

WPŁYW ZMIANY KĄTA DZIAŁANIA NA SZTYWNOŚĆ ŁOŻYSKA WIEŃCOWEGO PRZY OBCIĄŻENIU ZŁOŻONYM

TERESA GIB CZYŃSKA (KRAKÓW)

1. WSTĘP

Celem pracy jest ustalenie wpływu zmiany kąta działania na skutek odkształcenia się kulek i bieżni — na sztywność dwurzędowego łożyska wieńcowego, obciążonego płaskim układem sił.

Zagadnienie to zostało już poruszone w pracy [3], w której wykazano jak istotne znaczenie ma uwzględnienie zmiany kąta działania w przypadku łożyska obciążonego dużą siłą osiową, małą promieniową i małym momentem. Wyniki tej pracy są jednak niewystarczające do wyciągnięcia ogólniejszych wniosków, dlatego rozpatrzmy jeszcze przypadek obciążenia złożonego w zakresie dużego momentu. Zakres taki był już rozpatrywany w pracy [1] przy założeniu niezmiennego kąta działania (bieżnie stożkowe). Zagadnienie to rozwiążemy teraz w sposób ściślejszy, przyjmując bieżnie toroidalne i uwzględniając zmianę kąta działania na skutek odkształcenia się kulek i bieżni. Porównanie wyników wszystkich prac pozwoli na pewne stwierdzenia dotyczące pracy tego typu łożysk.

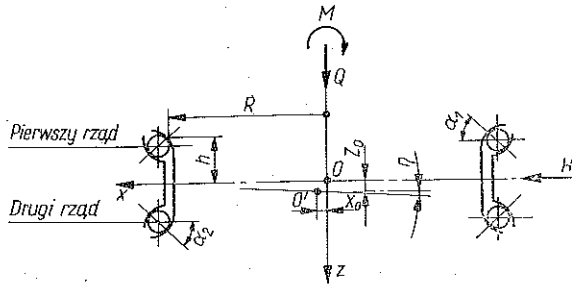
2. RÓWNANIA STATYKI

W pracy [2] były podane założenia przyjętego modelu obliczeniowego łożyska oraz zostały wyprowadzone podstawowe zależności i równania statyki. Obecnie ograniczymy się do rozwiązania tych równań w rozpatrywanym zakresie obciążeń.

Równania równowagi łożyska dla bieżni toroidalnych są następujące:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi Q}{cn} &= \int_0^{\bar{\varphi}_1} [f_1(\varphi_1)]^{3/2} \sin \alpha_1(\varphi_1) d\varphi_1 + \int_0^{\bar{\varphi}_2} [f_2(\varphi_2)]^{3/2} \sin \alpha_2(\varphi_2) d\varphi_2, \\
 (2.1) \quad \frac{\pi H}{cn} &= \int_0^{\bar{\varphi}_1} [f_1(\varphi_1)]^{3/2} \sin \alpha_1(\varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 - \int_0^{\bar{\varphi}_2} [f_2(\varphi_2)]^{3/2} \sin \alpha_2(\varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_2, \\
 \frac{\pi M}{cn} &= R \int_0^{\bar{\varphi}_1} [f_1(\varphi_1)]^{2/3} \sin \alpha_1(\varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 + R \int_0^{\bar{\varphi}_2} [f_2(\varphi_2)]^{3/2} \sin \alpha_2(\varphi_2) \times \\
 &\quad \times \cos \varphi_2 d\varphi_2 + h \int_0^{\bar{\varphi}_1} [f_1(\varphi_1)]^{3/2} \cos \alpha_1(\varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 + h \int_0^{\bar{\varphi}_2} [f_2(\varphi_2)]^{3/2} \times \\
 &\quad \times \cos \alpha_2(\varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_2,
 \end{aligned}$$

gdzie Q oznacza siłę osiową, H siłę promieniową, M moment obciążający łożysko, R , h wymiary łożyska przedstawionego na rys. 1, n liczbę kulek w jednym rzędzie, c stałą wyznaczoną ze wzoru Hertza, zależną od materiału i kształtu stykających się elementów, $\alpha_m(\varphi_m)$ ($m=1, 2$) kąty działania w rzędzie pierwszym lub drugim po odkształceniu kulek i bieżni jako funkcję zmiennego kąta φ_m ; $\bar{\varphi}_m$ ($m=1, 2$) kąty graniczne przedstawione na rys. 2 oraz $f_m(\varphi_m)$ ($m=1, 2$) odkształcenie (zbliżenie) kulek i bieżni rzędu pierwszego lub drugiego.



Rys. 1

Odształcenie to określone jest zależnością [2]:

a) dla rzędu pierwszego

$$(2.2) \quad f_1(\varphi_1) = [(a_1 \sin \alpha_{01} + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_{01} - x_0 \cos \varphi_1)^2]^{1/2} - a_1,$$

b) dla rzędu drugiego

$$[f_2(\varphi_2) = [(a_2 \sin \alpha_{02} - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_{02} + x_0 \cos \varphi_2)^2]^{1/2} - a_2,$$

przy czym a_m ($m=1, 2$) oznacza odległości między środkami krzywizn w płaszczyźnie południkowej bieżni zewnętrznej i wewnętrznej rzędu pierwszego lub drugiego przed odkształceniem (rys. 3), α_{0m} ($m=1, 2$) kąty działania rzędu pierwszego lub drugiego przed odkształceniem, określone konstrukcją łożyska (rys. 3) oraz x_0 , z_0 , η uogólnione przemieszczenia pierścienia wewnętrznego (rys. 1).

W czasie pracy łożyska obciążenie przenoszą tylko te elementy toczne, dla których odkształcenie spełnia warunek

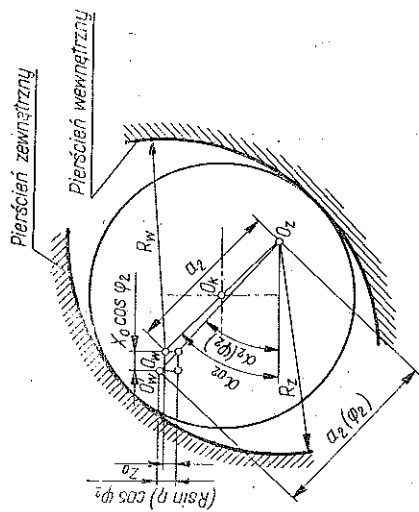
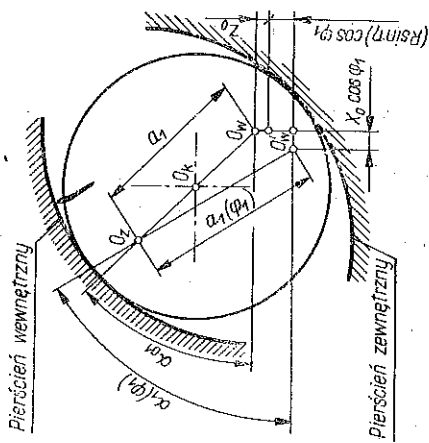
$$f_m(\varphi_m) > 0, \quad m=1, 2.$$

Przyrównując więc odkształcenie $f_m(\varphi_m)$ do zera możemy wyznaczyć takie graniczne kąty φ_m , w zakresie których elementy toczne będą obciążone. Kąty te stanowią granice całkowania $\bar{\varphi}_m$.

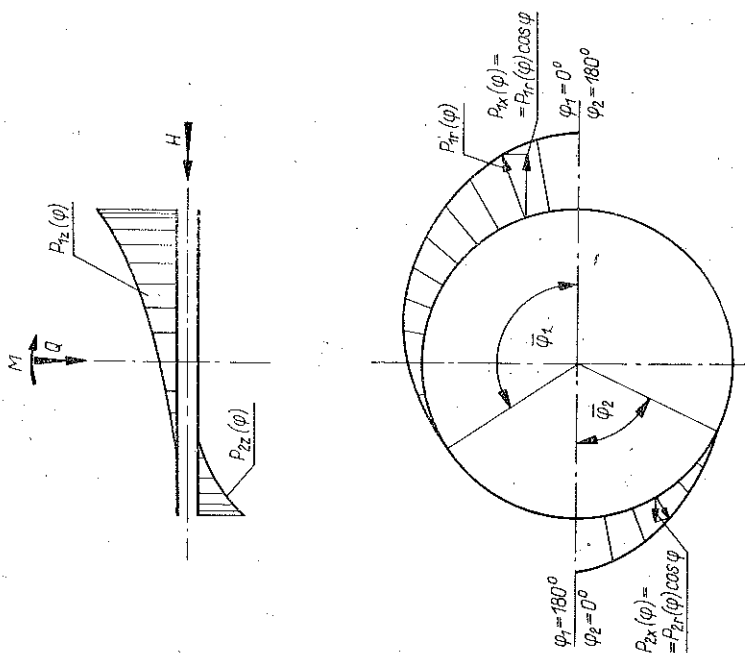
Kąty działania α_m na skutek odkształcenia się kulek i bieżni ulegają zmianie wraz ze zmianą kąta φ_m ; funkcje $\sin \alpha_m(\varphi_m)$ i $\cos \alpha_m(\varphi_m)$ określimy z zależności geometrycznych (rys. 3):

$$(2.3) \quad \sin \alpha_m(\varphi_m) = (a \sin \alpha_{0m} \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_m) [(a \sin \alpha_{0m} \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_m)^2 + (a \cos \alpha_{0m} \pm x_0 \cos \varphi_m)^2]^{-1/2},$$

$$(2.4) \quad \cos \alpha_m(\varphi_m) = (a \cos \alpha_{0m} \mp x_0 \cos \varphi_m) [(a \sin \alpha_{0m} \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_m)^2 + (a \cos \alpha_{0m} \pm x_0 \cos \varphi_m)^2]^{-1/2}.$$



Rys. 3



Rys. 2

We wzorach tych znaki górne odnoszą się do rzędu pierwszego, dolne — do rzędu drugiego.

W naszych rozważaniach przyjmijmy następujące założenia:

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_0, \quad a_1 = a_2 = a,$$

gdyż w tego typu łożyskach kąty działania oraz profile bieżni są najczęściej identyczne w obu rzędach.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ STATYKI

Równania (2.1) rozwiążemy metodą przybliżoną, ponieważ zawierają skomplikowane całki nie nadające się do dalszej analizy. Zastosujemy tu metodę małego parametru. W związku z tym, że rozważania te obejmują zakres dużego momentu M i małych sił (osiowej Q i promieniowej H), małe w tym zakresie będą wielkości x_0/R i z_0/R . Wielkości te przyjmujemy jako małe parametry oraz dodatkowo parametr R/a , który uwzględnia zmianę kąta działania.

Ze wzorów (2.3) i (2.4) wynika bowiem, że

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sin \alpha_m(\varphi_m) = \sin \alpha_{0m}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \cos \alpha_m(\varphi_m) = \cos \alpha_{0m}.$$

Geometrycznie jest to oczywiste, bowiem przypadek $a \rightarrow \infty$ odpowiada bieżniom stożkowym, gdzie zmiana kąta działania nie występuje. W rozpatrywanym zakresie obciążeń $\sin \eta$ należy traktować jako wartość skończoną.

Niewymierne wyrażenia będziemy rozwijali w potrójne szeregi potęgowe względem małych w tym zakresie bezwymiarowych, uogólnionych przemieszczeń x_0/R , z_0/R i dodatkowo parametru R/a , charakteryzującego krzywiznę południkową bieżni. W konstrukcjach występujących w praktyce ten ostatni parametr nie jest mały względem jedności, jest nawet z reguły większy od jedności, jednak okaże się, że odpowiednie współczynniki szeregów będą tak małe, iż zapewnią wystarczającą zbieżność szeregów. W szeregach zachowywać będziemy wyrazy do drugiego rzędu włącznie.

Funkcję

$$[(a \sin \alpha_0 \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_m)^2 + (a \cos \alpha_0 \pm x_0 \cos \varphi_m)^2]^{1/2},$$

występującą w obu wzorach (2.2) (przy czym znaki górne odnoszą się do $m=1$, a dolne do $m=2$) rozwiniemy w szereg potęgowy po podniesieniu do kwadratu wyrażeń zawartych w nawiasach i wyciągnięciu przed pierwiastek wielkości a .

Podstawiając otrzymany szereg do (2.2) i wyłączając wyraz zerowy dla ułatwienia dalszych działań, określimy odkształcenia kulek $f_m(\varphi_m)$ wzorem

$$(3.1) \quad f_m(\varphi_m) = R \sin \eta \sin \alpha_0 \cos \varphi_m \left[1 + \frac{\cos^2 \alpha_0}{2 \sin \alpha_0} \cos \varphi_m \sin \eta \frac{R}{a} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{1}{\cos \varphi_m \sin \eta} \frac{z_0}{R} \mp \frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{\sin \eta} \frac{x_0}{R} \pm \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} \frac{R}{a} \frac{z_0}{R} \pm \right. \\ \left. \pm \cos \alpha_0 \cos \varphi_m \frac{R}{a} \frac{x_0}{R} - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_m \sin^2 \eta \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \dots \right], \quad m=1, 2.$$

Po podniesieniu do potęgi 3/2 szeregu (3.1) otrzymamy [7]

$$(3.2) \quad f_m^{3/2}(\varphi_m) = (R \sin \eta)^{3/2} \sin^{3/2} \alpha_0 \cos^{3/2} \varphi_m \left[1 + \frac{3}{4} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \varphi_m \sin \eta \frac{R}{a} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{3}{2 \cos \varphi_m \sin \eta} \frac{z_0}{R} \mp \frac{3 \operatorname{tg} \alpha_0}{2 \sin \eta} \frac{x_0}{R} + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \left(\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha_0}{8} - 1 \right) \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_m \sin^2 \eta \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \frac{3}{8 \cos^2 \varphi_m \sin^2 \eta} \left(\frac{z_0}{R} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}{8 \sin^2 \eta} \left(\frac{x_0}{R} \right)^2 \pm \frac{15}{8} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{R}{a} \frac{z_0}{R} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha_0}{4} \right) \cos \alpha_0 \cos \varphi_m \frac{R}{a} \frac{x_0}{R} - \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha_0}{4 \cos \varphi_m \sin^2 \eta} \frac{z_0}{R} \frac{x_0}{R} + \dots \right].$$

Funkcje (2.3) i (2.4) po rozwinięciu w szeregi potęgowe napiszemy teraz następująco:

$$\sin \alpha_m(\varphi_m) = \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \cos \varphi_m \sin \eta \frac{R}{a} \pm \cos^2 \alpha_0 \frac{R}{a} \frac{z_0}{R} \pm \\ \pm \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \varphi_m \frac{R}{a} \frac{x_0}{R} - \frac{3}{2} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \eta \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \dots, \\ \cos \alpha_m(\varphi_m) = \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \varphi_m \sin \eta \frac{R}{a} \mp \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{R}{a} \frac{z_0}{R} \mp \\ \mp \sin^2 \alpha_0 \cos \varphi_m \frac{R}{a} \frac{x_0}{R} - \frac{1}{2} (1 - 3 \sin^2 \alpha_0) \cos \alpha_0 \cos^2 \varphi_m \sin^2 \eta \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \dots$$

Granice całkowania wyznaczmy z warunków $f_m(\varphi_m) = 0$ i otrzymamy je w postaci szeregów

$$(3.3) \quad \bar{\varphi}_m = \arccos \left[\mp \frac{1}{\sin \eta} \frac{z_0}{R} \left(1 \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{\sin \eta} \frac{x_0}{R} + \dots \right) \right].$$

Ze wzoru (3.3) wynika, że w przypadku uwzględnienia wyrazów szeregu do drugiego rzędu włącznie zmiana kąta działania nie będzie miała wpływu na wartość kątów granicznych.

W celu zmiany granic całkowania, które są funkcjami zmiennych $\frac{x_0}{R}$, $\frac{z_0}{R}$ i $\sin \eta$ na wartości stałe, wprowadzimy nową zmienną

$$(3.4) \quad \vartheta = \frac{\pi}{2\varphi_m} \varphi_m,$$

skąd granice całkowania $0 \leq \vartheta \leq \bar{\vartheta}$, gdzie $\bar{\vartheta} = \pi/2$, natomiast

$$(3.5) \quad \cos \varphi_m = \cos \left(\frac{2\bar{\varphi}_m}{\pi} \vartheta \right).$$

Ze względu na to, że funkcję (3.5) należy przedstawić w postaci szeregu, rozwinęliśmy najpierw w szereg (3.3):

$$(3.6) \quad \bar{\varphi}_m = \frac{\pi}{2} - \left[\mp \frac{1}{\sin \eta} \frac{z_0}{R} \left(1 \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{\sin \eta} \frac{x_0}{R} + \dots \right) + \dots \right],$$

a następnie wstawimy do (3.5):

$$(3.7) \quad \cos \varphi_m = \cos \left\{ \vartheta \left[1 \pm \frac{2}{\pi \sin \eta} \frac{z_0}{R} \left(1 \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{\sin \eta} \frac{x_0}{R} + \dots \right) + \dots \right] \right\}.$$

Wyrażenie (3.7) możemy przedstawić w postaci

$$(3.7') \quad \cos \varphi_m = \cos(\vartheta \pm \varepsilon \vartheta) = \cos \vartheta \cos \varepsilon \vartheta \mp \sin \vartheta \sin \varepsilon \vartheta,$$

przy czym ε jest wielkością małą pierwszego rzędu; jej wartość wynika z porównania (3.7) i (3.7').

Rozwijając w szeregi potęgowe funkcje $\cos \varepsilon \vartheta$ i $\sin \varepsilon \vartheta$ otrzymamy

$$(3.8) \quad \cos \varphi_m = \cos \vartheta \mp \varepsilon \vartheta \sin \vartheta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \vartheta^2 \cos \vartheta + \dots$$

Następnie rozwinęliśmy w szereg potęgowy funkcję $\cos^k \varphi_m$, $k=1/2, 3/2, 5/2, 7/2$:

$$(3.9) \quad \cos^k \varphi_m = \cos^k \vartheta \left[1 \mp k \left(\varepsilon \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \pm \frac{1}{2} \varepsilon^2 \vartheta^2 + \dots \right) + \frac{k(k-1)}{2!} \varepsilon^2 \vartheta^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta + \dots \right].$$

Wstawiając do równań (2.1) odpowiednie rozwinięcia, wykonując zaznaczone działania i porządkując wyrazy, otrzymamy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \frac{\pi Q}{c n (R \sin \alpha_0)^{3/2}} &= (\sin \eta)^{3/2} \left[\frac{\sin \alpha_0}{\pi \sin \eta} \frac{z_0}{R} \left(-6 \int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta + \right. \right. \\ &+ 3\pi \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2} \vartheta d\vartheta - 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta \left. \right) - \frac{3 \cos \alpha_0}{\sin \eta} \frac{x_0}{R} \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta + \\ &+ \frac{7 \cos^2 \alpha_0}{\pi} \frac{R}{a} \frac{z_0}{R} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta + \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta - \right. \\ &- \frac{5\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta \left. \right) + \frac{5}{2} \cos \alpha_0 \left(\sin \alpha_0 - \right. \\ &\left. - \frac{3}{4} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right) \frac{R}{a} \frac{x_0}{R} \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta + \dots \Big], \\ \frac{-\pi H}{c n (R \sin \alpha_0)^{3/2}} &= (\sin \eta)^{3/2} \left[\frac{\cos \alpha_0}{\pi \sin \eta} \frac{z_0}{R} \left(-10 \int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta + \right. \right. \\ &\left. \left. + 3\pi \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta + 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta \right) + \right. \end{aligned}$$

(3.10)

[e.d.]

$$\begin{aligned}
& + \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0}{\sin \eta} \frac{x_0}{R} \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta + \frac{\cos \alpha_0}{\pi} \left(\frac{3}{4} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 - \right. \\
& \left. - \sin \alpha_0 \right) \frac{R}{a} \frac{z_0}{R} \left(4 \int_0^{\pi/2} \cos^{7/2} \vartheta d\vartheta + \frac{5\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta - \right. \\
& \left. - 14 \int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{7/2} \vartheta d\vartheta \right) + 2 \left(3 - \frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \times \\
& \quad \times \cos^2 \alpha_0 \frac{R}{a} \frac{x_0}{R} \int_0^{\pi/2} \cos^{7/2} \vartheta d\vartheta + \dots \Bigg], \\
\frac{\pi M}{c n (R \sin \alpha_0)^{3/2} (R + h \operatorname{ctg} \alpha_0)} & = (\sin \eta)^{3/2} \left\{ 2 \sin \alpha_0 \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta + \right. \\
& + 2 \sin \eta \left(\frac{3}{4} + \frac{R - h \operatorname{tg} \alpha_0}{R + h \operatorname{ctg} \alpha_0} \right) \cos^2 \alpha_0 \frac{R}{a} \int_0^{\pi/2} \cos^{7/2} \vartheta d\vartheta + \\
& \quad + \frac{1}{2} \sin^2 \eta \left[\left(\frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 - 5 \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \cos^2 \alpha_0 + \right. \\
& \quad + \frac{R - h \operatorname{tg} \alpha_0}{R + h \operatorname{ctg} \alpha_0} \left(\frac{3}{4} \operatorname{ctg}^3 \alpha_0 - \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \cos^2 \alpha_0 \Bigg] \left(\frac{R}{a} \right)^2 \int_0^{\pi/2} \cos^{9/2} \vartheta d\vartheta + \\
& + \frac{10 \sin \alpha_0}{(\pi \sin \eta)^2} \left(\frac{z_0}{R} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \vartheta^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta - \int_0^{\pi/2} \vartheta^2 \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta - \right. \\
& \left. - \int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta \right) - \frac{3 \sin \alpha_0}{\pi \sin^2 \eta} \left(\frac{z_0}{R} \right)^2 \left(3 \int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta - \right. \\
& \quad \left. - 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta + \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2} \vartheta d\vartheta \right) + \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0}{4 \sin^2 \eta} \times \\
& \quad \times \left(\frac{x_0}{R} \right)^2 \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta + \frac{\cos \alpha_0}{\pi \sin^2 \eta} \frac{z_0}{R} \frac{x_0}{R} \left(5 \int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta - \right. \\
& \quad \left. - 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta + \frac{3\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta \right) + \dots \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Wartości poszczególnych całek występujących w równaniach (3.10) są następujące [6]:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = 1,1981,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = 0,8740,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} = 0,7189,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{7/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)} = 0,6243,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{9/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)} = 0,5591,$$

$$\int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{3/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^{5/2} \left[\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\right]^2} = 0,5827,$$

$$\int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2^{7/2} \left[\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\right]^2} = 0,2876,$$

$$\int_0^{\pi/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta \cos^{7/2} \vartheta d\vartheta = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2^{9/2} \left[\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)\right]^2} = 0,1784,$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \vartheta^2 \operatorname{tg} \vartheta \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta + \int_0^{\pi/2} \vartheta^2 \cos^{5/2} \vartheta d\vartheta = \\ = \sin \vartheta \cos^{3/2} \vartheta \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \vartheta \cos^{5/2} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta = 0,2876, \end{aligned}$$

gdzie $\Gamma(x)$ jest funkcją gamma Eulera.

Wstawiając do równań (3.10) wartości odpowiednich całek, wykonując zaznaczone działania, a ponadto wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} q_Q &= \frac{\pi Q}{cn(R \sin \alpha_0)^{3/2}}, & q_H &= \frac{\pi H}{cn(R \sin \alpha_0)^{3/2}}, \\ q_M &= \frac{\pi M}{cn(R \sin \alpha_0)^{3/2} (R + h \operatorname{ctg} \alpha_0)}, \end{aligned}$$

nadamy równaniom postać

$$(3.11) \quad \begin{aligned} q_Q &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{ijk} (\sin \eta)^{3/2+i-j-k} \left(\frac{R}{a}\right)^i \left(\frac{z_0}{R}\right)^j \left(\frac{x_0}{R}\right)^k, \\ -q_H &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{ijk} (\sin \eta)^{3/2+i-j-k} \left(\frac{R}{a}\right)^i \left(\frac{z_0}{R}\right)^j \left(\frac{x_0}{R}\right)^k, \\ q_M &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_{ijk} (\sin \eta)^{3/2+i-j-k} \left(\frac{R}{a}\right)^i \left(\frac{z_0}{R}\right)^j \left(\frac{x_0}{R}\right)^k. \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że q_Q , q_H i q_M zawierające odpowiednio obciążenia Q , H i M są wielkościami bezwymiarowymi.

Współczynniki w szeregach są następujące:

$$A_{010} = 3,5944 \sin \alpha_0, \quad A_{001} = -2,6221 \cos \alpha_0, \quad A_{110} = 7,6477 \cos^2 \alpha_0,$$

$$A_{101} = 3,5944 \left(1 - \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0\right) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0,$$

$$A_{000} = A_{100} = A_{200} = A_{020} = A_{002} = A_{011} = 0,$$

$$B_{010} = 2,6221 \cos \alpha_0, \quad B_{001} = -2,1566 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0,$$

$$B_{110} = -3,5944 \left(1 - \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0\right) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0,$$

$$B_{101} = 1,2486 \left(3 - \frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0\right) \cos^2 \alpha_0,$$

$$B_{000} = B_{100} = B_{011} = B_{200} = B_{020} = B_{002} = 0,$$

$$D_{000} = 1,4378 \sin \alpha_0, \quad D_{100} = 1,2486 \left(\frac{3}{4} + \kappa\right) \cos^2 \alpha_0,$$

gdzie

$$\kappa = \frac{R - h \operatorname{tg} \alpha_0}{R + h \operatorname{ctg} \alpha_0},$$

$$D_{200} = 0,2796 \left[\left(\frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 - 5\right) + \kappa (3 \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 - 1) \right] \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0,$$

$$D_{020} = 0,8986 \sin \alpha_0, \quad D_{002} = 0,5591 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0,$$

$$D_{011} = -1,3110 \cos \alpha_0, \quad D_{010} = D_{001} = D_{110} = D_{101} = 0.$$

Równania (3.11) rozwiążemy względem zmiennych x_0/R , z_0/R i $\sin \eta$ przez odwrócenie szeregów [7]. Po odwróceniu otrzymamy szeregi względem zmiennych q_Q i q_H przy zachowaniu parametru R/a (charakteryzującego krzywiznę południkową bieżni).

Szeregi te przedstawiamy w postaci

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \frac{x_0}{R} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{ijk} \left(\frac{R}{a}\right)^i q_Q^j q_H^k, \\ \frac{z_0}{R} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{ijk} \left(\frac{R}{a}\right)^i q_Q^j q_H^k, \\ \sin \eta &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ijk} \left(\frac{R}{a}\right)^i q_Q^j q_H^k. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia współczynników ξ_{ijk} , ζ_{ijk} i ψ_{ijk} szeregi podniesione do odpowiedniej potęgi wstawimy do równań (3.11), następnie porównując współczynniki przy jednakowych potęgach q_Q , q_H i R/a po obu stronach równości, otrzymamy układy równań, z których określimy wielkości poszukiwanych współczynników.

Ostateczna postać współczynników jest następująca:

$$\begin{aligned} \psi_{000} &= \left(\frac{1}{\sin \alpha_0} \frac{q_M}{1,4378}\right)^{3/2}, & \psi_{100} &= -0,5789 \left(\frac{3}{4} + \kappa\right) \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \psi_{000}^2, \\ \psi_{200} &= \left\{ 0,7541 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \left(\frac{3}{4} + \kappa\right)^2 - 0,1295 \left[\frac{3}{8} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 5 \sin \alpha_0 + (3 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 - 4 \sin \alpha_0) \kappa \right] \right\} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \psi_{000}^3, \\ \psi_{020} &= -0,3680 \frac{1}{\psi_{000}^2 \sin^2 \alpha_0}, & \psi_{002} &= -0,6310 \frac{1}{\psi_{000}^2 \cos^2 \alpha_0}, \\ \psi_{011} &= -0,9203 \frac{1}{\psi_{000}^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}, & \xi_{010} &= 3,0262 \frac{1}{\cos \alpha_0 \psi_{000}^{1/2}}, \\ \xi_{001} &= 4,1460 \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\cos \alpha_0 \psi_{000}^{1/2}}, \\ \xi_{110} &= -3,4118 \frac{\psi_{000}^{1/2}}{\cos \alpha_0} \left[-0,2538 \left(\frac{3}{4} + \kappa\right) \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + 20,0515 \left(\sin \alpha_0 - \frac{3}{4} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right) - 4,4879 \left(3 - \frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \sin \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + 16,4935 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right], \\ \xi_{101} &= -4,6770 \frac{\psi_{000}^{1/2} \operatorname{tg} \alpha_0}{\cos \alpha_0} \left[-0,2538 \left(\frac{3}{4} + \kappa\right) \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 + \right. \\ &\quad \left. + 18,8450 \left(\sin \alpha_0 - \frac{3}{4} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right) - \right. \\ &\quad \left. - 4,4879 \left(3 - \frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \sin \alpha_0 + 14,6272 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right], \\ \xi_{000} &= \xi_{100} = \xi_{200} = 0, \end{aligned}$$

$$\zeta_{010} = \frac{2,4863}{\sin \alpha_0 \psi_{000}^{1/2}}, \quad \zeta_{001} = \frac{3,0260}{\cos \alpha_0 \psi_{000}^{1/2}},$$

$$\zeta_{110} = -2,8062 \frac{\psi_{000}^{1/2}}{\sin \alpha_0} \left[-0,2538 \left(\frac{3}{4} + \kappa \right) \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 + \right. \\ \left. + 18,8500 \left(\sin \alpha_0 - \frac{3}{4} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right) - 3,9803 \left(3 - \frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \sin \alpha_0 + \right. \\ \left. + 16,4835 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right],$$

$$\zeta_{101} = -3,4118 \frac{\psi_{000}^{1/2}}{\cos \alpha_0} \left[-0,2538 \left(\frac{3}{4} + \kappa \right) \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 + \right. \\ \left. + 20,0515 \left(\sin \alpha_0 - \frac{3}{4} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right) - 4,4878 \left(3 - \frac{3}{8} \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \sin \alpha_0 + \right. \\ \left. + 16,4935 \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \alpha_0 \right], \quad \zeta_{020} = \zeta_{100} = \zeta_{200} = 0.$$

Szeregi (3.12) określają poszukiwaną sztywność łożyska przy uwzględnieniu zmiany kąta działania.

Przybliżony zakres stosowalności powyżej podanych wzorów jest taki sam jak w pracy [1], gdyż zmiana kąta działania w przyjętej do rozważań dokładności nie ma wpływu na wartości kątów granicznych $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$.

Uzyskane rozwiązanie jest zatem poprawne, gdy moment M spełnia warunek

$$M \geq (R \sin \alpha_0 + h \cos \alpha_0), \left(7,915 \frac{Q}{\sin \alpha_0} + 10,299 \frac{H}{\cos \alpha_0} \right).$$

4. WNIOSKI

W celu ustalenia wpływu zmiany kąta działania na sztywność łożyska zestawimy rozwinięte wzory określające uogólnione przemieszczenia pierścienia wewnętrznego jako funkcję obciążeń zewnętrznych i parametru R/a dla obciążenia złożonego w zakresie dużej siły osiowej i dużego momentu.

Uogólnione przemieszczenia w zakresie dużej siły osiowej na podstawie pracy [3] możemy przedstawić w postaci

$$\frac{x_0}{R} = \frac{a}{R} \left(\bar{\xi}_{010} \frac{q_M}{q_Q} + \bar{\xi}_{001} \frac{q_H}{q_Q} + \bar{\xi}_{110} \frac{q_M}{q_Q^{1/3}} \frac{R}{a} + \bar{\xi}_{101} \frac{q_H}{q_Q^{1/3}} \frac{R}{a} + \dots \right),$$

$$(4.1) \quad \frac{z_0}{R} = \bar{\xi}_{000} q_Q^{2/3} + \bar{\xi}_{100} q_Q^{4/3} \frac{R}{a} + \bar{\xi}_{200} q_Q^2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \dots,$$

$$\sin \eta = \frac{a}{R} \left(\bar{\psi}_{010} \frac{q_M}{q_Q} + \bar{\psi}_{001} \frac{q_H}{q_Q} + \bar{\psi}_{110} \frac{q_M}{q_Q^{1/3}} \frac{R}{a} + \bar{\psi}_{101} \frac{q_H}{q_Q^{1/3}} \frac{R}{a} + \dots \right).$$

Uogólnione przemieszczenia w zakresie dużego momentu przedstawimy w następującej postaci, pokazującej zależności współczynników szeregów (3.12) od wielkości q_M :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{x_0}{R} &= \bar{\xi}_{010} \frac{q_Q}{q_M^{1/3}} + \bar{\xi}_{001} \frac{q_H}{q_M^{1/3}} + \bar{\xi}_{110} q_M^{1/3} q_Q \frac{R}{a} + \bar{\xi}_{101} q_M^{1/3} q_H \frac{R}{a} + \dots, \\ \frac{z_0}{R} &= \bar{\zeta}_{010} \frac{q_Q}{q_M^{1/3}} + \bar{\zeta}_{001} \frac{q_H}{q_M^{1/3}} + \bar{\zeta}_{110} q_M^{1/3} q_Q \frac{R}{a} + \bar{\zeta}_{101} q_M^{1/3} q_H \frac{R}{a} + \dots, \\ \sin \eta &= \bar{\psi}_{000} q_M^{2/3} + \bar{\psi}_{100} q_M^{4/3} \frac{R}{a} + \bar{\psi}_{200} q_M^2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \bar{\psi}_{020} \frac{q_Q^2}{q_M^{4/3}} + \\ &\quad + \bar{\psi}_{002} \frac{q_H^2}{q_M^{4/3}} + \bar{\psi}_{011} \frac{q_Q q_H}{q_M^{4/3}} + \dots \end{aligned}$$

Stałe $\bar{\xi}_{ijk}$, $\bar{\zeta}_{ijk}$, $\bar{\psi}_{ijk}$ oraz $\bar{\xi}_{ijk}$, $\bar{\zeta}_{ijk}$, $\bar{\psi}_{ijk}$ są funkcjami wymiarów łożyska i stałej c .

Porównując przytoczone wzory widzimy, że między rozważanym tu przypadkiem działania dużego momentu M , a rozważanym w pracy [3] zakresem dużej siły osiowej Q występuje zasadnicza różnica jakościowa. Przy dużej sile osiowej wpływ zmiany kąta działania jest zasadniczy:

a. W przypadku bieźni stożkowych ($a = \infty$) niemożliwe jest określenie uogólnionych przemieszczeń x_0/R i $\sin \eta$, gdyż dążą one również do nieskończoności, jedynie z_0/R dąży do wartości skończonej. Stąd wniosek, że w łożyskach o bieźniach stożkowych jeden rząd kulek nie może przenosić obciążenia złożonego, gdyż układ taki nie będzie zrównoważony. Wyjątek stanowi przypadek, gdy siła promieniowa i moment związane są zależnością [3]

$$(4.3) \quad M = -(R+h \operatorname{ctg} \alpha_0) \operatorname{tg} \alpha_0 H.$$

Dla osiągnięcia równowagi pierścien wewnętrzny musi na ogół przemieszczać się tak długo, aż obciążenie zacznie przenosić drugi rząd kulek.

b. W łożyskach o bieźniach toroidalnych jeden rząd kulek może przenosić oprócz siły osiowej i inne niewielkie obciążenia (niewielką siłę promieniową i niewielki moment), na jakie pozwoli zmiana kąta działania.

Natomiast, jak wynika z obecnej pracy, w zakresie dużego momentu wpływ zmiany kąta działania jest niewielki; niemniej jednak można ustalić pewne prawidłowości:

1) ze wzrostem parametru R/a uogólnione przemieszczenie $\sin \eta$ maleje niezależnie od znaku sił Q i H , bowiem współczynnik $\bar{\psi}_{100}$ jest ujemny;

2) dla $R/a \rightarrow 0$, czyli $a \rightarrow \infty$, wszystkie uogólnione przemieszczenia dążą do wartości skończonych, odpowiadających uogólnionym przemieszczeniom łożyska o bieźniach stożkowych.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że tak w zakresie działania dużego momentu, jak i dużej siły osiowej przemieszczenie x_0 jest mniejsze dla bieźni toroidalnych niż dla bieźni stożkowych, niemniej jednak jest z reguły różne od zera. Dlatego w obliczeniach sił działających na elementy toczne przemieszczenia tego nie powinno się pomijać.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. GIBCYŃSKA, *Obliczenie łożysk wieńcowych obciążonych jednocześnie momentem i niewielką siłą o dowolnym kierunku*, Arch. Budowy Maszyn, 3, 1967.
2. T. GIBCYŃSKA, M. ŻYCZKOWSKI, *Równania statyki dwurzędowego kulkowego łożyska wieńcowego*, Mech. Teoret. i Stos., 4, 1969.
3. T. GIBCYŃSKA, *Obliczenie sztywności łożysk wieńcowych pod obciążeniem złożonym w zakresie dużej siły osiowej*, Arch. Budowy Maszyn, 1, 1972.
4. А. М. Казанский, *Методы расчета крупно-габаритных подшипников для опорно-поворотных устройств*, Вестн. Машин, 7, 1961.
5. K. MATTHIAS, *Berechnung von Kugeldrehverbindungen*, Hebezeuge und Fördermittel, 9, 1963.
6. Я. М. Рыжик, Я. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1962.
7. M. ŻYCZKOWSKI, *Operations on generalized power series*, Z. angew. Math. Mech., 45, 4, 1965.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ЖЕСТКОСТЬ РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

В данной работе выведены приближенные формулы, определяющие жесткость двухрядного радиального подшипника (3.12) с тороидальными дорожками, с углом воздействия, изменяющимся в пределах $0 < \alpha < 90^\circ$. Предполагается, что подшипник нагружен плоской системой сил при больших моментах M и малых осевых и радиальных усилиях, Q и H .

В полученных соотношениях (3.12) параметр R/a учитывает изменение угла воздействия в результате деформирования шариков и дорожки. В случае, когда $a = \infty$, формулы (3.12) сводятся к зависимости, описывающей жесткость подшипника с коническими дорожками.

На основе выведенной зависимости (4.2) и результатов работы [3] [см. формулы (4.1)] определено влияние изменения угла воздействия, вызванного деформированием шариков и дорожки, на жесткость подшипника.

Исследуемое влияние имеет существенное значение в случае действия на подшипник сложной нагрузки, когда осевое усилие является большим, и нагрузку воспринимает лишь один ряд шариков (4.1). Если в этом случае не учитывать изменения угла воздействия (то есть принять, что $a = \infty$, что соответствует коническим подшипникам), то нельзя будет определить перемещения $R \sin \eta$ и x_0 , которые при $a \rightarrow \infty$ тоже стремятся к бесконечности.

Отсюда следует вывод, что в подшипниках с коническими дорожками один ряд шариков не может воспринимать сложной нагрузки, так как такая система оказалась бы неуравновешенной. Исключением является случай, когда нагрузка состоит из осевого и радиального усилий и момента, причем радиальное усилие и момент связаны соотношением (4.3). Зато в области больших моментов влияние изменения угла воздействия является, как следует из данной работы, небольшим. Тем не менее можно найти некоторые закономерности для этого влияния, а именно:

а) при увеличении параметра R/a обобщенное перемещение $\sin \eta$ уменьшается, независимо от знака усилий Q и H , так как коэффициент ψ_{100} отрицателен;

б) при $R/a \rightarrow 0$, то есть для $a \rightarrow \infty$, все обобщенные перемещения стремятся к конечным значениям, соответствующим обобщенным перемещениям подшипника с коническими дорожками.

SUMMARY

INFLUENCE OF THE CONTACT ANGLE CHANGES ON THE STIFFNESS
OF A COLLAR BEARING UNDER COMBINED LOADS

The paper presents approximate formulae for the stiffness of a double-row collar bearing (3.12) with toroidal raceways and contact angles $0 < \alpha < 90^\circ$, loaded by a plane system of forces, in the case of large moments M and small forces Q, H — axial and radial. In the relations derived (3.12), the parameter R/a takes into account the changes of the contact angle resulting from the deformations of both the balls and the raceway. When $a = \infty$, Eqs. (3.12) reduce to the formulae determining the stiffness of bearings with conical raceways. On the basis of Eqs. (4.2) and the results of [3] — Eqs. (4.1) — the influence of the contact angle changes on the bearing stiffness due to the deformation of balls and the bearing is determined.

This influence is considerable in the case when the bearing is subjected to a combined load with a great axial force component, and the load is transmitted by a single row of balls, Eq. (4.1). Disregarding of the contact angle change makes it impossible to determine the displacements $R \sin \eta$ and x_0 , which at $a \rightarrow \infty$ (conical raceways) also tend to infinity. Thus it follows that in bearings with conical raceways, a single row of balls cannot transmit a combined load since such a system would not be in equilibrium. The only exception is represented by a load consisting of an axial force, a radial force and a moment, when the both forces are related by Eq. (4.3). On the other hand, it follows from the present paper that, for large moments, the influence of contact angle change is rather small; certain rules may be, however, established, namely: (a) With increasing ratio R/a , the generalized displacement $\sin \eta$ decreases independently of the sign of forces Q and H , since the coefficient ψ_{100} is negative. (b) For $R/a \rightarrow 0$, that is for $a \rightarrow \infty$, all the generalized displacements tend to finite values corresponding to the generalized displacements of the bearing with conical raceways.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 maja 1972 r.