji wyjść pod wpływem wymuszeń losowych. Niezmiernie wygodnym narzędziem badania procesów losowych są przekształcenia Fouriera lub Laplace'a: umożliwiają one przedstawienie rozpatrywanych funkcji za pomocą widm ciągłych, które mogą być z kolei

z których można wyznaczyć ν nieznanych wektorów własnych λ_ν , z dokładnością do stałego mnożnika. Na podstawie równania (2.6) można wyznaczyć stosunki amplitud przemieszczeń poszczególnych mas np.

$$(2.7) \quad \mu_{rv} = \frac{\lambda_{rv}}{\lambda_{1v}}, \quad \mu_\nu = \begin{bmatrix} \mu_{2\nu} \\ \vdots \\ \mu_{n\nu} \end{bmatrix}.$$

Każdy z wektorów własnych λ_ν lub zbiór współczynników μ_{rv} ($r=1, \dots, n$) określa ν -tą postać drgań głównych, a współczynniki μ_{rv} nazywane są współczynnikami rozkładu głównych postaci drgań.

Współczynniki μ_{rv} są liczbami rzeczywistymi, co oznacza, że poszczególne masy układu drgające zgodnie z ν -tą postacią drgań przemieszczają się w fazie lub przeciwfazie wszystkie z częstością $\omega_{0\nu}$. Drugą zasadniczą cechą współczynników rozkładu i wektorów własnych jest to, że spełniają one warunki ortogonalności

$$(2.8) \quad \lambda_k^T A \lambda_\nu = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_{i,r} a_{ir} \mu_{rk} \mu_{i\nu} = 0 \quad \text{dla} \quad \nu \neq k,$$

$$\lambda_k^T C \lambda_\nu = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_{i,r} c_{ir} \mu_{rk} \mu_{i\nu} = 0 \quad \text{dla} \quad \nu \neq k.$$

Ortogonalność współczynników rozkładu umożliwia obliczenie współczynników rozkładu bez uprzedniego obliczania częstości drgań własnych oraz zastąpienie równania (2.1) przez n niezwiązanych ze sobą równań we współrzędnych głównych s (energia kinetyczna i potencjalna układu, wyrażona za pomocą tych współrzędnych, zawiera tylko kwadraty prędkości lub przemieszczeń uogólnionych). Dokonuje się tego za pomocą transformacji

$$(2.9) \quad \mathbf{q} = M\mathbf{s},$$

gdzie M jest macierzą współczynników rozkładu:

$$(2.10) \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mu_{21} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \dots & \mu_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz $M^T M$ jest diagonalna, ponieważ wektory własne, odpowiadające różnym wartościom własnym, są parami ortogonalne; przeto $\lambda_\nu^T \lambda_k = 0$ dla $k \neq \nu$.

Mnożąc (2.1) przez M^T otrzymuje się

$$(2.11) \quad M^T A M \ddot{\mathbf{s}} + M^T C M \dot{\mathbf{s}} = 0,$$

przy czym macierze przy $\ddot{\mathbf{s}}$ i $\dot{\mathbf{s}}$ są diagonalne:

$$(2.12) \quad \begin{bmatrix} m_\nu \\ \vdots \\ m_\nu \end{bmatrix} = M^T A M = \begin{bmatrix} \mu_\nu^T A \mu_\nu \\ \vdots \\ \mu_\nu^T A \mu_\nu \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad m_\nu = \sum_{i,r} a_{ir} \mu_{rv} \mu_{i\nu} \quad (\nu=1, \dots, n),$$

$$\begin{bmatrix} k_\nu \\ \vdots \\ k_\nu \end{bmatrix} = M^T C M = \begin{bmatrix} \mu_\nu^T C \mu_\nu \\ \vdots \\ \mu_\nu^T C \mu_\nu \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad k_\nu = \sum_{i,r} c_{ir} \mu_{rv} \mu_{i\nu} \quad (\nu=1, \dots, n).$$

gdzie A , B i C przedstawiają kwadratowe, symetryczne macierze współczynników o wymiarze $n \times n$, a $\ddot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}$, \mathbf{q} i $\mathbf{P}(t)$ macierze kolumnowe o n wierszach. Równania takie zawierają $3n(n+1)/2$ nieznanymi współczynników, zawartych w macierzach A , B i C . Przy układaniu równań w postaci «wprost» macierz A będzie diagonalna; również w macierzach B i C mogą być z góry znane elementy o wartościach zerowych, ale nie zmienia to w istotny sposób procedury postępowania. Celem identyfikacji pełnej jest właśnie wyznaczenie wartości tych $3n(n+1)/2$ współczynników. Bardziej znane metody rozwiązania tego zadania podane są w Zestawieniu, pozycje 5–15. Pełny opis tych metod podany jest w pracy [11]; tu rozważania zostaną ograniczone do metod opartych na wyznaczaniu głównych postaci drgań.

2. IDENTYFIKACJA METODĄ WSPÓŁCZYNNIKÓW ROZKŁADU GŁÓWNYCH POSTACI DRGAŃ

2.1. Układy autonomiczne

Pojęcie głównych postaci drgań zostało wprowadzone przy badaniu liniowych układów mechanicznych bez tłumienia, których ruch można opisać za pomocą równania macierzowego

$$(2.1) \quad A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = 0,$$

gdzie A i C są to kwadratowe, symetryczne macierze, opisujące własności masowe i sprężyste układu. Macierz A jest dodatnio określona, elementy a_{ir} i c_{ir} macierzy A i C są stałe. Wymiary macierzy wynoszą $n \times n$, gdzie n oznacza liczbę współrzędnych uogólnionych. Przy układaniu równań ruchu metodą przemieszczeń łatwo doprowadzić równanie (2.1) do postaci

$$(2.2) \quad I\ddot{\mathbf{q}} + \bar{C}\dot{\mathbf{q}} = 0,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Rozwiązania (2.2) poszukuje się w postaci

$$(2.3) \quad \mathbf{q} = \boldsymbol{\lambda} e^{j\omega_0 t},$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ jest kolumnowym wektorem nieznanymi amplitud przemieszczeń uogólnionych każdej z n mas. Po wstawieniu (2.3) do (2.2) otrzymuje się równanie

$$(2.4) \quad [\bar{C} - \omega_0^2 I]\boldsymbol{\lambda} = 0,$$

które ma rozwiązanie na $\boldsymbol{\lambda}$ nietrywialne, jeżeli

$$(2.5) \quad |\bar{C} - \omega_0^2 I| = 0.$$

Obliczone z równania charakterystycznego (2.5) wartości własne $\omega_{0\nu}^2$ ($\nu = 1, \dots, n$) macierzy \bar{C} wyznaczają n częstości drgań własnych $\omega_{0\nu}$ układu. Po wstawieniu $\omega_{0\nu}$ do (2.4) otrzyma się ν równań:

$$(2.6) \quad [\bar{C} - \omega_{0\nu}^2 I]\boldsymbol{\lambda}_\nu = 0,$$

Dla lepszej charakterystyki układów o i masach wyznacza się podatność dynamiczną dla każdej z mas:

$$A_i(\omega) = \frac{x_{i0}}{u_{i0}}(\omega) = |G_i(j\omega)|,$$

przy czym sygnał u_{i0} działa tylko na badaną masę. Znajomość transmitancji $G_i(j\omega)$ jest konieczna, jak to zostanie wykazane przy wyznaczaniu wartości parametrów układu na podstawie charakterystyk amplitudowo-fazowych. Znacznie więcej informacji można uzyskać po wyznaczeniu charakterystyk $|G_{ir}(j\omega)|$, otrzymanych w ten sposób, że sygnał wymuszający przykładany jest do i -tej masy, a pomiaru przemieszczeń dokonuje się dla każdej masy m_r ($r=1, 2, \dots, n$). Szkic i uwagi dotyczące tej metody podane są w Zestawieniu, pozycja 1.

Począwszy od lat pięćdziesiątych (wraz z rozwojem aparatury do pomiaru przesunięć fazowych między różnymi sygnałami) coraz częściej układy mechaniczne charakteryzuje się za pomocą wykresów zespolonej podatności $G_{ir}(j\omega)$, zapoczątkowanych wg [1] przez KENNEDY'EGO i PANCU. Szkic i uwagi dotyczące tej metody podane są w Zestawieniu, pozycja 2.

W nowszych pracach [3] wysuwa się też koncepcję wyznaczania macierzy transmitancji (Zestawienie, pozycja 10). Wyrazy tej macierzy są definiowane jako stosunek transformat Laplace'a sygnału wyjściowego i -tej masy do wejściowego, przykładanego do r -tej masy:

$$(1.2) \quad G_{ir}(j\omega) = \frac{L[x_i(t)]}{L[u_r(t)]}.$$

Odwrotność podatności nazywa się «modułem dynamicznym» lub «sztywnością dynamiczną» $E_d(\omega)$:

$$(1.3) \quad E_d(\omega) = \frac{1}{A(\omega)} = \frac{u_0}{x_0}.$$

Obok charakterystyk podatności coraz szersze zastosowanie znajdują charakterystyki impedancji mechanicznej I , definiowanej jako stosunek siły sinusoidalnie zmiennej, działającej w pewnym punkcie układu do prędkości tego punktu, mierzonej w kierunku działania siły (driving point impedance):

$$(1.4) \quad I(j\omega) = \frac{L[P(t)]}{L[\dot{x}(t)]} = \frac{P_0}{x_0 \omega} [\cos \varphi - j \sin \varphi].$$

Jest ona miarą oporu, jaki stawia układ w danym punkcie przy przemieszczaniu go z prędkością $\dot{x}(t)$ [10]. Zainteresowanie pojęciem impedancji wynika stąd, że umożliwia ona łatwe wyznaczenie impedancji układów złożonych I_z za pomocą impedancji układów prostych I_i . Przy połączeniu równoległym mamy

$$(1.5) \quad I_z = \sum_{i=1}^n I_i.$$

Zamiast badać układ n równań z niewiadomymi, wynikających z (2.1), można badać n równań z jedną niewiadomą:

$$(2.13) \quad \begin{bmatrix} m_v \\ \end{bmatrix} \ddot{s} + \begin{bmatrix} k_v \\ \end{bmatrix} s = 0.$$

Można wykazać, że

$$(2.14) \quad \omega_{0v}^2 = \frac{k_v}{m_v} = \frac{\sum_{i,r} c_{ir} \mu_{rv} \mu_{iv}}{\sum_{i,r} a_{ir} \mu_{rv} \mu_{iv}} = \frac{\sum_r c_{ir} \mu_{rv}}{\sum_r a_{ir} \mu_{rv}} = \frac{\sum_r c_{ir} \mu_{rv}}{\sum_r a_{ir}}.$$

Układ swobodny będzie drgać zgodnie z v -tą postacią drgań, jeżeli każdej z r mas nada się następujące warunki początkowe:

$$(2.15) \quad q_{rv}(0) = \mu_{rv} q_{1v}(0)$$

oraz

$$(2.16) \quad \ddot{q}_{rv}(0) = \mu_{rv} \ddot{q}_{1v}(0).$$

Do powyższego przeglądu warto dodać, że pojęcie głównych postaci drgań wprowadzone jest również, zresztą przy wielu ograniczeniach, do nieliniowych układów nietłumionych (por. np. [28, 33 i 34]).

W układach swobodnych (ale tłumionych) można wyodrębnić główne postacie drgań identyczne, jak dla układu nietłumionego tylko wtedy, gdy wyrazy tłumiące spełniają określone warunki. T. K. CAUGHEY [4] badał układ opisany równaniem

$$(2.17) \quad A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0.$$

Warunkiem zastąpienia układu równań (2.17) przez równania we współrzędnych głównych jest dokonanie takiej transformacji współrzędnych, która by doprowadziła do jednoczesnej diagonalizacji macierzy A , B i C . T. K. CAUGHEY stwierdza, że może tu być wykorzystana jedynie ta sama transformacja (2.9), którą stosuje się dla układu nietłumionego, opisanego równaniem (2.1). Doprowadza ona do równania

$$(2.18) \quad \begin{bmatrix} m_v \\ \end{bmatrix} \ddot{s} + M^T B M \dot{s} + \begin{bmatrix} k_v \\ \end{bmatrix} s = 0.$$

Jeżeli macierz $M^T B M$ jest diagonalna, to równanie (2.17) może być zastąpione przez równanie

$$(2.19) \quad \begin{bmatrix} m_v \\ \end{bmatrix} \ddot{s} + \begin{bmatrix} h_v \\ \end{bmatrix} \dot{s} + \begin{bmatrix} k_v \\ \end{bmatrix} s = 0.$$

Postacie drgań własnych, określone przez wektory własne λ_v lub współczynniki rozkładu μ_v , będą takie same jak dla równania (2.1). Zmieniają się natomiast częstości drgań własnych; będzie mianowicie

$$\bar{\omega}_{0v} = \omega_{0v} \sqrt{1 - \gamma_v^2},$$

gdzie

$$\gamma_v = \frac{\delta_v}{\omega_{0v}} = \frac{h_v}{2m_v \omega_{0v}}.$$

T. K. CAUGHEY rozpatruje dalej równanie analogiczne do (2.2):

$$(2.20) \quad I\ddot{\mathbf{q}} + \bar{B}\dot{\mathbf{q}} + \bar{C}\mathbf{q} = 0$$

i stwierdza, że warunkiem wystarczającym, chociaż nie koniecznym, zastąpienia układu równań (2.20) przez równania we współrzędnych głównych jest możliwość wyrażenia macierzy \bar{B} jako liniowej kombinacji macierzy \bar{C} w pewnej potęgze:

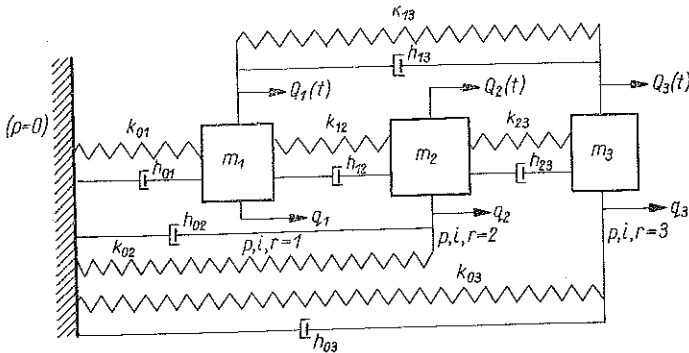
$$(2.21) \quad \bar{B} = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{d-1} \kappa_{ld} \bar{C}^{l/d}$$

W najprostszym przypadku byłoby

$$(2.22) \quad \bar{B}^d = \kappa \bar{C}^t,$$

gdzie κ_{ld} i κ są współczynnikami proporcjonalności.

Z formalnego punktu widzenia warunki (2.21) lub (2.22) mają bardzo dużą wartość. Warunków tych nie można jednak wykorzystać w badaniach identyfikacyjnych, opartych na pomiarach rzeczywistych obiektów. Mechanizm rozpraszania energii jest bardzo złożony i jeżeli nawet uda się wyizolować i badać główne postacie drgań, to nigdy nie wystąpi sytuacja, żeby tłumienie dla każdej postaci drgań było stałe, co świadczyłoby, jak to zostanie pokazane, o tłumieniu czysto «histerezowym» lub proporcjonalne do częstości wymuszeń, co świadczyłoby o tłumieniu czysto wiskozycznym itd. Nie ma więc możliwości wiernego odtworzenia charakterystyk elemen-



Rys. 3

tów tłumiących i badania muszą być ograniczone do wykrycia dominującego czynnika tłumiącego. W tej sytuacji wystarczające jest wykrycie przybliżonych liniowych związków między macierzami opisującymi własności układu masowe, tłumiące i sprężyste.

Zbadajmy właściwości układów mechanicznych, dających się opisać za pomocą równań ruchu we współrzędnych głównych.

Jeżeli układ opisany jest równaniem:

$$(2.23) \quad \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad -$$

to można otrzymać główne postacie drgań swobodnych, jeżeli spełniony jest jeden z podstawowych dwóch warunków.

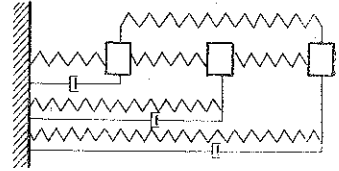
1. Współczynniki tłumienia są proporcjonalne do współczynników sprężystości:

$$(2.24) \quad B = \kappa_1 C,$$

gdzie κ_1 jest stałą rzeczywistą liczbą. Strukturę geometryczną takiego układu pokazano na rys. 3

2. Współczynniki tłumienia są proporcjonalne do mas:

$$(2.25) \quad B = \kappa_2 A.$$



Rys. 4

Strukturę geometryczną takiego układu pokazano na rys. 4. W pierwszym przypadku, tj. dla (2.24), równanie (2.23) po wprowadzeniu współrzędnych głównych przyjmie postać:

$$(2.26) \quad \left[\begin{array}{c} m_v \\ \backslash \end{array} \right] \ddot{s}_v + \kappa_1 \left[\begin{array}{c} k_v \\ \backslash \end{array} \right] \dot{s}_v + \left[\begin{array}{c} k_v \\ \backslash \end{array} \right] s_v = 0, \quad v = 1, \dots, n,$$

a więc współczynnik tłumienia dla v -tej postaci drgań będzie miał wartość

$$(2.27) \quad \delta_v = \frac{1}{2} \frac{\kappa_1 k_v}{m_v} = \frac{1}{2} \kappa_1 \omega_{0v}^2$$

lub

$$\delta_v = \frac{1}{2} \frac{\kappa_1 \sum_r c_{ir} \mu_{rv}}{\sum_r a_{ir} \mu_{rv}} = \frac{1}{2} \frac{\kappa_1 \sum_r c_{1r} \mu_{rv}}{\sum_r a_{1r}}$$

oraz

$$\gamma_v = \frac{\delta_v}{\omega_{0v}} = \frac{1}{2} \kappa_1 \omega_{0v}.$$

W drugim przypadku, tj. dla (2.25), otrzyma się

$$\left[\begin{array}{c} m_v \\ \backslash \end{array} \right] \ddot{s}_v + \kappa_2 \left[\begin{array}{c} m_v \\ \backslash \end{array} \right] \dot{s}_v + \left[\begin{array}{c} k_v \\ \backslash \end{array} \right] s_v = 0, \quad v = 1, \dots, n;$$

stąd

$$\therefore (2.8) \quad \delta_v = \frac{1}{2} \kappa_2 = \text{const} \quad \text{oraz} \quad \gamma_v = \frac{1}{2} \frac{\kappa_2}{\omega_{0v}}.$$

Analogiczne wyniki można otrzymać, jeżeli rozpatrzy się układ z tłumieniem histerezowym, który można opisać za pomocą równania

$$(2.29) \quad \left[\begin{array}{c} \backslash \\ A \\ \backslash \end{array} \right] \ddot{\mathbf{q}} + \frac{B^*}{\omega} \dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0.$$

Jeżeli

$$(2.30) \quad B^* = \kappa_1^* C,$$

to

$$(2.31) \quad \delta_v = \frac{1}{2} \kappa_1^* \omega_{0v}, \quad \gamma_v = \frac{1}{2} \kappa_1^* = \text{const.}$$

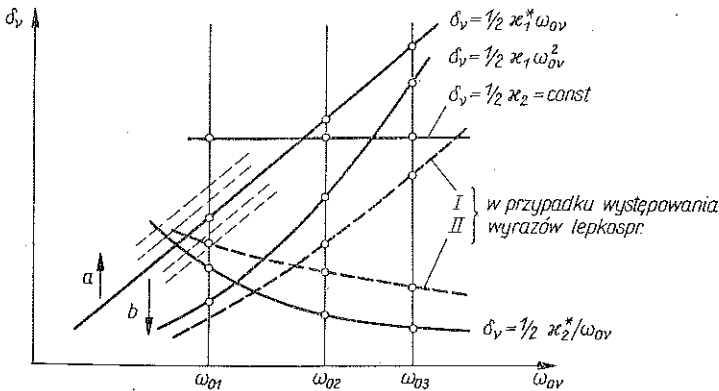
Jeżeli

$$(2.32) \quad B^* = \kappa_2^* A,$$

to

$$(2.33) \quad \delta_v = \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^*}{\omega_{0v}}, \quad \gamma_v = \frac{1}{2} \frac{\kappa_2^*}{\omega_{0v}^2}.$$

Jeżeli zatem podczas badań eksperymentalnych można wyodrębnić drgania główne (swobodne), to na podstawie pomiaru dekrementu tłumienia δ_v (ω_{0v}) można przyjąć, że macierz opisująca tłumienie spełnia jeden z czterech rozważanych warunków (rys. 5). Na rys. 5 naniesiono również linią przerywaną spodziewany wykres δ_v (ω_{0v}) dla dwóch rodzajów układów z wyrazami lepkosprężystymi.



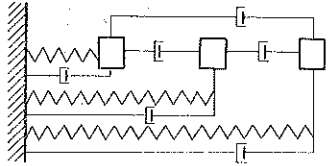
Rys. 5

Warto dodać, że spełnienie związku (2.24) lub (2.30) jest wystarczające, ale nie zawsze konieczne dla opisanego układu za pomocą nie związanych z sobą równań we współrzędnych głównych. W szczególności nie jest to konieczne dla układów symetrycznych, to jest takich, w których współczynniki rozkładu μ_{rv} przyjmują jedynie wartość ± 1 oraz 0. W układach takich mogą być usunięte te tłumiki, które nie naruszają symetrii układu [11].

Z przeprowadzonych dotychczas rozważań wynika, że w układzie mechanicznym swobodnym da się wyodrębnić główne postacie drgań przy każdym rodzaju tłumienia, jeżeli można wyrazić je w postaci równoważnego tłumienia wiskotycznego lub histerezowego o współczynnikach spełniających jeden z warunków (2.24), (2.25), (2.30) lub (2.32). W pracy autora [11] wykazano, że jest to niemożliwe

w przypadku tarcia suchego, tłumienia konstrukcyjnego, a także tłumienia materiałowego, jeżeli energia rozproszona nie jest wprost proporcjonalna do kwadratu względnego przemieszczenia mas.

W powyższych rozważaniach pod pojęciem głównej postaci drgań rozumiano taką postać, przy której wszystkie masy drgają w fazie lub przeciwfazie z częstością ω_{0v} lub $\bar{\omega}_{0v}$, ale stosunki chwilowych przemieszczeń mas są równe współczynnikom rozkładu μ_{rv} , wyznaczonym na podstawie badania układu swobodnego, pozbawionego wyrazów tłumiących. Takie określenie nie może być zastosowane do wszystkich rzeczywistych układów, a w szczególności do układów, w których sprzężenie drgań następuje wyłącznie wskutek występowania elementów tłumiących oraz układów zawierających wyrazy lepkospężyste. W takich przypadkach wygodnie jest stosować zmodyfikowane pojęcie głównej postaci jako postaci drgań swobodnych, przy której wszystkie masy drgają w fazie lub przeciwfazie z tą samą częstością drgań $\bar{\omega}_{0v}$. Wartości $\bar{\omega}_{0v}$ oraz współczynników rozkładu mogą zależeć od wszystkich wyrazów tworzących układ.



Rys. 6

Pierwszy przykład nie wymieniany w znanych autorowi publikacjach dotyczy układu, którego ruch można opisać za pomocą identycznego równania z (2.23):

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0,$$

ale w którym proporcjonalne są macierze A i C :

$$C = \kappa_3 A,$$

co umożliwi opisanie ruchu układu za pomocą nie związanych z sobą równań we współrzędnych głównych. Strukturę geometryczną takiego zdegenerowanego układu pokazano na rys. 6. Sprzężenie ruchu między masami realizowane byłoby tylko przez tłumiki i nie miałyby sensu twierdzenie o częstości drgań własnych lub głównej postaci drgań układu nietłumionego. Można wykazać, że w układzie tym da się wyodrębnić drgania główne w sensie zmodyfikowanym, a ich postać zależy od wartości współczynników tłumienia. Wynika to stąd, że mamy teraz następujące warunki ortogonalności [zamiast (2.8)]:

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \sum_i a_{ii} \mu_{iv} \mu_{ik} &= 0 \quad \text{dla } v \neq k, \\ \sum_i b_{ir} \mu_{iv} \mu_{ik} &= 0 \quad \text{dla } v \neq k. \end{aligned}$$

Po transformacji współrzędnych wg (2.9) za pomocą macierzy współczynników rozkładu, wyznaczonych wg (2.34), otrzyma się równanie

$$(2.35) \quad \begin{bmatrix} m_v \end{bmatrix} \ddot{s}_v + \begin{bmatrix} h_v \end{bmatrix} \dot{s}_v + \kappa_2 \begin{bmatrix} m_v \end{bmatrix} s_v = 0,$$

a więc

$$(2.36) \quad \omega_{0v}^2 = \kappa_2 = \text{const}, \quad \delta_v = \frac{1}{2} \frac{h_v}{m_v}.$$

Dużą grupę układów, w badaniach których może być wykorzystane zmodyfikowane pojęcie głównych postaci drgań, stanowią układy z wyrazami lepkosprężystymi typu pokazanego na rys. 7. Zapis równań ruchu w postaci macierzowej nie przynosi tu korzyści; zapis klasyczny ma postać

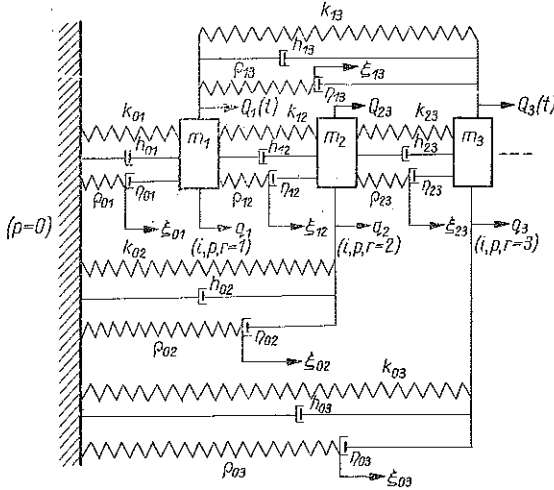
$$(2.37) \quad m_i \ddot{q}_i + \sum_{r=1}^n (b_{ir} \dot{q}_r + c_{ir} q_r) + \sum_{p=0}^{p<i} \eta_{pi} \dot{q}_i + \sum_{p>1}^n \rho_{ip} q_i - \sum_{p=0}^{p<1} \eta_{pi} \dot{\xi}_{pi} - \sum_{p>1}^n \rho_{ip} \xi_{ip} = Q_i, \quad i=1, \dots, n,$$

$$\rho_{pi} (\dot{\xi}_{pi} - q_p) + \eta_{pi} (\xi_{pi} - q_i) = 0,$$

$$i=1, \dots, n; \quad p=0, 1, \dots, n \quad \text{dla } p < i.$$

W równaniach tych ξ_{pi} oznacza przemieszczenie obudowy tłumika, znajdującego się między masą (lub układem odniesienia) p , a masą i . Oczywiście $q_p=0$ dla $p=0$.

Występowanie wyrazów lepkosprężystych podwyższa rząd równań różniczkowych, opisujących ruch układu. Dla układu o n stopniach swobody, w którym wyrazy



Rys. 7

lepkosprężyste wiążą wszystkie masy z sobą i układem odniesienia, rząd równania różniczkowego miałby wartość $N = 2n + (n+1)n/2$, a nie jak zwykle $2n$. Na przykład równanie charakterystyczne dla układu o trzech stopniach swobody byłoby 12-tego stopnia. Jeżeli rozwiązań układu (2.37) poszukiwać się będzie w postaci

$$q_i = \lambda_i e^{\omega t}, \quad \xi_{pi} = \lambda_{pi} e^{\omega t},$$

to spośród N pierwiastków równania charakterystycznego będzie $2k$ pierwiastków sprzężonych zespolonych typu $\omega_k^* = -\delta_k \pm j\bar{\omega}_{0k}$ ($k=1, \dots, n$) oraz $N-2n$ pierwiastków rzeczywistych, typu $\omega_s = -\delta_s$ ($s=2n+1, \dots, N$). Warto tu zwrócić uwagę, że zarówno δ_k jak i $\bar{\omega}_k$ będą miały wartości większe niż w przypadku pominięcia wyrażenia Maxwella.

Układ autonomiczny o n stopniach swobody można opisać za pomocą równań we współrzędnych głównych (w sensie zmodyfikowanym), jeżeli da się wyodrębnić kolejne $k=1, \dots, n$ postaci drgań, dające się dla każdej z mas opisać równaniem

$$(2.38) \quad q_{ik} = \mu_{ik} \left[\sum_{s=1}^N A_{1s} e^{-\delta_s t} + e^{-\delta_k t} (c'_{1k} \cos \bar{\omega}_{0k} t + c''_{1k} \sin \bar{\omega}_{0k} t) \right],$$

przy czym niektóre ze współczynników A_{1s} mogą być równe zero; A_{1s} , c'_{1k} i c''_{1k} odnoszą się do pierwszej masy, a μ_{ik} oznacza współczynnik rozkładu i ma być liczbą rzeczywistą.

Metoda poszukiwania warunków przejścia do opisu za pomocą współczynników głównych zostanie oparta na zastąpieniu wyrazów typu Maxwella przez równoważne modele Voigta o parametrach zależnych od częstości drgań własnych ω_{0v} [9]. Dla układu wg rys. 7 można więc wyznaczyć zastępcze współczynniki sprężystości $k_{piz}(\omega)$ i tłumienia $h_{piz}(\omega)$ i traktować układ tak, jak z tłumieniem wiskotycznym w układzie Voigta. I tak, zgodnie z rozważaniami poprzedniego rozdziału, można układ opisać za pomocą nie związanych z sobą równań we współrzędnych głównych, gdy $h_{piz}/k_{piz} = \text{const}$. Dla układu wg rys. 7 pociąga to za sobą konieczność spełnienia warunków

$$(2.39) \quad h_{pi} = \kappa_I k_{pi}, \quad \eta_{pi} = \kappa_{II} k_{pi}, \quad \rho_{pi} = \kappa_{III} k_{pi},$$

gdzie κ_I , κ_{II} i κ_{III} są współczynnikami proporcjonalności. Zastępcze współczynniki sprężystości i tłumienia będą miały postać:

$$(2.40) \quad h_{piz} = h_{pi} + \eta_{pi} \frac{\rho_{pi}^2}{\rho_{pi}^2 + \omega_{0v}^2 \eta_{pi}^2} = k_{pi} \left(\kappa_I + \kappa_{II} \frac{\kappa_{III}^2}{\kappa_{III}^2 + \omega_{0v}^2 \kappa_{II}^2} \right)$$

oraz

$$(2.41) \quad k_{piz} = k_{pi} + \rho_{pi} \frac{\omega_{0v}^2 \eta_{pi}^2}{\rho_{pi}^2 + \omega_{0v}^2 \eta_{pi}^2} = k_{pi} \left(1 + \kappa_{III} \frac{\omega_{0v}^2 \kappa_{II}^2}{\kappa_{III}^2 + \omega_{0v}^2 \kappa_{II}^2} \right).$$

Stosunek

$$(2.42) \quad \frac{h_{piz}}{k_{piz}} = \frac{\kappa_I (\kappa_{III}^2 + \omega_{0v}^2 \kappa_{II}^2) + \kappa_{II} \kappa_{III}^2}{\kappa_{III}^2 + \omega_{0v}^2 \kappa_{II}^2 + \kappa_{III} \omega_{0v}^2 \kappa_{II}^2}$$

jest dla danej częstości ω_{0v} stały dla wszystkich p, i . Należy zwrócić uwagę, że przy zachowaniu warunków (2.39) nie zmieniają się postacie drgań w stosunku do układu, w którym pominięto by wyrazy lepko-sprężyste typu Maxwella. Współczynniki rozkładu μ_{rk} mogą być wyznaczone na podstawie równań (2.8), ponieważ współczynniki w nawiasach (2.40) lub (2.41) mogą być wyniesione przez znak sumowania w równaniach (2.8). Zmieniają się natomiast dwa podstawowe parametry: wraz ze wzrostem częstości rosną współczynniki sprężystości od $k_{piz} = k_{pi}$ dla $\omega_{0v} = 0$ do

$k_{pi2} = k_{pi}(1 + \kappa_{III})$ dla $\omega_{0v} \rightarrow \infty$ oraz maleją współczynniki lepkości od $h_{pi2} = k_{pi}(\kappa_I + \kappa_{II})$ do $h_{pi2} = k_{pi} \kappa_I$. Wskutek tego częstotliwości drgań własnych ω_{0v} będą coraz większe (w stosunku do układu bez członów Maxwella), a wartość współczynnika δ_v wg (2.27) będzie coraz mniejsza dla coraz wyższych postaci drgań. Uwzględniając, że współczynniki c_{ir} są zależne od k_{pi} :

$$c_{ii} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^n k_{pi},$$

pozostałe $c_{ir} = k_{pi}$ dla $r \neq i$, $p = r$, będzie przy wykorzystaniu (2.12)

$$(2.43) \quad 2\delta_v = \left(\kappa_I + \kappa_{II} \frac{\kappa_{III}}{\kappa_{III}^2 + \omega_{0v}^2 \kappa_{II}^2} \right) \frac{\sum_{i,r} c_{ir2} \mu_{rv} \mu_{iv}}{\sum_{i,r} a_{ir} \mu_{rv} \mu_{iv}} = \left(\kappa_I + \kappa_{II} \frac{\kappa_{III}}{\kappa_{III}^2 + \omega_{0v}^2 \kappa_{II}^2} \right) \omega_{0v}^2.$$

Spodziewany wykres funkcji $\delta_v(\omega_{0v})$ przedstawiono linią przerywaną I na rys. 5.

Przy warunku (2.25), który teraz przyjąłby postać

$$(2.44) \quad b_{ir2} = \kappa_2 a_{ir},$$

układ musiałby ulec przekształceniu do pokazanego na rys. 8, a jego parametry musiałby spełniać warunki:

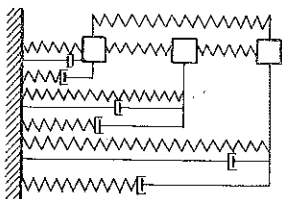
$$(2.45) \quad h_{oi} = \kappa' m_i, \quad \eta_{oi}'' = \kappa'' m_i, \quad \rho_{oi} = \kappa''' m_i.$$

Zastępcze współczynniki sprężystości i tłumienia będą miały wartości:

$$(2.46) \quad h_{oiz} = h_{oi} + \eta_{oi} \frac{\rho_{oi}^2}{\rho_{oi}^2 + \omega_{0v}^2 \eta_{oi}^2} = m_i \left(\kappa' + \kappa'' \frac{\kappa'''^2}{\kappa'''^2 + \omega_{0v}^2 \kappa'''^2} \right),$$

$$(2.47) \quad k_{oiz} = k_{oi} + \rho_{oi} \frac{\omega_{0v}^2 \eta_{oi}^2}{\rho_{oi}^2 + \omega_{0v}^2 \eta_{oi}^2} = k_{oi} + m_i \kappa''' \frac{\omega_{0v}^2 \kappa'''^2}{\kappa'''^2 + \omega_{0v}^2 \kappa'''^2}.$$

Pozostałe wartości współczynników będą bez zmian: $h_{pi2} = h_{pi}$ dla $p \neq 0$. Stosunek



Rys. 8

$$(2.48) \quad \frac{h_{oiz}}{m_i} = \kappa' + \kappa'' \frac{\kappa'''^2}{\kappa'''^2 + \omega_{0v}^2 \kappa'''^2}$$

jest dla danej częstotliwości ω_{0v} stały dla wszystkich i . Należy jednak zwrócić uwagę, że przy zachowaniu warunków (2.44) postacie drgań będą inne niż w przypadku układu z pominięciem wyrazów Maxwella. Warunek ortogonalności (2.8) dla mas zostanie bez zmian, natomiast zmieni się warunek (2.8) dla sił sprężystych, ponieważ wyrazy k_{oi} , wchodzące w skład

c_{ii} , zależne będą od częstotliwości zgodnie z (2.47), a pozostałe wartości c_{ir} dla $i \neq r$ nie będą ulegać zmianie. Warunek (2.8) dla sił sprężystych można napisać w postaci

$$(2.49) \quad \sum_{i=1}^n \left\{ k_{oi} + m_i \kappa''' \frac{\omega_{0v}^2 \kappa'''^2}{\kappa'''^2 + \omega_{0v}^2 \kappa'''^2} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n k_{pi} \right\} \mu_{iv} \mu_{ik} + \sum_{\substack{i,r \\ i \neq r}}^n k_{ir} \mu_{rv} \mu_{ik} = 0, \quad v \neq k.$$

W odróżnieniu więc od przypadku poprzedniego wyraz

$$m_i \frac{\kappa''' \omega_{0v}^2 \kappa''^2}{\kappa''^2 + \omega_{0v}^2 \kappa''^2}$$

musi pozostać w układzie równań (2.49), a tym samym współczynniki rozkładu zależą od częstości ω_{0v} .

Współczynnik tłumienia

$$(2.50) \quad 2\delta_v = \frac{\sum_i h_{0iz} \mu_{iv}^2}{\sum_i a_{ii} \mu_{iv}^2} = \kappa' + \kappa'' \frac{\kappa''^2}{\kappa''^2 + \omega_{0v}^2 \kappa''^2}$$

maleje wraz z częstością wymuszeń. Spodziewany wykres przedstawiono linią przerywaną II na rys. 5.

Należy dodać, że koncepcja wyznaczania zastępczych współczynników sprężystości i tłumienia ma jedynie wykazać możliwości opisanie ruchu układu we współrzędnych głównych, ale nie może być np. wykorzystywana do badania procesów przejściowych.

2.2. Układy nieautonomiczne

Układ bez tłumienia można pobudzić do drgań wg żądanej postaci drgań głównych przy dowolnej częstości wymuszeń, jeżeli zostaną nadane takie warunki początkowe, żeby drgania własne nie ingerowały w procesie drganiowym, oraz jeżeli na każdą z mas działać będzie siła:

$$(2.51) \quad Q_r = Q_1 \mu_{rv} \frac{m_r}{m_1} \sin \omega t.$$

Stąd wniosek, że siły muszą być przyłożone do wszystkich mas ($Q_r = 0$ tylko wtedy, gdy $\mu_{rv} = 0$) oraz muszą mieć zgodną lub przeciwną fazę (wyznacza to znak współczynnika μ_{rv}).

Można również wykazać, że dowolną postać drgań głównych otrzyma się za pomocą jednej siły lub kilku sił o dowolnej amplitudzie i stałej fazie, ale tylko wtedy, gdy częstość wymuszeń jest równa odpowiedniej częstości drgań własnych ω_{0v} . Podobny efekt otrzymuje się, gdy tłumienie jest bardzo małe: składowa s_v wchodząca w skład (2.9) będzie wielokrotnie przewyższać inne składowe i dlatego układ drgań będzie w przybliżeniu wg v -tej postaci. Na tej zasadzie opiera się wyszukiwanie częstości drgań własnych układu ω_{0v} (przynajmniej dla niższych postaci).

Układ tłumiony również można pobudzić do drgań wg żądanej postaci drgań głównych przy dowolnej częstości wymuszeń, ale tylko wtedy, gdy układ ten spełnia warunki, umożliwiające opisanie go za pomocą niezależnych równań we współrzędnych głównych.

Rozpatrzmy ruch układu, o którym zakłada się, że każda z mas drga zgodnie z v -tą postacią drgań:

$$(2.52) \quad \left[\begin{array}{c} N \\ A \end{array} \right] \ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{Q} \sin \omega t,$$

gdzie Q jest macierzą kolumnową i przedstawia amplitudy sił, działających na poszczególne masy. Jeżeli spełniony jest jeden z warunków przekształcenia, np. $B = \kappa_1 C$, to (oznaczając elementy macierzy A przez m_i , $i = 1, \dots, n$) równanie ruchu masy pierwszej można napisać w postaci

$$(2.53) \quad m_1 \ddot{q}_1 + \dot{q}_1 \kappa_1 \sum_r c_{1r} \mu_{rv} + q_1 \sum_r c_{1r} \mu_{rv} = Q_1 \sin \omega t,$$

a mas pozostałych w postaci

$$(2.54) \quad m_i \ddot{q}_i + \frac{\kappa_1}{\mu_{iv}} \dot{q}_i \sum_r c_{ir} \mu_{rv} + \frac{q_i}{\mu_{iv}} \sum_r c_{ir} \mu_{rv} = Q_i \sin \omega t, \quad i = 2, \dots, n.$$

Przyjmijmy, że poszczególnym masom zostały nadane takie warunki początkowe, że drgania własne nie ingerują w procesie drganiowym lub że drgania własne wygasły pod wpływem tłumienia. Wtedy ruch masy pierwszej opisze równanie (przy wykorzystaniu (2.14) i (2.27))

$$(2.55) \quad q_1 = \frac{Q_1}{m_1} \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0v}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_v^2 \omega^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{2\delta_v \omega}{\omega_{0v}^2 - \omega^2} \right),$$

a ruch masy i -tej

$$(2.56) \quad q_i = \frac{Q_i}{m_i} \frac{1}{\sqrt{(\omega_{0v}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_v^2 \omega^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{2\delta_v \omega}{\omega_{0v}^2 - \omega^2} \right).$$

Ma być zachowany stosunek $q_i/q_1 = \mu_{iv}$; skąd

$$(2.57) \quad Q_i = Q_1 \mu_{iv} \frac{m_i}{m_1}.$$

Jest to taki sam związek jak (2.51).

W podobny sposób można wykazać możliwość pobudzania do drgań wg żądanej postaci drgań głównych każdego układu, spełniającego warunki przekształcenia typu (2.21), omówione w p. 2. Warto tylko zwrócić uwagę, że w przypadku układu z wyrazami lepko-sprężystymi wraz ze zmianą częstości wymuszeń zmieniać się będą współczynniki sztywności, w związku z czym przy wyznaczaniu charakterystyk amplitudowo-częstościowych zgodnie z (2.55) i (2.56) uzyskano by krzywe analogiczne do pokazanych na rys. 21 w pracy [9].

R. E. D. BISHOP i G. M. L. GLADWELL [1] wykazali, że dowolną postać drgań głównych można otrzymać również dla układów tłumionych, nie spełniających warunków przekształcenia typu (2.21), ale tylko przy częstości wymuszeń odpowiadającej częstości drgań własnych ω_{0v} . Jest to zagadnienie rzutujące na dalszy tok rozważań i dlatego tu zostanie pokrótce powtórzone.

Autorzy badają układ z tłumieniem histerezowym i wiskotycznym (dochodzą oczywiście, do analogicznych rezultatów). Prześledzimy dla przykładu tok rozumowania przy badaniu układu opisanego równaniem macierzowym

$$(2.58) \quad A\ddot{q} + \frac{D}{\omega} \dot{q} + Cq = Q \sin \omega t.$$

Zbadajmy warunki, jakie trzeba nałożyć na kolumnową macierz \mathbf{Q} , żeby wszystkie przemieszczenia q_r ($r = 1, \dots, n$) były w tej samej fazie, tzn. macierz przemieszczeń miała postać

$$(2.59) \quad \mathbf{q} = \boldsymbol{\lambda} \sin(\omega t - \theta).$$

Wstawiając (2.59) do (2.58) otrzyma się równanie macierzowe

$$(2.60) \quad \cos \theta (C - \omega^2 A) \boldsymbol{\lambda} + \sin \theta D \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}$$

oraz

$$(2.61) \quad -\sin \theta (C - \omega^2 A) \boldsymbol{\lambda} + \cos \theta D \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Jeżeli założymy, że $\cos \theta \neq 0$, to (2.61) może być napisane w postaci

$$(2.62) \quad [\operatorname{tg} \theta (C - \omega^2 A) - D] \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym spełniania równania (2.62) jest, aby

$$(2.63) \quad |\operatorname{tg} \theta (C - \omega^2 A) - D| = 0.$$

Jest to równanie algebraiczne stopnia n względem $\operatorname{tg} \theta$. Dla każdego $\operatorname{tg} \theta_j$ istnieje wektor własny $\boldsymbol{\lambda}_j$ spełniający równanie

$$(2.64) \quad [\operatorname{tg} \theta_j (C - \omega^2 A) - D] \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{0}.$$

Znalezienie wartości θ_j i $\boldsymbol{\lambda}_j$ można podstawić do równania (2.60) i w ten sposób wyznaczyć kolumnowe macierze sił \mathbf{Q}_j :

$$(2.65) \quad \cos \theta_j (C - \omega^2 A) \boldsymbol{\lambda}_j + \sin \theta_j D \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{Q}_j.$$

Widać z tego, że dobierając odpowiednio siły dla dowolnego ω można uzyskać stan, w którym wszystkie masy będą drgały w zgodnej lub przeciwnej fazie. Jednak otrzymane w ten sposób postacie określone przez wektory własne $\boldsymbol{\lambda}_j$ nie będą głównymi postaciami drgań (będą zależę od ω). Tak będzie dopiero wtedy, gdy $\omega = \omega_{0v}$. Zauważmy mianowicie, że jeżeli $\cos \theta = 0$, $\theta = \pi/2$, to równanie (2.61) przyjmuje postać

$$(2.66) \quad (C - \omega^2 A) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Żeby równanie na $\boldsymbol{\lambda}$ miało nietrywialne rozwiązanie, musi być spełniony warunek

$$(2.67) \quad |C - \omega^2 A| = 0,$$

a więc częstość wymuszeń musi odpowiadać jednej z częstości drgań własnych ω_{0v} (układu nietłumionego). Zatem dla $\omega = \omega_{0v}$

$$(2.68) \quad \theta = \pi/2, \quad \boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\lambda}_v, \quad \mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_v.$$

R. E. D. BISHOP i G. M. L. GLADWELL nie są pewni, czy ich rezultat (2.68) może dotyczyć układów o dowolnym rodzaju tłumienia, ale wydaje się na tle powyższych rozważań, że może on być rozciągnięty na te rodzaje tłumienia, którego działanie może być opisane za pomocą równoważnego tłumienia wiskotycznego lub histere-

zowego. Ponieważ nie zachodzi przy tym konieczność zachowania jakichkolwiek związków między współczynnikami tłumienia a sprężystości, więc wynik (2.68) może być rozciągnięty na wszystkie rodzaje tłumienia, omawiane w niniejszej pracy.

Dla wyznaczenia wartości sił Q_v , koniecznych dla uzyskania v -tej postaci drgań, najwygodniej wykorzystać tok rozumowania, przedstawiony za pomocą równań (2.53)–(2.54). Zakładamy, że ruch każdej masy układu, opisanego za pomocą (2.52),

$$\left[A \right] \ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{Q} \sin \omega_{0v} t,$$

odbywa się zgodnie z v -tą postacią. Wtedy równanie ruchu dla pierwszej masy można napisać w postaci

$$(2.69) \quad m_1 \ddot{q}_{1v} + \dot{q}_{1v} \sum_r b_{1r} \mu_{rv} + q_{1v} \sum_r c_{1r} \mu_{rv} = Q_{1v} \sin \omega_{0v} t,$$

a następnych w postaci

$$(2.70) \quad m_i \ddot{q}_i + \frac{1}{\mu_{iv}} \dot{q}_{iv} \sum_r b_{ir} \mu_{rv} + \frac{q_i}{\mu_{iv}} c_{ir} \mu_{rv} = Q_i \sin \omega_{0v} t, \quad i=2, \dots, n.$$

W odróżnieniu od (2.55)–(2.56) każdej z mas trzeba przypisać inny współczynnik tłumienia:

$$(2.71) \quad 2\delta_{iv} = \frac{\sum_r b_{1r} \mu_{rv}}{m_1}, \quad 2\delta_{iv} = \frac{\sum_r b_{ir} \mu_{rv}}{m_i \mu_{iv}}.$$

Wartości amplitud q_i i q_i [patrz dla porównania (2.55) i (2.56)] będą następujące:

$$(2.72) \quad q_{1v} = \frac{Q_{1v}}{m_1 2\delta_{1v} \omega_{0v}}, \quad q_i = \frac{Q_{iv}}{m_i 2\delta_{iv} \omega_{0v}}.$$

Ma być zachowany stosunek $q_{iv}/q_{1v} = \mu_{iv}$, więc

$$(2.73) \quad Q_{iv} = Q_{1v} \frac{\sum_i b_{ir} \mu_{rv}}{\sum_r b_{1r} \mu_{rv}} = Q_{1v} \mu_{iv} \frac{m_1 \delta_{iv}}{m_i \delta_{1v}}.$$

3. IDENTYFIKACJA UKŁADÓW MECHANICZNYCH NA PODSTAWIE EKSPERYMENTALNIE WYZNACZONYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW ROZKŁADU

Jak można wynioskować z analizy przeprowadzonej w poprzednim punkcie zestaw aparatury, konieczny do realizacji eksperymentalnej części zadania, powinien składać się z kilku wzbudników, umożliwiających wymuszenie drgań z regulowaną amplitudą siły, częstością i fazą oraz zestawu pomiarowo-rejestrującego do pomiaru parametrów drganiowych: przemieszczeń (prędkości, przyspieszeń) mas oraz przesunięć fazowych. Spośród specjalistycznej aparatury tego typu na wymienienie

zastępuje bardzo bogaty zestaw produkcji francuskiej PRODERA, opisany w pracach [25, 36 i 42]. Zestaw ten np. w zastosowaniu do badań kadłubów samolotów Concorde obejmował kilkadziesiąt wzbudników elektro-magnetycznych, kilkaset elektro-dynamicznych czujników prędkości, rozbudowany układ zasilający, analizujący i pomiarowy oraz rejestrator $X-Y$, za pomocą którego budowano wykresy admitancji dla każdej postaci drgań głównych.

Cechą szczególnie interesującą aparatury PRODERA jest możliwość częściowego niwelowania sił tłumienia przez przykładanie do mas dodatkowych sił, będących w fazie z prędkościami tych mas i do tych prędkości proporcjonalnych. Dla dokładnego zsynchronizowania fazy i amplitudy tych sił przewidziana jest możliwość sprzężenia zwrotnego między czujnikami prędkości a wzbudnikami, jak to pokazano schematycznie na rys. 9. Dzięki temu możliwe jest wyodrębnienie głównych postaci drgań przy dowolnej częstotliwości wymuszeń również w tych przypadkach, gdy współczynniki tłumienia nie spełniają warunków transformacji typu (2.24) lub (2.25).

Przyjmijmy, że aby w układzie można było wyodrębnić główne postacie drgań w macierzy wg (2.18) $M^T B M s$ lub w innym zapisie

$$(3.1) \quad \sum_{i,r,k} b_{ir} \mu_{iv} \mu_{rk} \dot{s}_k, \quad v=1, \dots, n$$

muszą zniknąć wszystkie wyrazy dla $k \neq v$. Jeżeli parametry układu nie spełniają warunków typu (2.24) lub (2.25), to realizacja tego zadania przez przykładanie do mas dodatkowych sił w fazie z prędkością jest możliwa, ale stanowi zadanie trudne. Widać to chociażby z przykładu dla układu o dwóch stopniach swobody. Suma (3.1) w postaci rozwiniętej jest następująca:

dla $v=1$

$$[b_{11} + 2b_{12} \mu_{21} + b_{22} \mu_{21}^2] \dot{s}_1 + [b_{11} + b_{12} (\mu_{21} + \mu_{22}) + b_{22} \mu_{21} \mu_{22}] \dot{s}_2,$$

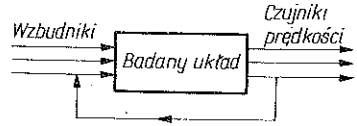
dla $v=2$

$$[b_{11} + b_{12} (\mu_{21} + \mu_{22}) + b_{22} \mu_{22} \mu_{21}] \dot{s}_1 + [b_{11} + 2b_{12} \mu_{22} + b_{22} \mu_{22}^2] \dot{s}_2,$$

gdzie \dot{s}_1 i \dot{s}_2 są kombinacjami liniowymi prędkości \dot{q}_1 i \dot{q}_2 . Zadanie polega na likwidacji sił proporcjonalnych do \dot{s}_2 , gdy $v=1$ i proporcjonalnych do \dot{s}_1 , gdy $v=2$.

Inną cechą szczególną aparatury PRODERA jest możliwość stosowania tzw. badań globalnych, polegających (ujmując skrótowo) na tym, że stosuje się możliwie dużą liczbę czujników pomiarowych, a jako reprezentatywny sygnał bierze się pod uwagę sumę wektorową sygnałów wszystkich czujników [36 i 42].

Przedstawiona poniżej procedura własna jest odmienna od procedury typu PRODERA i, jak się wydaje, znacznie prostsza. Opiera się ona na podstawowym spostrzeżeniu, że ruch mas drgających zgodnie z jedną z postaci drgań głównych da się opisać za pomocą równania (2.70). Dla wyznaczenia wszystkich parametrów układu wystarczające jest uzyskanie głównych postaci drgań przy częstościach równych częstościom drgań własnych ω_{0v} .



Rys. 9

Proces identyfikacji można podzielić na dwa etapy. Pierwszy z nich polega na wykryciu podstawowych cech układu i zbudowaniu modelu obliczeniowego, drugi na wyznaczeniu wartości współczynników, występujących w tym modelu. Za podstawowe cechy układu należy uważać: liniowość lub nieliniowość, spełnienie warunków wyodrębniania głównych postaci drgań, występowanie wyrazów lepko-sprężystych, dominujący rodzaj tłumienia a także liczbę mas.

Uważa się na ogół, że nieliniowość najłatwiej jest wykryć przez pobudzenie układu dla drgań za pomocą sił o różnych amplitudach. Jeżeli wartości przemieszczeń mas nie są wprost proporcjonalne do amplitudy sił, to się uważa, że układ ma wyrazy o charakterystykach nieliniowych. Warto jednak zwrócić uwagę, że jeżeli w układzie występuje tarcie suche lub konstrukcyjne, to odpowiadające mu równoważne współczynniki tarcia wiskotycznego będą wraz ze wzrostem amplitudy odpowiednio maleć lub rosnąć (rys. 5), a tym samym amplitudy zmieniać nieproporcjonalnie. Dlatego badanie przy kilku amplitudach sił jest niezbędne dla wykrycia tego typu tłumienia, natomiast pewniejszym dowodem istnienia nieliniowości jest wykrycie w ustalonej odpowiedzi układu składowych o takich częstościach, jakich nie ma w sile wymuszającej. Wystarczy w tym celu dokonać analizy harmonicznej sygnału na wejściu i wyjściu z układu. Jeżeli stwierdzona nieliniowość jest słaba, to na ogół może być ona pominięta. W czasie badań eksperymentalnych należy utrzymać przemieszczenie mas w możliwie małych granicach. Otrzymane w toku badań wyniki będą miarodajne dla układu w pobliżu położenia równowagi.

Spełnianie przez układ warunków transformacji do współrzędnych głównych można wykryć stosunkowo łatwo. Po uzyskaniu jednej z głównych postaci drgań, czego dowodem będzie przemieszczanie się wszystkich mas w fazie lub przeciwfazie oraz zgodność faz sił wymuszających Q_{rv} z prędkościami q_{rv} , zmienia się częstość wymuszeń bez zmiany amplitud sił. Jeżeli masy przemieszczają się w dalszym ciągu w fazie zgodnej lub przeciwnej, to układ spełnia warunki transformacji; jeżeli natomiast następuje zmiana faz, to ich nie spełnia.

Stwierdzenie występowania wyrazów lepko-sprężystych jest dosyć złożone. W pracach znanych autorowi na temat identyfikacji zagadnienie to jest pomijane. Cechą szczególną układu z takimi wyrazami jest to, że wraz z każdą zmianą częstości zmienia się sztywność układu. Nieuwzględnienie tego faktu może prowadzić do istotnych błędów np. przy wyznaczaniu współczynników metodą mas dołączonych.

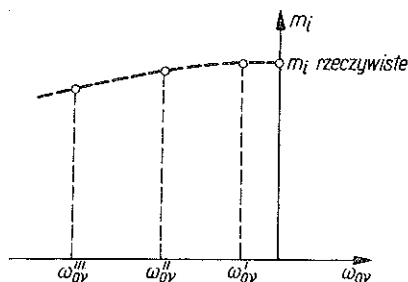
Wydaje się, że stosunkowo najłatwiej jest stwierdzić występowanie tych wyrazów przy okazji wyznaczania wartości mas układu, jednak nie metodą jednokrotnego, a wielokrotnego dołączania do jednej z mas dodatkowych i wywoływania za każdym razem dwóch postaci drgań.

Tok postępowania jest następujący. Na początku wyznacza się wszystkie główne postacie drgań. Po dołączeniu do masy m_1 masy dodatkowej m_{01} zmaleje częstość drgań własnych ω_{0v} . Jeżeli w układzie są wyrazy lepko-sprężyste, to zmaleje również sztywność zastępcza, a więc wpływ dołączenia m_{01} niejako się powiększy, a obliczone wartości mas będą mniejsze od rzeczywistych. Wykonując kilka razy podobne pomiary, po dołączeniu coraz to większych mas ($m_{01} < m_{02} \dots$), będzie można zbudować

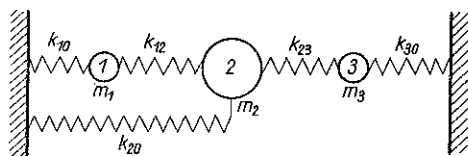
krzywe (rys. 10) i na ich podstawie wyznaczyć wartości m_i . Do wyznaczenia mas wykorzystuje się warunki ortogonalności

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^n a_{ii} \mu_{iv} \mu_{ik} = 0 \quad \text{dla} \quad v \neq k.$$

Począwszy od $n=3$ liczba równań jednorodnych jest równa lub większa od liczby niewiadomych a_{ii} , co wskazuje, że część równań jest liniowo zależna. Z równań tych można wyznaczyć stosunek mas. Po wymianie przynajmniej jednego równania



Rys. 10



Rys. 11

na równanie dodatkowe, w którym wystąpią współczynniki rozkładu dla dwóch postaci drgań v i k , zmierzonych po dołączeniu do jednej z mas np. a_{22} masy dodatkowej m_0 , układ równań stanie się niejednorodny, wystąpi po prawej stronie wyraz $-m'_0 \mu'_{2v} \mu'_{2k}$ i to umożliwi obliczenie wartości każdej z mas $m_i = a_{ii}$.

Przykład. Niech będzie układ wg rys. 11. Załóżmy, że zmierzono następujące współczynniki:

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= 1, & \mu_{31} &= 1, \\ \mu_{22} &= 0, & \mu_{32} &= -1, \\ \mu_{23} &= -1, & \mu_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Warunek $\sum_i a_{ii} \mu_{iv} \mu_{ik} = 0$ ($v \neq k$) prowadzi do następujących równań:

dla $v=1, k=2$ ($a_{ii} \equiv m_i$)

(a) $m_1 + m_2 \mu_{21} \mu_{22} + m_3 \mu_{31} \mu_{32} = 0$, czyli $m_1 + m_2 \cdot 0 - m_3 = 0$;

dla $v=1, k=3$

(b) $m_1 + m_2 \mu_{21} \mu_{23} + m_3 \mu_{31} \mu_{33} = 0$, czyli $m_1 - m_2 + m_3 = 0$;

dla $v=2, k=3$

(c) $m_1 + m_2 \mu_{22} \mu_{23} + m_3 \mu_{32} \mu_{33} = 0$, czyli $m_1 + m_2 \cdot 0 - m_3 = 0$.

Liniowo zależne są równania (a) i (c). Z układu tego widać, że $m_1 = m_3 = m$, natomiast $m_2 = 2m$. Po wymianie równania (a) na równanie dodatkowe

$$m_1 + m_2 \mu'_{21} \mu'_{22} + m_3 \mu'_{31} \mu'_{32} = -m'_0 \mu'_{21} \mu'_{22}$$

można obliczyć konkretne wartości mas (μ'_{iv}, μ'_{ik} oznaczają wartości współczynników rozkładu, wyznaczone po dołączeniu masy m_0 do masy m_2).

Po dołączeniu do masy m_2 dodatkowej masy $m'_0 > m'_0$, wykonaniu pomiarów μ''_{iv} , μ''_{ik} , obliczeń itd. można zbudować krzywe wg rys. 10 i ustalić wartości m_i , a także stwierdzić, czy w układzie są wyrazy lepko-sprężyste. Jeżeli punkty na krzywej nie leżą na prostej równoległej do osi odciętych, to układ zawiera takie wyrazy.

Wnioski co do typu wyrazów lepko-sprężystych można wyciągnąć na podstawie wykresów zmian sztywności i współczynnika tłumienia w zależności od częstości wymuszeń. Badanie zmian sztywności najwygodniej jest przeprowadzić drogą wywoływania drgań głównych o tej samej postaci, ale o różnych częstościach. Można tego dokonać przez powiększenie każdej z mas o jednakowy procent. Postać drgań się nie zmienia, bo wprowadzenie stałego mnożnika nie zmieni warunku ortogonalności

$$\sum_{i,r} a_{ii} \mu_{iv} \mu_{ik} = 0.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie na składniki równań (2.69) i (2.70), odpowiadające

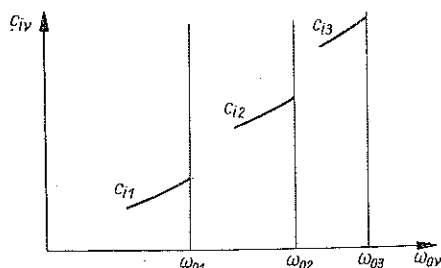
$$(3.3) \quad c_{1v} = \sum_r c_{ir} \mu_{rv}, \quad c_{iv} = \frac{\sum_r c_{ir} \mu_{rv}}{\mu_{iv}},$$

to zmieniając częstości drgań własnych (przy tej samej postaci) można ustalić kolejne wartości $c_{1v}(\omega_{0v}) = m_1 \omega_{0v}^2$, $c_{1v}(\omega'_{0v}) = (m_1 + m'_0) \omega_{0v}^2$ itd, jak to pokazano na rys. 12.

Podobnie na podstawie (2.72) można wyznaczyć wartości współczynników tłumienia:

$$(3.4) \quad 2\delta_{1v} = \frac{Q_{1v}}{q_{1v} m_1 \omega_{0v}}, \quad 2\delta_{iv} = \frac{Q_{iv}}{q_{iv} m_i \omega_{0v}}$$

i zbudować wykresy zmienności $\delta_{iv}(\omega_{0v})$. Jeżeli tłumienie występujące w pobliżu każdej z mas jest jednorodne, to można oczekiwać, że znalezione punkty ułożą się wzdłuż jednej z krzywych przedstawionych na rys. 5. W przypadku występowania



Rys. 12

wyrazów lepko-sprężystych, co potwierdzić muszą również wyniki otrzymane przy wyznaczaniu mas i badaniu sztywności, punkty mogą układać się wzdłuż krzywej I lub II. Przy znajomości δ_v dla trzech postaci drgań można na podstawie (2.43) lub (2.50) wyznaczyć wartości współczynników κ' , κ'' , κ''' lub κ_I , κ_{II} , κ_{III} , wchodzących w skład wyrażen na sztywności i lepkości zastępcze (2.40)–(2.41) lub (2.46)–(2.47) (dotyczy to oczywiście przypadku, gdy układ spełnia warunki transformacji do współrzędnych głównych). Wyznaczenie δ_{iv} dla kilku wartości amplitud sił Q_{iv} stanowić może podstawę (przy jednocześnie wykonywanej analizie harmoniczej) do wyciągnięcia wniosków

na temat tarcia suchego i konstrukcyjnego. Stanowi to zarazem koniec pierwszego etapu procesu identyfikacji.

Zebrane w pierwszym etapie dane dają podstawę do zbudowania modelu obliczeniowego, przy czym znane są już wartości mas. Sprawa się upraszcza, gdy znana jest struktura geometryczna układu, tzn. sposób powiązania mas, ale nie jest to konieczne: można założyć istnienie różnorodnych powiązań za pomocą łączników sprężystych i tłumiących, a następnie sprawdzić to założenie w toku obliczania wartości parametrów modelu.

Współczynniki sztywności dla układu wyrazów lepkospężystych c_{ir} można wyznaczyć na podstawie zależności wynikających z (2.70):

$$(3.5) \quad \sum_r c_{ir} \mu_{rv} = \mu_{iv} m_i \omega_{0v}^2.$$

Liczba równań jest wystarczająca nawet przy założeniu, że każda masa połączona jest z każdą, bo liczba nieznanych współczynników c_{ir} , występujących w każdym z równań (3.5), jest równa liczbie mas. Po wyznaczeniu c_{ir} łatwo jest już obliczyć wartości współczynników k_{ir} wg rys. 3, bo $c_{ir} = k_{ir}$ dla $i \neq r$, natomiast wartość c_{ii} równa się sumie współczynników sprężyn, stykających się z masą i ; np. $c_{11} = k_{10} + k_{12} + \dots + k_{1r}$.

Jeżeli układ zawiera wyrazy lepkospężyste, to jego współczynniki sprężystości muszą zależeć od częstości wymuszeń. Wydaje się, że najprostsza metoda polegałaby na wykorzystaniu wyników pomiarów zestawionych na rys. 12. Przez kolejne zmiany częstości drgań własnych w pobliżu ω_{0v} i utrzymaniu stałej postaci drgań można zbudować równanie podobne do (3.5). Liczba zmian częstości zależy od liczby powiązań masy i z masami sąsiednimi (może być więc niekiedy ograniczona do dwóch). Obliczone wartości c_{ir} będą stanowiły uśrednione wartości w pobliżu ω_{0v} . Postępując podobnie w pobliżu dalszych częstości ω_{0v} można zbudować krzywe $c_{ir}(\omega_{0v})$ i na tej podstawie, przy jednoczesnym wykorzystaniu krzywych dla współczynników tłumienia $b_{ir}(\omega_{0v})$ (o czym niżej), modelować wyraz lepkospężysty.

Technika wyznaczenia współczynników tłumienia b_{ir} jest podobna do wyznaczenia współczynników c_{ir} z tym jednak, że na podstawie wyników badań pierwszego etapu, a zwłaszcza wykresów $\delta_{iv}(\omega_{0v})$, należy ustalić, jaki typ tłumienia występuje w członach łączących się z masą i . Jeżeli wyraz ten nie ma charakteru lepkospężystego tylko wiskotycznego, to wartość b_{ir} można wyznaczyć z układu równań wynikających z (2.71) i (2.72):

$$(3.6) \quad \sum_r b_{ir} \mu_{rv} = \frac{Q_{iv} \mu_{iv}}{q_{iv} \omega_{0v}}.$$

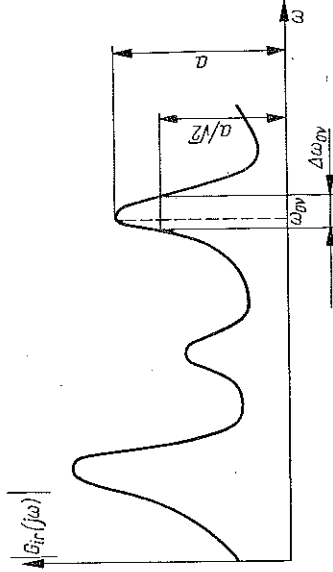
Jeżeli wyraz ten nie ma charakteru lepkospężystego ale histerezowy, to analogicznie współczynniki b_{ir} należałoby wyznaczyć z równania

$$(3.7) \quad \sum_r b_{ir}^* \mu_{rv} = \frac{Q_{iv} \mu_{iv}}{q_{iv}}.$$

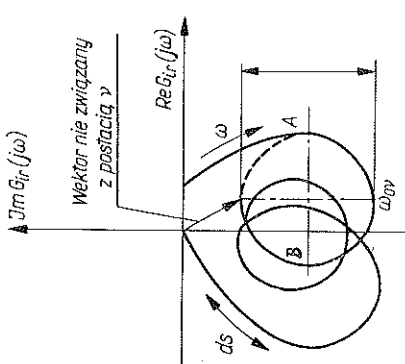
Wreszcie, jeżeli wyrazy tłumiące b_{ir} mają charakter lepkospężysty, to należałoby wykorzystać pomiary prowadzone przy wyznaczaniu lepkospężystych członów c_{ir} w pobliżu kolejnych ω_{0v} . Wykorzystane byłyby przy tym równania typu (3.6).

Zestawienie bardziej znanych metod identyfikacji

Lp. Nazwa, autor	Cel i zakres identyfikacji	Podstawowe etapy badań	Badania lub obliczenia uzupełniające
1	Metoda charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych. Wyznaczenie częstości drgań własnych ω_{0r} , oszacowanie współczynnika tłumienia δ_r .	Zbudowanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych $ G_r(j\omega) $. Sygnał wymuszający przyłożony do r -tej masy, rzędna dotycząca i -tej masy. Pobudzenie do drgań harmonicznego lub losowe.	Badania lub obliczenia uzupełniające
		<p>Przybliżona wartość δ_r:</p> $\delta_r \approx \frac{1}{2} \frac{h_r}{m_r} \Delta\omega_{0r}$ <p>(dla tłumienia wiskotycznego)</p> <p>Możliwość wyznaczenia przybliżonej wartości współczynnika rozkładu μ_{rr} (dla $\omega = \omega_{0r}$), gdy zbudowano wykresy $G_r(j\omega)$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$ (r ustalone).</p>	



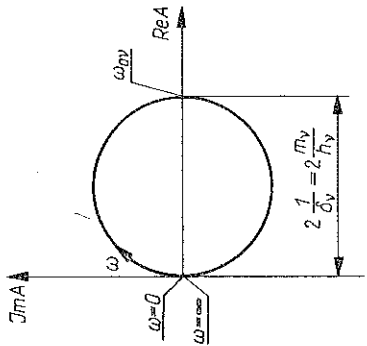
Rys. 1

2	<p>Metoda zespolonej podatności [1] (KENNEDY i PANCU, 1947).</p>	<p>Wyznaczenie częstości drgań własnych ω_{0v}, współczynnika rozkładu μ_{rv}, współczynnika tłumienia δ_v na podstawie wykresów podatności</p> $G_{tr} = \sum_{v=1}^n \frac{\mu_{rv} \mu_{rv} \sin \theta_v e^{-j\theta_v}}{h_v \omega}$ <p>dla tłumienia wiskotycznego (dla tłumienia historyczowego o współczynniku h^* wstawić $h_v \omega = h^*$).</p>	<p>Zbudowanie charakterystyk amplitudowo-fazowych $G_{tr}(j\omega)$. Pobudzenie do drgań harmonicznym lub losowe.</p>  <p style="text-align: center;">Rys. 2</p>	<p>1) ω_{0v} w punkcie, w którym $ds/d\omega^2$ ma lokalne maximum; 2) $\delta_v \approx \omega_B - \omega_A$ (dla tłumienia wiskotycznego); 3) okrąg uzupełniony w przybliżeniu wyznaczony przez</p> $\frac{\mu_{rv} \mu_{rv} \sin \theta_v e^{-j\theta_v}}{h_v \omega}$ <p>$\theta_v = \theta_v(\omega)$ zależy od tłumienia w postaci v i częstości ω; 4) współczynniki rozkładu μ_{rv} odpowiadają stosunkowi średnic — muszą być wyznaczone $G_{tr}(j\omega)$ dla wszystkich i (r ustalone).</p>
3	<p>Metoda głównych postaci drgań (LEWIS i WRISLEY, 1950 [1]).</p>	<p>Metoda podaje iteracyjną procedurę doboru sił wymuszających tak, aby były w fazie z prędkościami wszystkich mas (same prędkości też w fazie).</p>	<p>Gdy postać drgań zmienia się przy zmianie częstości (np. przy przechodzeniu od ω_{0v} do ω_{0k}), to oznacza to, że macierz tłumienia dla głównych postaci nie jest diagonalna.</p>	
4	<p>Metoda TRAILLA-NASHA i ASHERA (1958) [4].</p>	<p>Metoda podaje sposób obliczania sił potrzebnych do uzyskania głównych postaci drgań — niezależnie od rodzaju tłumienia.</p>		

Lp.	Nazwa, autor	Cel i zakres identyfikacji	Podstawowe etapy badań	Badania lub obliczenia uzupełniające
5	Metoda bezpośrednia jednoczesnego pomiaru wszystkich parametrów ruchu.	Wyznaczenie $3n(n+1)/2$ współczynników zawartych w równaniach ruchu $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q_i(t)$.	Wykonanie $3(n+1)/2$ cykli pomiarowych liniowo niezależnych (co najmniej przy dwóch częstotliwościach wymuszeń); w każdym cyklu pomiar w tej samej chwili: \ddot{q} , \dot{q} , q i Q .	Rozwiązanie $3n(n+1)/2$ równań algebraicznych z tą samą liczbą niewiadomych po wstawieniu wyników pomiaru do równań ruchu.
6	Metoda pomiaru parametrów ruchu i -tego równania.	Wyznaczenie $3n$ niewiadomych i -tego równania $\sum_{r=1}^n a_{ir} \ddot{q}_r + b_{ir} \dot{q}_r + c_{ir} q_r = Q_i(t)$, a następnie pozostałych współczynników układu.	Wykonanie $3n$ cykli pomiarowych liniowo niezależnych, podobnie jak w p. 5.	Rozwiązanie kolejno n układów równań, zawierających coraz mniej niewiadomych.
7	Metoda analizy regresyjnej oparta na wynikach pomiaru wszystkich parametrów ruchu (zasady [6 i 20]).	Jak w p. 5	Wykonanie $N > 3(n+1)/2$ cykli pomiarowych jak w p. 5 i zbudowanie sumy kwadratów odchyleni $S = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N [\sum_{r=1}^n a_{ir} \ddot{q}_{rk} + b_{ir} \dot{q}_{rk} + c_{ir} q_{rk} - Q_{ik}]^2$.	Rozwiązanie $3n(n+1)/2$ równań algebraicznych otrzymanych przez poszukiwanie min S , tzn. $\frac{\partial S}{\partial a_{ir}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_{ir}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c_{ir}} = 0.$

8	Metoda analizy re-gresyjnej dla i-tego równania.	Jak w p. 6.	<p>Wykonanie $N > 3n$ cykli pomiarowych i zbudowanie sumy kwadratów odchyłeń</p> $S_1 = \sum_{k=1}^N \left[\sum_{r=1}^n a_{kr} \ddot{q}_{rk} + b_{kr} \dot{q}_{rk} + c_{kr} q_{rk} - Q_{kr} \right]^2.$	Rozwiązanie n układów równań zawierających coraz mniej niewiadomych, uzyskanych przez poszukiwanie min. S jak w p. 7.
9	Metoda analizy re-gresyjnej oparta na transmittancjach $G_{ir}(j\omega_k)$ [13 i 45].	Jak w p. 5	<p>Zbudowanie $n \times n$ transmittancji (charakt. amplitud fazowych) $G_{ir}(j\omega)$. Obiera się $G_{ir}(j\omega_k)$ dla $\omega = \omega_k$ ($k=1, \dots, N$) i buduje sumę kwadratów odchyłeń</p> $S = \sum_k \left[\sum_{i,r}^n -a_{ir} \omega_k^2 G_{ir}(j\omega_k) + j b_{ir} \omega_k G_{ir}(j\omega_k) + c_{ir} G_{ir}(j\omega_k) - 1 \right]^2.$	Jak w p. 7.
10	Metoda macierzy podatności (BOSSAK, 1969, [3]).	<p>Wyznaczenie współczynników zawartych w równaniach ruchu</p> $A\ddot{q} + \left[B + \frac{1}{\omega} D \right] \dot{q} + Cq = Q(t).$	<p>Wyznaczenie macierzy podatności $G_{ir}(\omega)$ przez przykładowe jednostkowych sił kolejno do wszystkich mas i pomiar za każdym razem przesłuszczenia wszystkich mas.</p>	<p>Jeżeli $q = q_0 \exp j\omega t$, to $q_0 = G(\omega) Q$, gdzie $G(\omega)$ jest macierzą podatności:</p> $G(\omega) = [C - \omega^2 A + j(\omega B + D)]^{-1}.$ <p>Na podstawie dwóch macierzy (wyznaczonych dla dwóch częstotliwości) można obliczyć wartości elementów macierzy A, B, C i D.</p>

Lp.	Nazwa, autor	Cel i zakres identyfikacji	Podstawowe etapy badań	Badania lub obliczenia uzupełniające
11	Metoda ad- mitancji dla głównych postaci drgan (PRO- DERA) [25, 36 i 42].	Wyznaczenie głównych po- staci drgań s_v , paramie- trów ruchu każdej postaci: $m_v \ddot{s}_v + h_v \dot{s}_v + k_v s_v =$ $= P_v \sin \omega t$ a następnie współrzędnych układu.	Zbudowanie kół admittance dla każdej postaci drgań (niwelacja nie- diagonalnych elementów macierzy tłumienia za pomocą sił w fazie z prędkością). Pomiary metodą globalną.	Wyznaczenie k_v i m_v , jak dla układu o I stopniu swobody (p. 14-15). Obliczenie para- metrów układu przy wyko- rzystaniu warunków ortogo- nalności współczynnika roz- kładu: $\sum_{i,r} a_{ir} \mu_{iv} \mu_{rk} = 0 \quad (v \neq k),$ $\sum_{i,r} c_{ir} \mu_{iv} \mu_{rk} = 0 \quad (v \neq k)$ oraz równań $\sum_{i,r} a_{ir} \mu_{iv} \mu_{rv} = m_v,$ $\sum_{i,r} c_{ir} \mu_{iv} \mu_{rv} = k_v.$



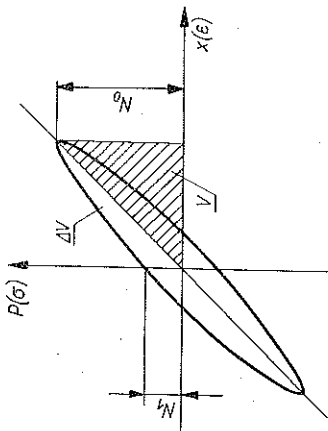
Rys. 3

Wyznaczenie współczynników
tłumienia na podstawie zna-
jomości dodatkowych sił niwe-
lujących składowe niediagno-
nalne.

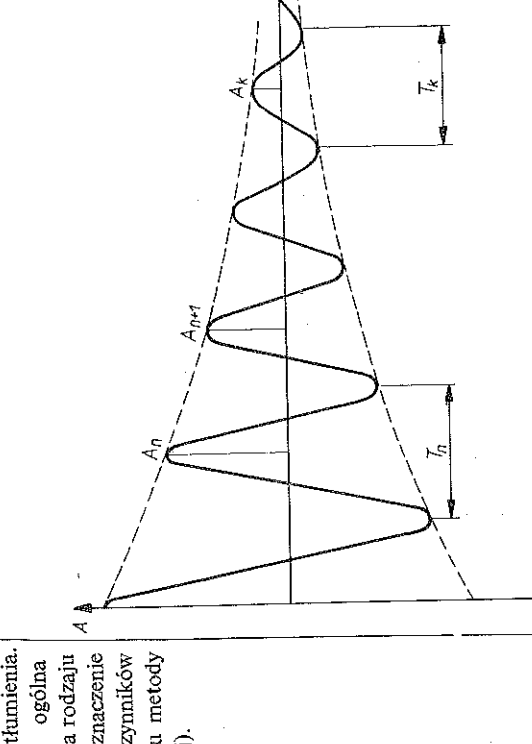
12	<p>Metoda głównych postaci drgań przy wyko-rzystaniu równań ruchu <i>i</i>-tej masy (metoda własna autora).</p>	<p>Wyznaczenie głównych postaci drgań; ustalenie, czy układ jest liniowy i czy zawiera wyrazy lepko-sprężyste; ustalenie dominującego charakteru tłumienia: wiskotyczne, histerezo-we, konstrukcyjne, związane z tarcie-m suchym; wyznaczenie współczynników uwzględniających te ce-chy szczególne.</p>	<p>Uzyskanie głównych postaci drgań tylko przy częstotściach ω_{0v}, dobór rozkładu sił metodą iteracyjną. Pomiar współczynnika rozkładu μ_{rv}. Pomiar współczynnika rozkładu μ'_{rv} i μ'_{rk} dla dwóch postaci po dołączeniu kolejno kilku mas dodatkowych m_{0i}; pomiar sił Q_{iv}.</p>
	<p>1) Obliczenie mas $m_i = a_{ii}$ podstawa warunków ortogo-nalności;</p> $\sum_i a_{ii} \mu_{iv} \mu_{ik} = 0 \quad (v \neq k)$ <p>oraz</p> $\sum_i a_{ii} \mu'_{iv} \mu'_{ik} = -m_0 \mu'_{iv} \mu'_{ik}$ <p>jako granicy, gdy $m_0 \rightarrow 0$.</p> <p>2) Wyznaczenie współczyn-nika tłumienia</p> $\delta_{iv} = \frac{Q_{iv}}{q_{iv} m_i \omega_{0v}}$ <p>i klasyfikacja tłumienia.</p> <p>3) Wyznaczenie współczynni-ka sprężystości i tłumienia</p> $\sum_i c_{ir} \mu_{rv} = \mu_{iv} m_i \omega_{0v}^2,$ $\sum_i b_{ir} \mu_{rv} = \frac{Q_{iv} \mu_{iv}}{q_{iv} \omega_{0v}}$ <p>(dla wiskotycznego),</p> $\sum_i b_{ir}^* \mu_{rv} = \frac{Q_{iv} \mu_{iv}}{q_{iv}}$ <p>(dla histerezo-owego)</p> <p>także</p> $c_{ir}(\omega_{0v}), \quad b_{ir}(\omega_{0v}).$		

Lp.	Nazwa, autor	Cel i zakres identyfikacji	Podstawowe etapy badań	Badania lub obliczenia uzupełniające
13	Metoda rezonansowa dla układu o jednym stopniu swobody.	Wyznaczenie wartości współczynników równania $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = P \sin \omega t$.	<p>Wariant I: Pomiar \dot{x}_{\max}, ω_0, x_{st} (dla $\omega \ll \omega_0$), P_0.</p> <p>Wariant II: Wykonanie wykresu amplituda-częstotliwość (jak p. 1).</p> <p>Wariant III: Pomiar kąta przesunięcia fazowego φ między $P(t)$ a $x(t)$ (w stanie ustalonym).</p>	$h = \frac{P_0}{\dot{x}_{\max}}, \quad k = \frac{P_0}{x_{st}}, \quad m = \frac{k}{\omega_0^2}$ <p>Obliczenie</p> $\delta = \frac{h}{2m} = \gamma \omega_0$ <p>jak p. 1 (dobroć $Q = 1/2\gamma$).</p> <p>Obliczenie δ ze wzoru</p> $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
14	Metoda masy dołączonej dla układu o jednym stopniu swobody (analogicznie — sztywności dołączonej).	Jak w p. 13.	Pomiar \dot{x}_{\max} , ω_0 , ω^* po dołączeniu masy m_0 i P_0 .	$h = \frac{P_0}{\dot{x}_{\max}}, \quad m = m_0 \frac{\omega_0^*}{\omega_0 - \omega^{*2}},$ $k = \omega_0^2 m.$

15	Metoda siły dodatkowej dla układu o jednym stopniu swobody.	Wyznaczenie wartości współczynników równania $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t + P_1 \sin(\omega t + \pi/2)$.	Pomiar ω_0 (gdy $P_1=0$), \dot{x}_{\max} przy $\omega=\omega^*$ takim, że \dot{x} jest w fazie z P_0 , P_1 i P_0 .	$h = \frac{P_0}{\dot{x}_{\max}}, m = \frac{P_1}{\dot{x}_{\max} \omega^{*2} - \omega_0^2}, k = m\omega_0^2.$
16	Metoda histerezowa dla układu o jednym stopniu swobody.	Wyznaczenie współczynników tłumienia właściwego ψ w prętach pełniących funkcje sprężyny i tłumienia.	Zbudowanie pętli histerezy lub pomiar przesunięcia fazowego φ_M między napięciem, a odkształceniem.	$\psi = \frac{\Delta V}{V} = 2\pi \operatorname{tg} \varphi_m = 2\pi \frac{N_1}{N_0} = 2\Delta\omega$ <p>(Δ oznacza dekrement tłumienia logarytmicznego),</p> $\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{h\omega}{k}$ <p>(przy drganiach swobodnych)</p> $\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{h\omega_0}{k} = \frac{\Delta}{\pi}.$



Rys. 4

Lp.	Nazwa, autor	Cel i zakres identyfikacji	Podstawowe etapy badań	Badania lub obliczenia uzupełniające
17	Metoda drgań swobodnych — dla układu o jednym stopniu swobody.	Wyznaczenie dekrementu logarytmicznego tłumienia. Charakterystyka ogólna układu, zwłaszcza rodzaju tłumienia. Wyznaczenie wartości współczynników (po zastosowaniu metody masy dołączonej).	<p>Rejestracja oscylogramu.</p> 	<p>$A = \ln \frac{A_n}{A_n + 1}$.</p> <p>1) Jeżeli tłumienie wiskotyczne, to $A = \text{const}$, $T_n = T_k = \text{const}$, $A = \delta T = \frac{\delta 2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \eta^2}} \approx \eta^2 \pi$, $A = \frac{\psi}{2} = \pi \text{ tg } \varphi_M$.</p> <p>2) Jeżeli tarcie suche, to obwiednie symetryczne (proste), $T_n = T_k = \text{const}$, $\frac{A_n}{A_{n+1}} \neq \frac{A_k}{A_{k+1}}$.</p> <p>3) Jeżeli są czony lepkościowe, to obwiednie niesymetryczne, $T_n = T_k$.</p> <p>4) Jeżeli element sprężysto-nieliniowy o charakterystyce niesymetrycznej, to obwiednie niesymetryczne, $T_n \neq T_k$.</p> <p>5) Jeżeli element sprężysto-nieliniowy o charakterystyce symetrycznej, to obwiednie symetryczne, $T_n \neq T_k$.</p>

Rys. 5

Z opisanych metod wyznaczania wartości parametrów identyfikowanego układu wyraźnie widać korzyści, jakie wynikają ze znajomości współczynników rozkładu głównych postaci drgań. Prace obliczeniowe ograniczają się do rozwiązania układów liniowych równań algebraicznych o małej liczbie niewiadomych, podczas gdy przy innych metodach identyfikacji, opartych np. na wykorzystaniu charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych lub amplitudowo-fazowych, konieczne jest na wstępie zbudowanie funkcji przenoszenia (transmitancji), a następnie rozwiązywanie złożonych układów nieliniowych równań algebraicznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, *An investigation into the theory of resonance testing*, Phil. Trans. of the Roy. Soc. London, A, **255**, 241–280, 1963.
2. W. BOGUSZ, *Inverse problem of nonlinear periodical vibrations*, III Konf. über nichtlin. Schwing., Berlin 1964. (Abhandl. der DAW, Klasse für Math., Phys. und Technik, Nr 1, Akademie Verlag, 1965).
3. M. BOSSAK, *Teoretyczne i doświadczalne opracowanie metody wyznaczania dynamicznych własności konstrukcji*, praca doktorska, Polít. Warszawska 1969.
4. T. K. CAUGHEY, *Classical normal modes in damped linear dynamic systems*, Trans. of the ASME, Series E, J. Appl. Mech., **27**, 1, 1960.
5. R. CHMURY, *Identifikácia pohybových rovníc mechaniczých sustav typu turbinového podložía, a kmitanie pružne uložených rotorov*, praca doktorska, UMS-SAV Bratislava, 1968.
6. O. L. DAVIS, *The design and analysis of industrial experiments*, Oliver and Boyd, 1954.
7. W. JĘDRUCH, *Iteracyjne metody identyfikacji parametrów liniowych obiektów dynamicznych*, PAK Nr 10, 1967.
8. E. KAMIŃSKI, *Testing of a vibratory impact device*, Proc. Vibr. Probl., **2**, 3(7), 1961.
9. E. KAMIŃSKI, *Tłumienie układów mechanicznych za pomocą cieczy lepkospęrzytych*, Rozpr. Inżyn. [w druku].
10. E. KAMIŃSKI, *Badanie impedancji mechanicznej kończyny górnej*, prace IPPT, Nr 44/1970.
11. E. KAMIŃSKI, *Identifikacja układów mechanicznych z członami lepkospęrzytymi*, Prace IPPT, Nr 37/1971.
12. E. KAMIŃSKI, W. NADOLSKI, S. ZIEMBA, *Cele i metody współczesnej diagnostyki drganiowej maszyn*, Arch. Bud. Maszyn, **19**, 2, 1972.
13. V. KLEIN, *Stanovení parametru lineární soustavy z výsledku měření*, IV Konf. Dyn. Maszyn, Kraków 1965.
14. V. KOČKA, *Závislost výsledku řešení inverzního problému dynamiky na jeho matematické formulci*, Strojnický časopis, **5**, 1966.
15. T. KOŃCZAK, M. MIKOŁAJCZAK, J. OSIECKI, *Budowa dyskretnego modelu dynamicznego złożonej przestrzennej konstrukcji prętowej na przykładzie ramy pługa wielokorpusowego*, Arch. Bud. Maszyn, **16**, 2, 1969.
16. A. A. KRASOWSKI, G. S. POSPIELOW, *Podstawy automatyki i cybernetyki technicznej*, WAT, 1965.
17. P. KRZYWOREKA, T. ŚLUSZKIEWICZ, M. SZYPER, *Praktyczne aspekty identyfikacji*, PAK Nr 10, 1967.
18. R. KULIKOWSKI, *Nonlinear dynamic identification*, III Konf. über nichtlin. Schwingungen, Berlin 1964, Arkad. Verlag, **2**, 424, 1966.
19. K. MAŃCZAK, J. MILCZARSKI, *Przyrządy do pomiaru charakterystyk częstotliwych*, Arch. Autom. i Telem., **5**, 2, 1960.

20. K. MAŃCZAK, *Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania*, PAK Nr 10, 1967.
21. K. MAŃCZAK, *Identyfikacja procesów*, Skrypt OPT-NOT, Warszawa 1969/1970.
22. J. OSIECKI, S. ZIEMBA, *Podstawy pomiarów drgań mechanicznych*, PWN, 1968.
23. J. OSIECKI, *The construction of discrete vibrating model and the existence of weak couplings in the practical analysis of mechanics dynamics*, Zag. Drgań Niel., Nr 10, 1969.
24. B. W. PAWŁOW, *Badania diagnostyczne w technice*, WNT, 1967.
25. PRODERA, Société de Production et de Developpement Radio Electrique, Paris, Katalogi «Vibrations».
26. L. PUST, *The determination of complex receptance matrix by means of model studies*, Zbornik referatov VI Konf. o dynamike strojov, Bratislava—Smolenice, CSAV, 1970.
27. S. RABIEJ, *Badanie charakterystyk dynamicznych układów metodami korelacyjnymi na przykładzie niektórych układów automatycznej regulacji*, Polit. Warszawska, 1969.
28. R. M. ROSENBERG, *Normal modes of nonlinear dual-mode systems*, Trans. of the ASME, Series E, J. Appl. Mech., 27, 1, 1960.
29. J. SEIDLER, *Podstawowe problemy teoretyczne identyfikacji*, PAK Nr 10, 1967.
30. J. SOEBERG, *Real time analysis*, Techn. Rev., Brüel and Kjaer, Nr 4, 1969.
31. SOLARTRON, *Transfer Function Analyzer*, Leaflet No S. S. A/2.
32. W. W. SOŁODOWNIKOW, *Dynamika statystyczna liniowych układów sterowania automatycznego* WNT, 1964.
33. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Normal modes of a non-linear two-degree of freedom system and their properties*, Arch. Bud. Masz., 10, 35–36, 1963.
34. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the normal coordinates in an analysis of steady-state forced vibrations of non-linear multiple-degree-of-freedom system*, Arch. Mech. Stos., 21, 5, 1969.
35. M. SZYPER, P. KRZYWOREKA, *Deterministyczne klasyczne metody identyfikacji*, PAK Nr 10, 1967.
36. G. DE VRIES, C. BEATRIX, *Les procédés généraux de mesure des caracteristiques vibratoires des structures linéaires faiblement amorties*, Progress in Aeronautical Sciences, 9, 1968.
37. J. WICHER, S. ZIEMBA, *Wyznaczanie charakterystyk dynamicznych układów znajdujących się pod wpływem wymuszeń losowych*, Prace IPPT Nr 18, 1967.
38. J. WICHER, S. ZIEMBA, *On a certain approximate method for determining optimum dynamic characteristics of a linear system*, Nonl. Vibr. Probl., Nr 10, 1969.
39. J. WICHER, S. ZIEMBA, *Zastosowanie wielomianów Laguerre'a do przybliżonego wyznaczenia charakterystyk dynamicznych*, Sbornik V Konf. Dynamika strojov, CSAV, 1968.
40. J. WICHER, *Modyfikacja metody linearyzacji statystycznej do eksperymentalnego badania własności dynamicznych nieliniowych układów mechanicznych*, praca doktorska, IPPT-PAN, 1970.
41. J. WICHER, *Identyfikacja nieliniowego układu mechanicznego o wielu stopniach swobody znajdującego się pod działaniem wymuszeń przypadkowych*, Symp. «Metody statystyczne w mechaniczności», PTMTS oddz. Gliwice, 1970.
42. Praca zbiorowa, *Wstęp do badań drgań liniowych układów mechanicznych*, Polit. Wroclawska, Instytut Materiałoznawstwa, Przegląd prac — seria Miernictwo, Nr 1, 1967.
43. Т. А. Гевондян, Л. Т. Киселев, *Приборы для измерения и регистрации колебаний*, Машиноз Москва.
44. Ю. И. Иорриц, *Виброметрия*, Гос. изд. маш. лят. Москва.
45. А. А. Кардашев, Л. В. Карношин, *Определение параметров системы по экспериментальным (заданным) частотным характеристикам*, Автом. и телемех., 19, 4, 1958.
46. Г. М. Монастыршин, *Обработка экспериментальных частотных характеристик*, Автом. и шелемех., 21, 3, 1960.

Резюме

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С ВЯЗКОУПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМ

Работа связана с предыдущей статьей автора [9]. В начале обсуждены известные процедуры общей и полной идентификации, с использованием детерминистских и случайных возмущений. Далее представлен новый вариант идентификации, основанный на принципе выделения главных форм колебаний. Данный метод дает возможность определения значений коэффициентов в уравнениях движения объекта, также и в том случае, когда он содержит вязкоупругие элементы.

SUMMARY

IDENTIFICATION OF MECHANICAL SYSTEMS WITH VISCOELASTIC ELEMENTS

The present paper is related to a former publication [9] by the author. The introduction contains a discussion of the known procedures of general and complete identification, in the cases of deterministic and random excitations; next, a new variant of identification is presented, based on the principle of separation of principal vibration modes. This method enables us to determine the values of coefficients of the equations of motion of the object, also in the case when it contains viscoelastic elements.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 października 1972 r.
