

PLYTY PLASTYCZNE POD DZIAŁANIEM SIŁ SKUPIONYCH

JOANNA SOKÓŁ-SUPEL (WARSZAWA)

1. WPROWADZENIE

Nieliniowość układu równań różniczkowych cząstkowych, opisujących zginanie płyt sztywno-plastycznych powoduje, że uzyskanie rozwiązania zagadnienia brzegowego nie jest łatwe. Dlatego też dotychczas głównie poświęcono uwagę metodom przybliżonym, pozwalającym na podstawie dwu zasadniczych twierdzeń nośności granicznej na oszacowanie wielkości obciążenia granicznego. Szczególną popularność uzyskała metoda linii załomów [6, 8, 13 i 14]. Pozwala ona na oszacowanie nośności granicznej od góry, lecz nie daje żadnej bezpośredniej informacji o polu sił wewnętrznych w częściach sztywnych.

Rozwiązania zupełne, tzn. rozwiązania zagadnień brzegowych dla układu równań opisujących zginanie płyt plastycznych, znane są zaledwie dla kilku szczególnych przypadków. Istnieje więc potrzeba znalezienia metody otrzymywania rozwiązań zupełnych lub przynajmniej nietrywialnej metody wyznaczania statycznie dopuszczalnych rozkładów sił wewnętrznych oraz oszacowania obciążenia granicznego od dołu.

W niniejszej pracy przedstawimy całość zagadnień zginania płyt spełniających warunek plastyczności JOHANSENSA. Wyprowadzimy zasady, którym podlegają pola sił i odkształceń w stanie wyczerpania nośności płyty. Na przykładach pokażemy, jak w oparciu o te zasady można budować rozwiązania zupełne. Po przedstawieniu układu równań różniczkowych cząstkowych, opisujących problem, przeprowadzimy dyskusję typów równań odpowiadających rozpatrywanemu warunkowi plastyczności. Okazuje się, że typ układu równań zginania płyt zależy tylko od warunku plastyczności [3]. I tak dla warunku plastyczności nieliniowego względem momentów głównych równania są zawsze typu eliptycznego. Dla liniowych warunków wystąpić mogą wszystkie trzy typy: eliptyczny, paraboliczny i hiperboliczny. Konsekwencje tego stwierdzenia stanowią główny przedmiot zainteresowania w tej pracy. Szczególną uwagę zwracać będziemy na brzegowe warunki podparcia, a więc na określenie, jakiego typu równania opisują stan naprężeń, występujący wzdłuż brzegu.

Odrębną grupę zagadnień stanowią nieciągłości. Przeprowadzimy więc dyskusję dopuszczalnych nieciągłości statycznych i kinematycznych i ustalimy zasady budowania nieciągłych pól momentów w płytach. Przy wykorzystaniu zaproponowanej metody uzyskano szereg nowych rozwiązań. Przedstawiona metoda umożliwia również uzyskiwanie rozwiązań statycznie dopuszczalnych. Pozwala to uzupełnić znane rozwiązania kinematyczne oszacowaniami nośności granicznej od dołu.

2. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Rozpatrzmy izotropową idealnie sztywno-plastyczną płytę cienką, podlegającą warunkowi plastyczności największych momentów głównych i stowarzyszonemu prawu płynięcia.

Niech H i L oznaczają odpowiednio grubość płyty i długość odniesienia w płaszczyźnie płyty. Niech M_0 oznacza moment graniczny na jednostkę długości. Bezwymiarowe współrzędne (x, y) , siły wewnętrzne q_i, m_{ij} , prędkość ugięcia \dot{w} , prędkości zmian krzywizny $\dot{\kappa}_{ij}$ i zewnętrzne obciążenie skupione p definiujemy następująco:

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L},$$

$$(2.1) \quad q_x = \frac{LQ_x}{M_0}, \quad q_y = \frac{LQ_y}{M_0}, \quad m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_0}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_0},$$

$$\dot{w} = \frac{W}{H}, \quad \dot{\kappa}_x = \frac{L^2 \dot{K}_x}{H}, \quad \dot{\kappa}_y = \frac{L^2 \dot{K}_y}{H}, \quad \dot{\kappa}_{xy} = \frac{L^2 \dot{K}_{xy}}{H}, \quad p = \frac{P}{M_0},$$

gdzie duże litery oznaczają odpowiednie wielkości mające wymiar.

Układ równań opisujących plastyczne zginanie płyty stanowią równania równowagi, związki kinematyczne, warunek plastyczności oraz prawo płynięcia. Dla przypadku płyt obciążonych siłami skupionymi, które są przedmiotem analizy w niniejszej pracy, równania równowagi mają postać

$$(2.2) \quad m_{x,x} + m_{xy,y} = q_x, \quad m_{xy,x} + m_{y,y} = q_y, \quad q_{x,x} + q_{y,y} = 0.$$

Prędkości zmian krzywizny powierzchni środkowej zdefiniowane są następująco:

$$(2.3) \quad \dot{\kappa}_x = -\dot{w}_{,xx}, \quad \dot{\kappa}_y = -\dot{w}_{,yy}, \quad \dot{\kappa}_{xy} = -2\dot{w}_{,xy},$$

a warunek plastyczności największych momentów głównych

$$(2.4) \quad f_{1,2} = m_{xy}^2 - m_x m_y \pm m_x \pm m_y - 1 = 0$$

dla $0 \leq |m_x + m_y| \leq 2$ przedstawia w przestrzeni momentów m_x, m_y, m_{xy} powierzchnię składającą się z dwóch współosiowych, przecinających się stożków. Układ równań uzupełnia stowarzyszone prawo płynięcia

$$(2.5) \quad \dot{\kappa}_x = \mu \frac{\partial f}{\partial m_x}, \quad \dot{\kappa}_y = \mu \frac{\partial f}{\partial m_y}, \quad \dot{\kappa}_{xy} = \mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}}, \quad \mu \geq 0.$$

W przypadku regularnych części powierzchni plastyczności, tzn. takich, dla których w każdym punkcie składowe wektora normalnego do powierzchni są jednoznacznie określone problem nośności granicznej płyty opisuje dziesięć równań z dziesięcioma niewiadomymi $m_{ij}, q_i, \dot{\kappa}_{ij}, \dot{w}, \mu$ ($i, j = 1, 2$).

Dla punktów osobliwych, gdy mechanizm zniszczenia nie jest jednoznacznie określony, wraz z większą liczbą równań powierzchni plastyczności, wzrasta liczba niewiadomych mnożników skalarnych μ , tak że w rezultacie liczba równań nadal odpowiada liczbie niewiadomych.

Dla kompletności wykładu przeprowadzimy analizę układu równań (2.2) – (2.5) podobnie jak to zrobił HODGE dla dowolnego warunku plastyczności.

2.1. *Paraboliczne punkty powierzchni plastyczności*

Zajmiemy się najpierw stanami naprężeń i odkształceń odpowiadającymi regularnym punktom powierzchni (2.4), tzn. powierzchniom stożków. Mamy do dyspozycji układ (2.2) – (2.5), złożony z dziewięciu równań różniczkowych i jednego algebraicznego.

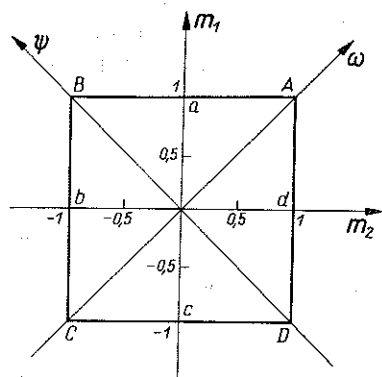
Będziemy dążyć do takiego uproszczenia tego układu, aby analizując jego równania można było wyciągnąć wnioski odnośnie do pól naprężeń i prędkości odkształceń w płycie. W tym celu wyrazimy stan naprężeń i warunek plastyczności w zależności od dwóch następujących niezmienników tensora momentów:

$$(2.6) \quad \omega = \frac{m_1 + m_2}{2}, \quad \psi = \frac{m_2 - m_1}{2},$$

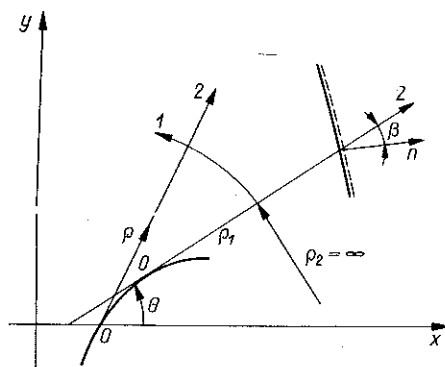
gdzie m_1, m_2 oznaczają momenty główne. Warunek plastyczności można wówczas przedstawić w postaci

$$(2.7) \quad f = \psi \pm \omega \pm 1.$$

Warunek ten przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1



Rys. 2

Bez utraty ogólności ograniczymy analizę tylko do stanów odpowiadających bokowi AD kwadratu plastyczności, tzn. gdy

$$(2.8) \quad f = \psi - \omega + 1.$$

Momenty główne i niezmienniki ω i ψ przyjmują wtedy następujące wartości:

$$(2.9) \quad m_1 = 1, \quad -1 \leq m_2 \leq 1, \quad \omega = \frac{1 + m_2}{2}, \quad \psi = \frac{m_2 - 1}{2}.$$

Aby pozbyć się równania algebraicznego (2.4) zastosujemy następujące podstawienie:

$$(2.10) \quad m_x = \omega + \psi \cos 2\theta, \quad m_y = \omega - \psi \cos 2\theta, \quad m_{xy} = \psi \sin 2\theta,$$

gdzie θ jest kątem, jaki tworzy oś x z dodatnim kierunkiem trajektorii momentu m_2 (rys. 2).

Aby spełnić tożsamościowo trzecie równanie równowagi (2.2), wprowadzamy potencjał sił poprzecznych Φ :

$$(2.11) \quad q_x = \Phi_{,y}, \quad q_y = -\Phi_{,x}.$$

Podstawienie wyrażeń (2.10) do pierwszych równań równowagi pozwala na wyeliminowanie równania algebraicznego. W wyniku tych operacji otrzymamy dwa następujące równania opisujące stan równowagi płyty:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \omega_{,x}(1 - \cos 2\theta) - 2\psi\theta_{,x} \sin 2\theta + \omega_{,y} \sin 2\theta + 2\psi\theta_{,y} \cos 2\theta &= \Phi_{,y}, \\ \omega_{,x} \sin 2\theta + 2\psi\theta_{,x} \cos 2\theta + \omega_{,y}(1 - \cos 2\theta) + 2\psi\theta_{,y} \sin 2\theta &= -\Phi_{,x}. \end{aligned}$$

Są to dwa quasi-liniowe równania różniczkowe cząstkowe dla trzech niewiadomych funkcji w , θ , Φ . Układ ten nie może być rozwiązany bez uzupełnienia go równaniami kinematycznymi.

Przeanalizujemy teraz związki (2.3) i (2.5) opisujące kinematykę płyty. W tym celu przyrównajmy (2.3) do (2.5); wykorzystując (2.8) i (2.10), otrzymamy

$$(2.13) \quad 2\dot{w}_{,xx} = \mu(1 - \cos 2\theta), \quad 2\dot{w}_{,yy} = \mu(1 + \cos 2\theta), \quad 2\dot{w}_{,xy} = -\mu \sin 2\theta.$$

Są to trzy równania różniczkowe z trzema niewiadomymi w , θ , μ . Stąd wniosek, że kinematykę płyty możemy rozważać niezależnie od równań statyki.

Zbadajmy, jakiego rodzaju powierzchnię opisują równania (2.13). Ponieważ wyznacznik drugiej formy podstawowej przyjmuje wartość zera

$$(2.14) \quad \dot{w}_{,xx} \dot{w}_{,yy} - \dot{w}_{,xy}^2 = 0,$$

przeto powierzchnia ugięcia opisana przez (2.13) jest powierzchnią rozwijalną. Odnosząc równania (2.13) do układu stycznego do trajektorii momentów głównych ρ , θ otrzymujemy związki

$$(2.15) \quad \dot{w}_{,\rho\rho} = 0, \quad \dot{w}_{,\theta\theta} = 0 \Rightarrow \dot{w} = a(\theta)\rho + b(\theta),$$

które oznaczają, że kierunki krzywizn głównych pokrywają się z kierunkami momentów głównych, a prędkość ugięcia zmienia się liniowo względem ρ wzdłuż trajektorii momentu $m_2 = m_\rho$. Symbole $a(\theta)$ i $b(\theta)$ w równaniach (2.15) oznaczają funkcje, które wyznacza się z warunków brzegowych konkretnego zadania. Prędkości zmian krzywizny przyjmują odpowiednio wartości:

$$(2.16) \quad \dot{\kappa}_1 = \dot{\kappa}_\theta = +\mu, \quad \dot{\kappa}_2 = \dot{\kappa}_\rho = 0, \quad \dot{\kappa}_{\rho\theta} = 0.$$

Powyżej przeprowadziliśmy analizę powierzchni ugięcia. Dlatego możemy wyeliminować ugięcie w z równań (2.13) i rozpatrywać układ dwóch równań. Przyrównując trzecie pochodne mieszane $\dot{w}_{,xxy} = \dot{w}_{,xyx}$ i $\dot{w}_{,yyx} = \dot{w}_{,xyy}$ otrzymujemy

$$(2.17) \quad \begin{aligned} -\theta_{,x} 2\sin 2\theta + A_{,x}(1 + \cos 2\theta) + 2\theta_{,y} \cos 2\theta + A_{,y} \sin 2\theta &= 0, \\ 2\theta_{,x} \cos 2\theta + A_{,x} \sin 2\theta + 2\theta_{,y} \sin 2\theta + A_{,y}(1 - \cos 2\theta) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $A = \ln \mu$.

Tymi równaniami uzupełniamy układ równań (2.12).

Równania (2.12) i (2.17) stanowią układ czterech quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu z czterema niewiadomymi funkcjami ω , θ , Φ i A . Dla jasności wykładu i dalszej dyskusji przytoczymy analizę równań tego układu. Aby poprawnie postawić zadanie brzegowe dla układu równań różniczkowych, trzeba znać jego typ. W tym celu obliczymy wyznacznik charakterystyczny równań (2.12), (2.17) odniesionych dla uproszczenia do trajektorii momentów głównych. Otrzymujemy

$$(2.18) \quad \begin{vmatrix} -2\lambda & 2\psi & -1 & 0 \\ 0 & -2\psi\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^4,$$

gdzie $\lambda = dy/dx$, $\psi = \omega - 1$.

Równanie charakterystyczne $\lambda^4 = 0$ wskazuje na to, że układ (2.12), (2.17) jest typu parabolicznego o poczwórnej charakterystyce; kierunek charakterystyczny jest następujący:

$$(2.19) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta.$$

Zatem charakterystyki układu są zarazem trajektoriami momentu głównego i krzywizny głównej.

Po odpowiednich przekształceniach układ (2.12), (2.17) można sprowadzić do następującej postaci:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \theta_{,x} \cos \theta + \theta_{,y} \sin \theta &= 0, \\ A_{,x} \cos^2 \theta + A_{,y} \sin \theta \cos \theta &= -\theta_{,y}, \\ 2\omega_{,x} \cos^2 \theta + 2\omega_{,y} \sin \theta \cos \theta + \Phi_{,y} &= C_1, \\ 2\omega_{,x} \sin \theta \cos \theta + 2\omega_{,y} \sin^2 \theta + \Phi_{,x} &= C_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.21) \quad \begin{aligned} C_1 &= 2\psi\theta_{,x} \sin 2\theta - 2\psi\theta_{,y} \cos 2\theta, \\ C_2 &= -2\psi\theta_{,x} \cos 2\theta - 2\psi\theta_{,y} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Z pierwszego z równań (2.20) wynika, że $d\theta = 0$ wzdłuż charakterystyki, co oznacza, że charakterystyki tworzą rodzinę prostych o równaniu

$$(2.22) \quad g(x, y, \theta) = y \cos \theta - x \sin \theta - C(\theta) = 0,$$

gdzie $C(\theta)$ jest dowolną funkcją θ . Jest to rodzina prostych, tworzących powierzchnię rozwijalną. Aby scałkować trzy pozostałe równania, określimy ich prawe strony, tzn. pochodne cząstkowe funkcji θ . Do tego celu wykorzystamy równanie prostych (2.22) i ich obwiednię. Wówczas

$$(2.23) \quad \theta_{,x} = -\frac{\sin \theta}{g_{,\theta}}, \quad \theta_{,y} = \frac{\cos \theta}{g_{,\theta}},$$

gdzie $g_{,\theta}(x, y, \theta) = -y \sin \theta - x \cos \theta - C'(\theta)$ i dla punktów obwiedni rodziny prostych (2.22) $g_{,\theta}(x, y, \theta) = 0$.

Wzdłuż charakterystyk (2.22) zachodzą następujące związki:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} d\theta &= 0, & dA &= -dx/g_{,\theta} \cos \theta, \\ d\Phi &= 0, & d\omega &= (C_1 + \Phi_{,y}) dx/2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Ponieważ wiemy, że trajektorie momentu głównego m_2 pokrywają się z charakterystykami układu (2.24) oraz przyjęliśmy moment główny m_2 za znany, przeto wygodnie jest wyrazić całki układu (2.24) we współrzędnych pokrywających się z trajektoriami momentów głównych $m_1 = m_\theta$ i $m_2 = m_\rho$. W tym celu przyjmiemy, że początek nowego układu współrzędnych ρ, θ leży na obwiedni rodziny trajektorii prostych. Niech prosta trajektoria ρ , wychodząca z tego punktu, pokrywa się z osią x , tzn. $\theta = 0$. Przy oznaczeniach $x = \rho$, $dx = d\rho$, $dy = \rho d\theta$ pochodne potencjału siły poprzecznej w nowym układzie wynoszą

$$(2.25) \quad \Phi_{,\rho} = \Phi_{,x}, \quad \Phi_{,\theta} = \rho \Phi_{,y}.$$

Z trzeciego równania z (2.24) wynika, że potencjał siły poprzecznej

$$(2.26) \quad \Phi = A(\theta),$$

gdzie $A(\theta)$ jest dowolną funkcją θ .

Ze wzorów (2.11) otrzymujemy rozkład sił poprzecznych wzdłuż kierunków głównych:

$$(2.27) \quad q_\theta = -\Phi_{,\rho} = 0, \quad q_\rho = \frac{A'(\theta)}{\rho}.$$

Aby otrzymać składowe momentów, całkujemy ostatnie z równań (2.24). Najpierw, wykorzystując związki (2.7), (2.21), (2.23), (2.25) i (2.27), sprowadzamy je do postaci

$$(2.28) \quad 2\rho \frac{d\omega}{d\rho} + 2\omega = A'(\theta) + 2,$$

a po scałkowaniu (2.28) otrzymujemy

$$(2.29) \quad 2\omega = A'(\theta) + 2 + \frac{B(\theta)}{\rho}.$$

Stąd dla rozpatrywanego stanu sił (2.9) $\omega = (1 + m_\rho)/2$ łatwo otrzymać rozkład momentów głównych:

$$(2.30) \quad m_\theta = 1, \quad m_\rho = 1 + A'(\theta) + \frac{B(\theta)}{\rho}.$$

Funkcje A i B wyznaczamy z warunków brzegowych. Wzory (2.27) i (2.30) określają pole sił wewnętrznych odwzorowane na boku AD warunku plastyczności. Dla pozostałych boków pole to określa się analogicznie.

Aby otrzymać nośność graniczną obszaru o rozkładzie sił wg (2.27), (2.30), należy scałkować równanie (2.27) określające siłę poprzeczną w tym obszarze — wzdłuż krzywoliniowej trajektorii momentu m_θ :

$$(2.31) \quad p = \int_0^s (-q_\rho) ds_\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(-\frac{A'(\theta)}{\rho_\theta} \right) \rho_\theta d\theta = A(\theta_1) - A(\theta_2).$$

2.2. Osobliwe punkty powierzchni plastyczności

Rozpatrzmy teraz stany odpowiadające nieregularnym punktom powierzchni plastyczności (2.4), tzn. wierzchołkom stożków i krawędzi przecięcia się tych stożków. Na przekroju powierzchni plastyczności (2.4) płaszczyzną $m_{xy} = 0$ (rys. 1) wierzchołkom odpowiadają naroża A i C . Krawędzi przecięcia stożków odpowiadają punkty B i D . W punktach tych $\psi = \psi_0$ i $\omega = \omega_0$ są ustalone. Wobec tego równania równowagi (2.12) przyjmują następującą postać:

$$(2.32) \quad \begin{aligned} -2\psi_0 \theta_{,x} \sin 2\theta + 2\psi_0 \theta_{,y} \cos 2\theta - \Phi_{,y} &= 0, \\ 2\psi_0 \theta_{,x} \cos 2\theta + 2\psi_0 \theta_{,y} \sin 2\theta + \Phi_{,x} &= 0. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku zagadnienia statyki można rozważać niezależnie od kinematyki. Typ układu (2.32) określa wyznacznik charakterystyczny

$$(2.33) \quad 2\psi_0 \begin{vmatrix} \cos 2\theta + \lambda \sin 2\theta & 1 \\ \sin 2\theta - \lambda \cos 2\theta & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Zachodzą dwa następujące przypadki:

Przypadek izotropowego zginania, jeśli $\psi_0 = 0$ (punkty A i C na rys. 1). Kierunki charakterystyk są wtedy nieokreślone. Stan momentów opisany jest przez równania

$$(2.34) \quad m_x = m_y = \pm 1, \quad m_{xy} = 0,$$

a równania równowagi (2.2) wskazują, że

$$(2.35) \quad q_x = q_y = 0.$$

Stąd wniosek, że obszary izotropowe poddane są czystemu zginaniu i nie wpływają na nośność konstrukcji. Pole prędkości zmiany krzywizny ma wówczas następujące składowe:

$$(2.36) \quad \dot{\kappa}_1 = \mu_1, \quad \dot{\kappa}_2 = \mu_2.$$

W drugim przypadku, jeśli $\psi_0 \neq 0$ (punkty B i D na rys. 1), układ (2.33) jest zawsze hiperboliczny o kierunkach charakterystycznych

$$(2.37) \quad \lambda_1 = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta, \quad \lambda_2 = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \theta,$$

tzn. że są to także kierunki trajektorii momentów głównych. Ponieważ dla $\psi_0 \neq 0$, $\omega = 0$, przeto

$$(2.38) \quad m_1 = -m_2 = \pm 1.$$

Równania (2.32) odniesione do układu charakterystyk określają zmianę sił poprzecznych wzdłuż trajektorii momentów głównych następująco:

$$(2.39) \quad q_1 = \pm \frac{2}{\rho_2}, \quad q_2 = \mp \frac{2}{\rho_1},$$

gdzie ρ_1, ρ_2 są odpowiednio promieniami krzywizn trajektorii m_1, m_2 .

Nośność graniczna obszaru hiperbolicznego jest określona przez całkę krzywoliniową

$$(2.40) \quad p = \int_0^s (-q_2) ds_1 = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = 2(\theta_2 - \theta_1).$$

Warto zauważyć, że obciążenie graniczne nie zależy od faktycznego kształtu siatki charakterystyk.

Wróćmy do równań (2.32). Przyporządkujmy

$$(2.41) \quad \psi_0 \leftrightarrow k, \quad \Phi \leftrightarrow p, \quad \theta \leftrightarrow \varphi,$$

gdzie k jest granicznym naprężeniem ścinającym, p ciśnieniem hydrostatycznym, a $\theta = \varphi$. Okazuje się, że równania (2.32) mają postać identyczną z równaniami opisującymi stan naprężeń w płaskim stanie odkształceń. Dla $\omega = 0$ ze wzorów transformacyjnych (2.10) wynika, że $m_x = -m_y$. Stosując dalej transformację

$$(2.42) \quad -m_x = m_y \leftrightarrow \tau_{xy}, \quad m_{xy} \leftrightarrow \sigma_x = -\sigma_y, \quad \Phi \leftrightarrow p,$$

gdzie $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ są składowymi tensora naprężeń, możemy stan momentów w płycie interpretować jako stan naprężeń w płaskim stanie odkształcenia.

Na analogię tę pierwsi zwrócili uwagę ESTRIN [2] i NIELSEN [10], a ostatnio rozważał ją COLLINS [1]. Jej znajomość pozwala na wykorzystanie wielu rozwiązań zagadnień brzegowych płaskiego płynięcia w teorii zginanych płyt plastycznych. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że rozwiązania otrzymane przy zastosowaniu tej analogii dotyczą płyt obciążonych układami sił skupionych, parami przeciwnie skierowanych i dlatego nie mają większego znaczenia praktycznego.

Przejdźmy do opisu kinematyki dla stanów odpowiadających krawędzi przecięcia stożków plastyczności. Stowarzyszone prawo płynięcia przyjmuje wówczas postać

$$(2.43) \quad \dot{\kappa}_{ij} = \mu_1 \frac{\partial f_1}{\partial m_{ij}} + \mu_2 \frac{\partial f_2}{\partial m_{ij}}, \quad i, j = x, y.$$

Wykorzystując (2.13) i (2.43) otrzymujemy trzy równania określające wielkości kinematyczne:

$$(2.44) \quad \begin{aligned} 2\dot{w}_{,xx} &= \mu_1 (1 - \cos 2\theta) + \mu_2 (-1 - \cos 2\theta), \\ 2\dot{w}_{,yy} &= \mu_2 (1 + \cos 2\theta) + \mu_1 (-1 + \cos 2\theta), \\ 2\dot{w}_{,xy} &= -(\mu_1 + \mu_2) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Wyeliminowanie czynników μ_1 i μ_2 daje równanie różniczkowe drugiego rzędu dla prędkości ugięć:

$$(2.45) \quad \dot{w}_{,xx} - 2\dot{w}_{,xy} \operatorname{ctg} 2\theta - \dot{w}_{,yy} = 0.$$

Łatwo wykazać, że równanie to jest hiperboliczne o charakterystykach (2.37).

Odnosząc (2.44) do układu współrzędnych ρ, θ , pokrywających się z trajektoriami momentów głównych, otrzymujemy prędkości zmian krzywizn głównych:

$$(2.46) \quad \dot{\kappa}_\theta = \dot{\kappa}_1 = +\mu_1, \quad \dot{\kappa}_\rho = \dot{\kappa}_2 = -\mu_2, \quad \dot{\kappa}_{\rho\theta} = 0.$$

Stąd wniosek, że trajektorie momentów głównych i krzywizn pokrywają się także dla punktów nieregularnych powierzchni plastyczności.

3. WARUNKI BRZEGOWE

Aby prawidłowo postawić problem brzegowy, trzeba znać typ równań opisujących zginanie w strefie przylegającej do brzegu. Warunki brzegowe dla płyt podlegających warunkowi plastyczności Treski były szczegółowo badane przez SCHUMANNA [17]. Dla warunku kwadratowego i dla brzegu swobodnie podpartego podane były w pracach [15, 9]. Dla kompletności wykładu przytoczymy krótko dyskusję warunków brzegowych dla najczęściej spotykanych sposobów podparć płyt. Założmy bez zmniejszenia ogólności, że w strefie plastycznej przylegającej do brzegu moment główny $m_1 = 1$, a drugi moment główny zmienia się w przedziale $|m_2| \leq 1$. Siły wewnętrzne na brzegu wyrażone przez ich wartości główne mają wtedy postać

$$(3.1) \quad \begin{aligned} m_n &= m_1 \sin^2 \beta + m_2 \cos^2 \beta = \sin^2 \beta + m_2 \cos^2 \beta, \\ m_{ns} &= (m_2 - m_1) \sin \beta \cos \beta = (m_2 - 1) \sin \beta \cos \beta, \\ q_n &= q_1 \sin \beta + q_2 \cos \beta, \end{aligned}$$

gdzie β jest kątem, jaki trajektoria drugiego momentu głównego tworzy z zewnętrzną normalną do brzegu n (rys. 2).

1. *Brzeg swobodnie podparty.* Brzeg swobodnie podparty nakłada następujące warunki na ugięcie i składową normalną momentu:

$$(3.2) \quad m_n = 0, \quad \dot{w} = 0.$$

Aby spełnione było pierwsze wymaganie (3.2) przy uwzględnieniu (3.1), momenty główne muszą mieć różne znaki. A zatem brzeg swobodnie podparty nie może leżeć w obszarze izotropowym. Jeśli założyć, że rozważany brzeg znajduje się w strefie parabolicznej, to z (3.1) i z warunku znikania momentu normalnego otrzymujemy wzdłuż brzegu

$$(3.3) \quad m_2 = -\operatorname{tg}^2 \beta, \quad \text{dla } |\beta| \leq \frac{\pi}{4}.$$

W szczególnym przypadku, gdy kąt $\beta = 0$, brzeg jest trajektorią momentu m_1 . Dla $|\beta| = \pi/4$ brzeg swobodnie podparty przechodzi do strefy hiperbolicznej. Stany dla $|\beta| > \pi/4$ są niedopuszczalne ze względu na warunek $|m_2| \leq 1$.

2. *Brzeg wolny.* Na brzegu wolnym spełnione być muszą następujące dwa warunki:

$$(3.4) \quad m_n = 0, \quad q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = 0.$$

Z warunku znikania momentu normalnego, analogicznie do przypadku brzegu swobodnie podpartego, wynika, że strefa izotropowa nie może przylegać do brzegu wolnego. Jeżeli założyć, że brzeg należy do strefy parabolicznej, to z (3.4) i (3.1) otrzymujemy następujące wzory dla wielkości sił głównych wzdłuż brzegu:

$$(3.5) \quad m_2 = -\operatorname{tg}^2 \beta, \quad q_2 = \frac{1}{\cos^3 \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s}, \quad |\beta| < \frac{\pi}{4}.$$

Jeżeli $|\beta| = \pi/4$, to brzeg wolny przechodzi do strefy hiperbolicznej; wtedy na brzegu

$$(3.6) \quad m_{ns} = -1, \quad q_1 = -q_2,$$

a to oznacza, że promienie krzywizn charakterystyk obu rodzin są sobie równe: $\rho_1 = \rho_2$.

3. *Brzeg utwierdzony.* Na brzegu utwierdzonym wymagane jest spełnienie następujących warunków

$$(3.7) \quad \dot{w} = 0, \quad \dot{w}_{,ss} = 0.$$

Krzywizna normalna zgodnie z prawem (2.5) wynosi

$$(3.8) \quad \dot{\kappa}_n = -\dot{w}_{,nn} = \mu \frac{\partial f}{\partial m_n}.$$

Całkując (3.8) i przechodząc do granicy otrzymujemy na brzegu

$$(3.9) \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial n} = -\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \int \mu \frac{\partial f}{\partial m_n} dn = \begin{cases} 0, & \mu < \infty, \\ \text{nieciągłość}, & \mu \rightarrow \infty, \end{cases}$$

Zarówno w pierwszym jak i w drugim przypadku, tzn. gdy brzeg jest linią przegubów plastycznych, jest spełniony warunek

$$(3.10) \quad \frac{\partial \dot{w}}{\partial n \partial s} = 0.$$

Stąd wniosek, że brzeg utwierdzony jest trajektorią krzywizny głównej, a zatem także momentu głównego:

$$(3.11) \quad m_{ns} = 0.$$

Aby zastąpić warunki kinematyczne (3.7) warunkami statycznymi, przyjmijmy, że brzeg leży w strefie hiperbolicznej; wówczas

$$(3.12) \quad m_n + m_s = 0, \quad m_{ns} = 1 - m_n^2.$$

Pierwszy ze związków (3.12) jest niezmiennikiem tensora momentów, drugi wynika z pierwszego i z warunku plastyczności (2.4). Korzystając z (3.11) i (3.12) obliczamy składowe tensora momentu wzdłuż brzegu utwierdzonego:

$$(3.13) \quad m_n = \pm 1, \quad m_s = \pm 1, \quad m_{ns} = 0.$$

Ostatecznie, jeśli brzeg utwierdzony leży w strefie hiperbolicznej, to jest trajektorią jednego z momentów głównych. Ponadto, jeśli wzdłuż brzegu nie tworzy się linia przegubów plastycznych, to brzeg nie odkształca się plastycznie. Z założenia, że brzeg leży w polu parabolicznym, nie otrzymujemy statycznych warunków brzegowych.

4. NIECIĄGŁOŚCI

Jak wykazano w poprzednich punktach równania zginania płyt podlegających warunkowi plastyczności (2.4) są paraboliczne lub hiperboliczne. Zatem wzdłuż charakterystyk tych równań można łączyć analitycznie różne rozwiązania. Okazuje się, że poza nieciągłościami pochodnych rozwiązania (słabe nieciągłości), równania zginania płyt dopuszczają istnienie rozwiązań, w których wzdłuż pewnych linii doznają skoku same funkcje poszukiwane, tzn. są nieciągłe składowe pola sił i prędkości odkształceń (silne nieciągłości). Badaniem nieciągłości dla warunku Treski zajmował się HOPKINS [5]. Dla warunku (2.4) nieciągłości sił wewnętrznych poprzez proste charakterystyki zostały określone w [15]. Aby zebrać całość zagadnień dotyczących dopuszczalnych nieciągłości przytoczmy tu wzory wyprowadzone w [15] oraz określimy nieciągłości składowych pola oskształceń i zbadamy warunki nieciągłości na linii nie będącej charakterystyką.

Niech Γ oznacza linię nieciągłości, wzdłuż której stykają się dwa obszary G^+ i G^- . Nieciągłość pewnej wielkości na linii Γ określamy następująco:

$$(4.1) \quad [F] = F^+ - F^-.$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy Γ jest charakterystyką pokrywającą się z trajektorią momentu m_2 i trajektorią krzywizny $\dot{\kappa}_2$. Ponieważ moment normalny m_n , siła poprzeczna q_n oraz składowa prędkości zmiany krzywizny $\dot{\kappa}_s$ muszą być ciągłe na linii nieciągłości, to nieciągłe mogą być tylko składowe sił $m_s = m_2$, $q_s = q_2$ i składowa prędkości odkształceń $\dot{\kappa}_n = \dot{\kappa}_1$.

Korzystając ze wzorów (2.27), (2.30), (2.34), (2.35), (2.38), (2.39) na siły wewnętrzne i ze wzorów (2.16), (2.36), (2.46) określających składowe tensora zmian krzywizny w poszczególnych strefach, można wyznaczyć wielkości dopuszczalnych silnych nieciągłości na charakterystykach.

W przypadku stykania się stref parabolicznych o różnych rozwiązaniach analitycznych dopuszczalne skoki wynoszą:

$$(4.2) \quad [m_2] = [A'(\theta)] + \frac{1}{\rho} [B(\theta)], \quad [q_2] = \frac{1}{\rho} [A'], \quad [\dot{\kappa}_1] = [\mu].$$

Na linii łączącej obszary paraboliczny z izotropowym mogą wystąpić następujące nieciągłości:

$$(4.3) \quad [m_2] = -A' - \frac{B}{\rho}, \quad [q_2] = -\frac{1}{\rho} A', \quad [\dot{\kappa}_1] = \mu^i - \mu^p,$$

gdzie funkcje A i B określone są przez rozwiązanie dotyczące obszaru parabolicznego.

Nieciągłości na granicy obszaru parabolicznego i hiperbolicznego wynoszą

$$(4.4) \quad [m_2] = -2 - A' - \frac{B}{\rho}, \quad [q_2] = -\frac{1}{\rho}(2 + A'), \quad [\dot{\kappa}_1] = \mu^h - \mu^p.$$

Skoki na granicy obszarów izotropowego i hiperbolicznego są następujące:

$$(4.5) \quad [m_2] = -2, \quad [q_2] = -\frac{2}{\rho}, \quad [\dot{\kappa}_1] = \mu_1^h - \mu_1^i.$$

Skoki na charakterystyce łączącej dwa obszary hiperboliczne wynoszą

$$(4.6) \quad [m_2] = [q_2] = 0, \quad [\dot{\kappa}_1] = [\mu_1].$$

a więc wzdłuż charakterystyki obszaru hiperbolicznego nie mogą powstać nieciągłości sił wewnętrznych. Ze wzorów (2.34), (2.35) i (2.36) wynika, że w obszarze izotropowym nie mogą pojawić się nieciągłości składowych sił wewnętrznych i zmian krzywizny. Dla rozważanych w niniejszej pracy płyt obciążonych siłami skupionymi, $\rho = 0$ leży w obszarze płyty, zatem aby we wzorach (4.2) – (4.4) skok momentu m_2 był ograniczony, należy we wzorze (4.2) przyjąć $[B(\theta)] = 0$, a we wzorach (4.3) i (4.4) — $B(\theta) = 0$.

Nietrudno zauważyć, że charakterystyki, wzdłuż których powstają silne nieciągłości momentów, muszą być liniami prostymi.

Zbadajmy teraz, czy mogą powstać silne nieciągłości w strefie hiperbolicznej na linii nie będącej charakterystyką. Jeżeli taką linię nieciągłości będziemy traktować jako linię brzegową nieskończenie wąskiego pasma płytowego, to teoria płyt Kirchhoffa nakłada na równania sił wewnętrznych następujące warunki ciągłości:

$$(4.7) \quad [m_n] = 0, \quad \left[q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \right] = 0.$$

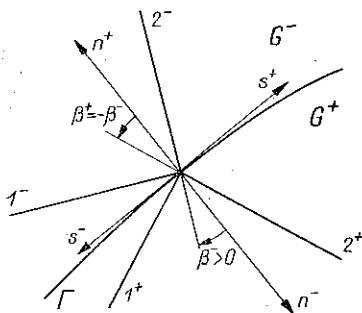
Drugi z warunków (4.7) można wyrazić, wykorzystując (2.11), następująco:

$$(4.8) \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \right] = 0 \Rightarrow [\Phi + m_{ns}] = C = \text{const.}$$

Ponieważ potencjał siły poprzecznej Φ jest określony z dokładnością do stałej, można więc przyjąć, że $C = 0$.

Aby wyprowadzić warunki geometryczne, jakie ma spełniać linia nieciągłości, założmy dla ustalenia uwagi, że po obu stronach $m_1 = -m_2 = 1$. Trajektorie momentów dochodzą do linii nieciągłości tak jak pokazano na rys. 3. Ze wzorów transformacyjnych otrzymamy składowe tensora momentów i wektora sił poprzecznych w odniesieniu do układu n, s związanego z linią Γ ; dla obszaru G^-

$$(4.9) \quad \begin{aligned} m_n^- &= -\cos 2\beta^-, & m_s^- &= \cos 2\beta^-, & m_{ns}^- &= \sin 2\beta^-, \\ q_n^- &= q_1^- \sin \beta^- + q_2^- \cos \beta^-. \end{aligned}$$



Rys. 3

Kąt β^- , liczony w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara od normalnej n do Γ do trajektorii momentu m_2 , uważamy za dodatni.

Wstawiając β^+ na miejsce β^- otrzymuje się wzory dla G^+ . Z pierwszego warunku (4.7) otrzymujemy dwa przypadki zależności β^- od β^+ :

$$(4.10) \quad \beta^- = \beta^+ + k\pi, \quad \beta^- = -\beta^+ + k\pi, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Pierwsza z nich oznacza, że nieciągłość nie pojawia się. Z drugiej wynika, że linia nieciągłości jest dwusieczną kąta pomiędzy trajektoriami tego samego znaku. Dla przypadku $k=0$ mamy

$$(4.11) \quad \beta^- = -\beta^+.$$

Z warunku ciągłości reakcji (4.7) i przy uwzględnieniu (4.9), (4.11) i (2.39) otrzymujemy równanie, które powinno być spełnione na liniach nieciągłości:

$$(4.12) \quad -\left(\frac{1}{\rho_2^-} + \frac{1}{\rho_2^+}\right) \sin \beta^- + \left(\frac{1}{\rho_1^-} - \frac{1}{\rho_1^+}\right) \cos \beta^- - 2\cos 2\beta^- \frac{\partial \beta^-}{\partial s} = 0,$$

gdzie ρ_1, ρ_2 są promieniami krzywizn trajektorii momentów głównych. Równanie to w przypadku prostoliniowych charakterystyk jest spełnione dla $\beta^- = \text{const}$, tzn. linia nieciągłości jest prostą.

Zastanówmy się teraz, czy nieciągłości kinematyczne mogą wystąpić na linii nieciągłości (4.12). W tym celu napiszemy składowe tensora zmiany krzywizny po obu stronach Γ . Uwzględniając w (2.43) związki (4.11) i (4.9) otrzymujemy

$$(4.13) \quad \dot{\kappa}_n = \mu_1(-m_s + 1) + \mu_2(-m_s - 1) = -\cos 2\beta^- (\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2).$$

Z wymagania ciągłości prędkości zmiany krzywizn $\dot{\kappa}_s$ i $\dot{\kappa}_{ns}$ wynika, że

$$(4.14) \quad -\cos 2\beta^- (-\mu_1^+ - \mu_2^+ + \mu_1^- + \mu_2^-) + (-\mu_1^- + \mu_2^- + \mu_1^+ - \mu_2^+) = 0, \\ \mu_1^+ + \mu_2^+ + \mu_1^- + \mu_2^- = 0.$$

Ponieważ μ jest nieujemne, to musi zachodzić

$$(4.15) \quad \mu_1^+ = \mu_2^+ = \mu_1^- = \mu_2^- = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma.$$

Oznacza to, że gdy $\beta^- \neq 0$,

$$(4.16) \quad [\dot{\kappa}_n] = 0.$$

Z (4.16) wynika, że na linii (4.12) nie mogą pojawić się nieciągłości składowych pola prędkości odkształceń, a ponadto, ponieważ zachodzi (4.15), linia ta nie doznaje odkształceń.

Nieciągłości w hiperbolicznym polu odkształceń mogą zatem występować tylko wzdłuż charakterystyk, tzn. gdy $\beta^- = 0$ lub $\pi/2$. Dla $\beta^- = 0$ z warunku $[\dot{\kappa}_s] = [\dot{\kappa}_{ns}] = 0$ otrzymujemy

$$(4.17) \quad \mu_1^- = \mu_1^+$$

i skok składowej normalnej krzywizny

$$(4.18) \quad [\dot{\kappa}_n] = -2 [\mu_2];$$

dla $\beta^- = \pi/2$

$$(4.19) \quad \mu_2^+ = \mu_2^-, \quad [\dot{\kappa}_n] = 2 [\mu_1].$$

Jeśli $\mu \rightarrow \infty$, to wzdłuż charakterystyki łączącej obszary różnych typów powstanie linia nieciągłości pochodnej $[\partial w / \partial n] \neq 0$, czyli linia przegubów plastycznych. Poza liniami charakterystycznymi nieciągłości kinematycznych być nie może.

5. OBSZARY PARABOLICZNE

Pola sił wewnętrznych, odpowiadające regularnym częściom powierzchni plastyczności (2.4), oraz stowarzyszone z nimi pola prędkości ugięć opisuje układ równań typu parabolicznego (2.20). Takie obszary, w których poszukiwane funkcje określone są przez równania paraboliczne, będziemy dalej nazywali obszarami parabolicznymi. Całkując równania (2.20), odniesione do układu trajektorii głównych ρ, θ , otrzymaliśmy następujące wzory określające rozkład sił wewnętrznych w polu parabolicznym:

$$(5.1) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = 1 + A'(\theta) + \frac{B(\theta)}{\rho}, \quad q_\rho = \frac{A'(\theta)}{\rho},$$

w których funkcje $A'(\theta)$ i $B(\theta)$ wyznacza się z warunków brzegowych. Ponieważ w przypadku obciążeń o postaci sił skupionych trajektorie momentu głównego rozchodzą się promieniście od punktu przyłożenia siły, to obwiednia charakterystyk (2.22) redukuje się do punktu, tzn. $\rho = 0$ leży w obszarze płyty. Wówczas gdy $\rho = 0$ $|m_\rho| \leq 1$, to

$$(5.2) \quad B(\theta) = 0.$$

Funkcję $A'(\theta)$ wyznaczamy z warunków brzegowych. Jeżeli brzeg płyty opiszemy równaniem $\rho = \rho(\theta)$ w biegunowym układzie współrzędnych ρ, θ i o początku w punkcie przyłożenia siły, to dla brzegu swobodnie podpartego zachodzi implikacja

$$(5.3) \quad \rho = \rho(\theta), \quad m_\rho = -\operatorname{tg}^2 \beta \Rightarrow A'(\theta) = -(1 + \operatorname{tg}^2 \beta), \quad |\beta| \leq \frac{\pi}{4},$$

gdzie kąt β (pomiędzy trajektorią momentu m_ρ i normalną do brzegu) zależy od kąta θ .

W każdym konkretnym zadaniu trzeba tę zależność wyznaczyć. W przypadku brzegu wolnego płyty obciążonej siłą skupioną mamy trzy warunki do spełnienia, a do wyznaczenia tylko dwie funkcje $A'(\theta)$ i $B(\theta)$, stąd wnioskujemy, że brzeg wolny płyty obciążonej siłą skupioną nie może leżeć w polu parabolicznym. Dlatego dalej zajmujemy się tylko płytami swobodnie podpartymi.

Pole sił w strefie parabolicznej ograniczonej brzegiem swobodnie podpartym po wprowadzeniu (5.2) i (5.3) do (5.1) przyjmuje postać

$$(5.4) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = -\operatorname{tg}^2 \beta, \quad q_\rho = -\frac{1}{\rho} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta).$$

Nośność graniczna zgodnie z (2.31) wynosi

$$(5.5) \quad p = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -A'(\theta) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 + \operatorname{tg}^2(\beta(\theta))) d\theta,$$

gdzie θ_1, θ_2 są kątami, które określają graniczne charakterystyki pola.

Założmy, że w całej płycie zrealizuje się paraboliczny stan naprężeń. Takie pole może być opisane jednym rozwiązaniem (5.4) w przypadku brzegu ciągłego lub kilkoma w przypadku brzegu ciągłego odcinkami. Na charakterystykach łączących dwa pola powstają nieciągłości wg (4.2), które przy wykorzystaniu (5.2) i (5.3) wynoszą

$$(5.6) \quad [m_\rho] = \rho [q_\rho] = \operatorname{tg}^2 \beta^- - \operatorname{tg}^2 \beta^+.$$

Przykładami mogą być dowolne płyty swobodnie podparte obciążone jedną siłą skupioną. Jedynym ograniczeniem na kształt płyty i miejsce przyłożenia siły jest wymaganie, aby

$$(5.7) \quad |\beta| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Taki warunek spełniają wszystkie wielokąty opisane na okręgu i obciążone siłą w środku [9, 10 i 11].

Aby rozwiązać konkretną płytę, wystarczy wyznaczyć funkcje $\beta = \beta(\theta)$, sprawdzić warunek (5.7) i podstawić znalezione funkcje do wzorów (5.4), (5.5) i (5.6). Ten sposób postępowania zilustrujemy na kilku przykładach.

5.1. Płyta sześciokątna

Założmy, że w całej płycie realizuje się pole paraboliczne o różnych analitycznie rozwiązaniach w części 1 i 2. Sprawdźmy, czy wszystkie warunki poprawności rozwiązania są przy tym założeniu spełnione. Zgodnie z nakreślonym we wstępie tokiem postępowania określimy funkcje $\beta = \beta(\theta)$, odpowiednio dla cz. 1 i 2:

$$(5.8) \quad \beta_1 = \theta_1, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{4} - \alpha - \theta_2.$$

Po wprowadzeniu funkcji (5.8) do (5.4) otrzymamy pole sił wewnętrznych opisane następującymi wzorami:

w części 1

$$(5.9) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = -\operatorname{tg}^2 \theta_1, \quad \rho q_\rho = -1 - \operatorname{tg}^2 \theta_1;$$

w części 2

$$(5.10) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = -\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta_2 \right), \quad \rho q_\rho = - \left(1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta_2 \right) \right).$$

Nieciągłości na liniach OK i OM łączących obszary 1 i 2 zgodnie z (5.6) będą następujące:

$$(5.11) \quad [m_\rho]_{OK} = \rho [q_\rho] = - \left(1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right) = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} \leq 2,$$

$$[m_\rho]_{OM} = \rho [q_\rho] = 0.$$

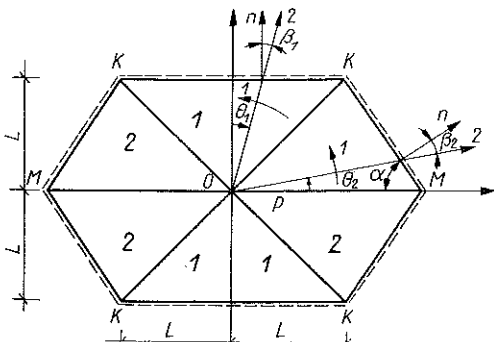
Nośność poszczególnych części wynosi

$$(5.12) \quad p_1 = \int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\theta = 1,$$

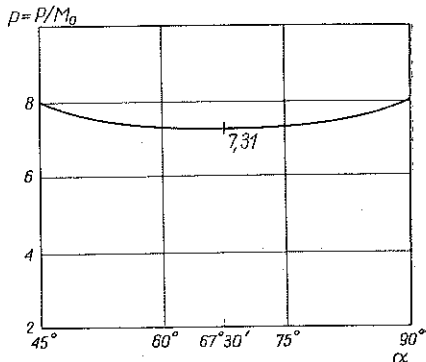
$$p_2 = \int_0^{\pi/4} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha \right) \right) d\theta = \left(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right).$$

Całkowita nośność graniczna płyty jest sumą obciążeń przenoszonych przez poszczególne części:

$$(5.13) \quad p = 4(p_1 + p_2) = 4 \left(1 + \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$



Rys. 4



Rys. 5

Jak widać obciążenie graniczne zależy od wielkości kąta α . Ze względu na warunek (5.7) rozwiązanie jest poprawne dla $\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$. Funkcję $p(\alpha)$ podano na wykresie (rys. 5).

Pole prędkości ugięć ograniczone jest ostrostupem o wierzchołku w punkcie zaszczepienia siły skupionej. Odkształcenia plastyczne koncentrują się wzdłuż krawędzi ostrostupa. Na liniach OK i OM powstają nieciągłości $\partial w / \partial n$ o następujących skokach:

$$(5.14) \quad \left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial n} \right]_{OK} = \frac{1}{L\sqrt{2}} - \frac{1}{L\sqrt{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{L\sqrt{2} (1 + \operatorname{tg} \alpha)},$$

$$\left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial n} \right]_{OM} = \frac{2}{L(1 + \operatorname{tg} \alpha)}.$$

Ponieważ poza odkształceniami skoncentrowanymi w przegubach inne odkształcenia plastyczne nie powstają, przeto nośność graniczna obliczona metodą linii załomów przyjmuje także wartość (5.13). Łatwo to sprawdzić pisząc równanie bilansu mocy sił wewnętrznych i obciążenia zewnętrznego.

5.2. Płyta z brzegami krzywoliniowymi

Tak jak w przykładzie 5.1 założymy, że w całej płycie mamy paraboliczne pole sił i prędkości odkształceń, określone przez funkcje w częściach AOB i AOD .

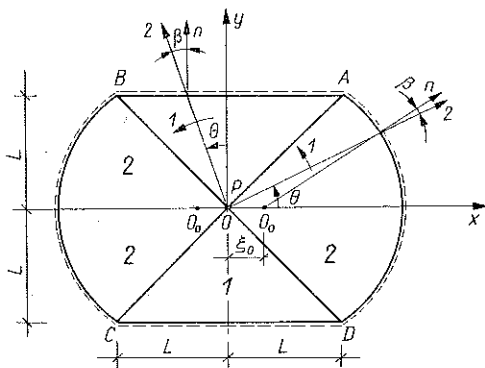
W części AOB kąt $\beta = \theta$, a siły wewnętrzne i obciążenie przenoszone przez tę część opisane są takimi samymi funkcjami jak dla części 1 płyty przedstawionej w przykładzie 5.1.

Część AOD ograniczona jest brzegiem o równaniu

$$(5.15) \quad \rho(\theta) = \xi_0 \cos \theta + \sqrt{\xi_0^2 \cos^2 \theta + 2(1 - \xi_0)},$$

a kąty β i θ związane są ze sobą następującym związkiem:

$$(5.16) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\xi_0 \sin \theta}{\sqrt{\xi_0^2 \cos^2 \theta + 2(1 - \xi_0)}},$$



Rys. 6

przy czym warunek $|\beta| \leq \pi/4$ nakłada następujące ograniczenia na geometryczne parametry płyty:

$$(5.17) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad -\infty < \xi_0 \leq 1.$$

Podstawiając (5.16) do (5.4) i (5.5) otrzymujemy pole sił i obciążenie przenoszone przez obszar AOD :

$$(5.18) \quad \begin{aligned} m_\theta &= 1, & m_\rho &= \frac{\xi_0^2 \sin^2 \theta}{\xi_0^2 \cos^2 \theta + 2(1 - \xi_0)}, \\ q_\theta &= 0, & q_\rho &= -\frac{\xi_0^2 + 2(1 - \xi_0)}{\xi_0^2 \cos^2 \theta + 2(1 - \xi_0)}, \\ p_{AOD} &= \sqrt{1 + \frac{\xi_0^2}{2(1 - \xi_0)}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi_0^2}{2(1 - \xi_0)}}}. \end{aligned}$$

Na linii OA występuje nieciągłość m_ρ i q_ρ , których skok wynosi

$$(5.19) \quad [m_\rho] = \rho [q_\rho] = -\frac{4(1 - \xi_0)}{4(1 - \xi_0) + \xi_0^2}.$$

Nośność graniczną płyty określa wzór

$$(5.20) \quad p = 2(p_{AOB} + p_{AOD}) = 4 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\xi_0^2}{2(1-\xi_0)}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi_2^2}{2(1-\xi_0)}}} \right).$$

Dla $\xi_0 = 1$ i dla $\xi_0 \rightarrow -\infty$, $p = 8$; dla $\xi_0 = 0$, $p = 4 + \pi$.

Pole prędkości ugięć ograniczone jest przez powierzchnię złożoną z dwóch wycinków stożków połączonych ze sztywnymi trójkątnymi płacami wzdłuż przegubów OA .

Łatwo spostrzec, że w obu przykładach płyty odpowiadające granicznym wielkościom parametrów α i ξ_0 osiągają tę samą wartość nośności granicznej: $p = 8$. Dla wszystkich innych wartości α i ξ_0 nośność graniczna odpowiednich płyt jest mniejsza.

Wydaje się, że dla wytłumaczenia tego faktu można skorzystać z dwóch następujących twierdzeń [12].

1. Dodanie (ujęcie) nieważkiego materiału nie prowadzi do obniżenia (zwiększenia) intensywności obciążenia granicznego.
2. Zwiększenie wymiarów ciała uzyskiwane przez przesuwanie unieruchomionych granic ciała na zewnątrz nie może prowadzić do zwiększenia obciążenia granicznego.

Przy zmianie kształtu płyty nakładają na siebie dwa efekty: dodanie lub ujęcie materiału i zwiększenie lub zmniejszenie długości podparcia.

6. OBSZARY HIPERBOLICZNE

Takie obszary, w których składowe siły wewnętrznych i prędkości odkształceń opisują równania typu hiperbolicznego (2.32) i (2.44), będziemy dalej nazywali obszarami lub polami hiperbolicznymi. Równania (2.32) mają taką samą postać jak równania dotyczące płaskiego stanu odkształceń. Na analogię tę zwrócili uwagę ESTRIN [2] i NIELSEN [10], a ostatnio wykorzystali ją JOHNSON [7] i COLLINS [1] do budowania rozwiązań dla płyt.

Okazuje się, że wiele rozwiązanych w płaskim stanie odkształceń zadań, można, stosując odwzorowania (2.41), (2.42), przenieść do teorii zginania płyt. Np. klasyczne zadanie Prandtla wciskania sztywnego stempla w półprzestrzeń może być w teorii płyt interpretowane jako rozwiązanie ściśle dla płyty poddanej równomiernie rozłożonemu skręcaniu wzdłuż odcinka brzegu [10, 7, 1]. Rozwiązaniem dotyczącym grubościennej rury obciążonej ciśnieniem wewnętrznym można posłużyć się przy budowaniu rozwiązania nośności granicznej dla skręcanej płyty pierścieniowej.

Z przytoczonych przykładów i z (2.41), (2.42) widać, że w przypadku bezpośredniego przenoszenia zagadnień sformułowanych w płaskim stanie odkształcenia do teorii płyt mamy do czynienia z obciążeniem w postaci momentu skręcającego. Płyty spełniające kwadratowy warunek plastyczności — to głównie płyty żelbetowe stosowane w budownictwie, gdzie przeważnie spotykamy się z obciążeniami poprzecz-

nymi. Dlatego bezpośrednie korzystanie z rozwiązań dotyczących płaskiego stanu odkształceń ma niewielkie zastosowanie w praktyce

W p. 4 wykazano, że tak jak w płaskim stanie odkształcenia, można różne pola hiperboliczne łączyć ze sobą wzdłuż linii Γ dopuszczając nieciągłości (4.7). W szczególnym przypadku, gdy charakterystyki pól łączonych są prostymi, warunek ciągłości reakcji (4.7) na linii (4.12) prowadzi do następującego warunku dla skoku momentu skręcającego:

$$(6.1) \quad [m_{ns}] = 2\sin 2\beta^- = \text{const.}$$

Aby znaleźć rozwiązanie dla płyty o określonym kształcie i obciążeniu w postaci sił skupionych oraz przy założeniu, że w całej płycie zrealizuje się pole hiperboliczne o prostoliniowych charakterystykach, postępujemy wg następującego schematu: wybieramy siatkę linii nieciągłości tak, aby wszystkie zbiegały się w punkcie przyłożenia siły. Między nimi budujemy pola sił o takich kierunkach trajektorii momentów głównych, aby były spełnione warunki brzegowe oraz wymagania $[m_n] = 0$, $[m_{ns}] = \text{const}$ na linii nieciągłości. Nośnością graniczną płyty o tak obranym polu jest wartość sumy wszystkich sił węzłowych powstających w punkcie przyłożenia siły. Siły węzłowe, które powstają w punktach przecięcia linii nieciągłości z brzegiem, traktujemy jako reakcje podpory. Przedstawiony powyżej sposób postępowania zilustrujemy na kilku przykładach.

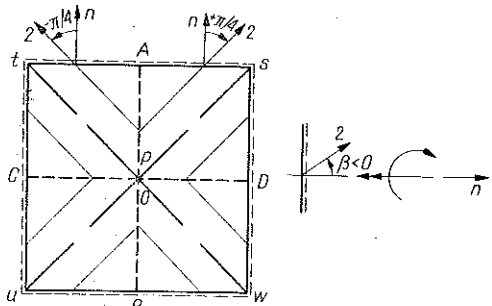
6.1. Płyta kwadratowa

Rozważamy kwadratową, swobodnie podpartą płytę obciążoną siłą skupioną w środku. Zakładamy, że pole sił wewnętrznych składa się z obszarów hiperbolicznych o prostoliniowych trajektoriach momentów głównych, a zatem zgodnie z (2.38) i (2.39)

$$(6.2) \quad m_1 = 1, \quad m_2 = -1, \quad q_1 = q_2 = 0.$$

Układ stref hiperbolicznych a , b o różnych kierunkach trajektorii głównych oraz linie nieciągłości AB i CD pokazane są na rys. 7. Sprawdzimy, czy są spełnione warunki dopuszczalności tak założonego pola. Ponieważ trajektorie momentów głównych dochodzą do brzegu pod kątem $\beta = \pi/4$, przeto warunek swobodnego podparcia jest automatycznie spełniony. Wobec tego, że przyjęte linie nieciągłości są dwusiecznymi kątów utworzonych przez trajektorie tych samych momentów (tzn. $\beta^- = -\beta^+ = \pm \pi/4$ oraz $m_{ns} = 2\sin 2\beta = \pm 2 = \text{const}$), to wymagania (4.7) i (6.1) są także spełnione.

Wzdłuż linii AB i CD i wzdłuż brzegów działają stałe momenty skręcające, a zatem w punkcie przecięcia tych linii, w punktach przecięcia linii nieciągłości z brzegiem oraz w narożach płyty pojawiają się siły węzłowe. Przy znakach kąta β



Rys. 7

przyjętych za dodatnie zgodnie z rys. 7 i przy wartościach momentów (4.9) — przyjęte pole sił przenosi następujące obciążenie graniczne:

$$(6.3) \quad p = [m_{ns}]_{OA} + [m_{ns}]_{OB} + [m_{ns}]_{OC} + [m_{ns}]_{OD},$$

w narożach zaś t, s, u, w oraz w punktach A, B, C i D siły węzłowe wywołują następujące reakcje:

$$(6.4) \quad R_t = R_u = R_s = R_w = 2,$$

gdzie $R_s = m_{ns}^{sA} - m_{ns}^{sD} = \sin 2\beta - (-\sin 2\beta)$,

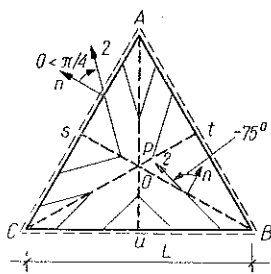
$$(6.5) \quad R_A = R_B = R_C = R_D = -4,$$

gdzie $R_D = m_{ns}^{Ds} - m_{ns}^{Dw} + [m_{ns}]_{DO}$; za dodatnie uważamy reakcje skierowane w dół.

Z przedstawionym polem sił można stowarzyszyć mechanizm zniszczenia w postaci ostrosłupa. Powyżej opisane pole sił wewnętrznych zostało otrzymane również w inny sposób [18 i 9]. Dla płyty kwadratowej znane jest także rozwiązanie, w którym momenty i siły poprzeczne zmieniają się wg zależności (2.27) i (2.30). Oba rodzaje pól realizują się w obszarach sztywnych przy tym samym mechanizmie zniszczenia. Teoria nośności granicznej dopuszcza w takim przypadku niejednorodność pól naprężeń.

6.2. Równoboczna płyta trójkątna obciążona siłą skupioną w środku

Załóżmy, że pole sił wewnętrznych składa się z sześciu stref hiperbolicznych połączonych ze sobą wzdłuż linii nieciągłości. Linie nieciągłości pokrywają się ze środkowymi trójkątami. Kierunki trajektorii momentu głównego m_2 oraz kąty, pod jakimi przecinają brzeg i linie nieciągłości, są pokazane na rys. 8. Przy tak przyjętym układzie trajektorii momentów głównych, tak jak w przykładzie 6.1, warunek swobodnego podparcia (3.2) oraz warunki (4.7) i (6.1) na liniach nieciągłości są spełnione. Opisane pole sił wewnętrznych przenosi następujące obciążenie graniczne:



Rys. 8

$$(6.6) \quad p = 3 [m_{ns}]_{OA} + 3 [m_{ns}]_{Ot} = 9,$$

a w narożach A, B, C i w punktach u, s, t siły węzłowe wywołują następujące reakcje:

$$(6.7) \quad R_A = R_B = R_C = 1,$$

gdzie $R_A = [m_{ns}]_{AO} + m_{ns}^{As} - m_{ns}^{At}$,

$$(6.8) \quad R_u = R_s = R_t = -4,$$

gdzie $R_t = [m_{ns}]_{tO} + m_{ns}^{tA} - m_{ns}^{tB}$, przy czym dodatnie reakcje skierowane są w dół.

Ponieważ zgodnie z (4.15) linie nieciągłości (4.12) nie odkształcają się, przeto z podanym polem statycznie dopuszczalnym nie można stowarzyszyć mechanizmu zniszczenia. Wartość $p=9$ jest dolną oceną nośności granicznej płyty równobocznej.

Cała powierzchnia ugięcia dla płyty ograniczona jest wycinkami stożków AOA i $AO'B$ połączonych ze sobą strefami izotropowymi $O'AO$. Obszary $O'AO$ pozostają sztywne.

Ze względu na symetrię dalej rozpatrzmy ćwiartkę płyty. Równania charakterystyk (tworzących powierzchnię) przy uwzględnieniu (7.1) i (7.2) w poszczególnych strefach są następujące:

$$(7.3) \quad y_{A'OB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \alpha} (x - \alpha), \quad 0 \leq \theta \leq \theta_A;$$

$$y_{AOA} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x, \quad \theta_A \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Funkcje określające $\text{tg } \beta$ przyjmują postać następującą: dla strefy $AO'B$

$$(7.4) \quad \text{tg } \beta = \frac{\alpha \sin \theta}{1 - \alpha \cos \theta} = \frac{\alpha \sin \Phi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \Phi}},$$

dla strefy AOA

$$(7.5) \quad \text{tg } \beta = 0.$$

Podstawiając (7.4) i (7.5) do (5.4) otrzymujemy wzory określające pole sił w strefach parabolicznych. W strefie $AO'B$

$$(7.6) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = -\frac{\alpha^2 \sin^2 \Phi}{1 - \alpha^2 \sin^2 \Phi}, \quad q_\rho = -\frac{1}{\rho(1 - \alpha^2 \sin^2 \Phi)};$$

w strefie AOA

$$(7.7) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = 0, \quad q_\rho = -\frac{1}{\rho};$$

w strefie izotropowej natomiast

$$(7.8) \quad m_1 = m_2 = 1, \quad q_1 = q_2 = 0.$$

Obciążenie zewnętrzne składa się z obciążeń przenoszonych przez poszczególne obszary paraboliczne i zgodnie z (5.5) wynosi

$$(7.9) \quad p_{O'} = 2 \int_0^{\Phi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 + \beta_0} \frac{1}{1 - \alpha^2 \sin^2 \Phi} d\Phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \arctg \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0 - \alpha} \right)$$

oraz

$$(7.10) \quad p_0 = 4 \int_0^{\theta_0} d\theta = 4\theta_0.$$

Przyjęliśmy obciążenie w postaci trzech równych sił skupionych, zatem z przyrównania (7.9) do (7.10) otrzymamy wzór określający nieznaną kąta rozwarcia strefy parabolicznej AOA :

$$(7.11) \quad \theta_0 = \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} \arctg \left(\sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right).$$

Nośność graniczna płyty jest równa

$$(7.12) \quad p = 12\theta_0.$$

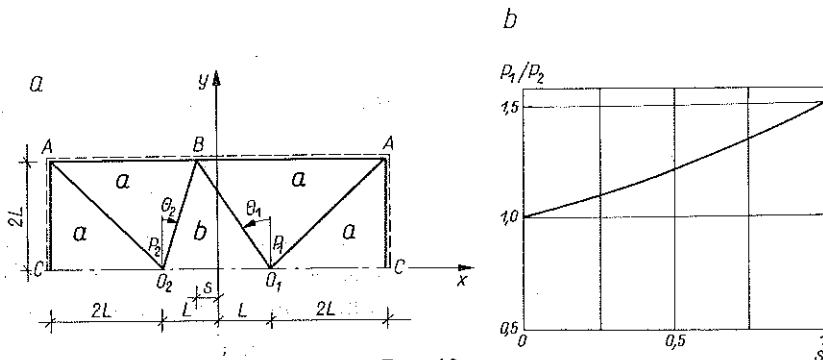
Dla $\alpha = 0$ mamy $\theta_0 = \pi/6$ i $p = 2\pi$, tzn. otrzymuje się nośność płyty okrągłej, obciążonej siłą skupioną w środku. Podane rozwiązanie jest poprawne przy ograniczeniu

$$(7.13) \quad |\alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

które wynika z warunku $|\beta| \leq \pi/4$.

7.2. Płyta prostokątna obciążona dwiema nierównymi siłami

Rozpatrzmy swobodnie podpartą płytę obciążoną dwiema nierównymi siłami przyłożonymi w punktach O_1 i O_2 . Założymy, że pole sił wewnętrznych składa się z obszarów parabolicznych a o polu sił (5.4) i obszaru izotropowego b o polu sił



Rys. 10

(2.34), (2.35). Ustalimy zależność stosunku sił P_1/P_2 od parametru $s = S/L$, który określa położenie obszaru izotropowego w płycie (rys. 10a). Przy tak przyjętym polu siły P_1 i P_2 przyjmują, zgodnie z (5.5), następujące wartości:

$$P_1 = 2 \left(2 + \int_0^{\arctan \frac{1+s}{2}} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1) d\theta_1 \right) = 5 + s,$$

$$P_2 = 2 \left(2 + \int_0^{\arctan \frac{1-s}{2}} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2) d\theta_2 \right) = 5 - s.$$

wg oznaczeń podanych na rysunku.

Wykres funkcji $\alpha(s) = P_1/P_2 = (5+s)/(5-s)$ pokazany jest na rys. 10b. Pole prędkości ugięć jest ograniczone wielościanem w kształcie pryzmy. Wzdłuż AO_1 , O_1O_2 i AO_2 powstają przeguby plastyczne.

7.3. Płyta o nieciągłych warunkach brzegowych

Tak jak we wszystkich poprzednio przytoczonych przykładach postępowanie nasze polega na założeniu pola sił z podziałem na obszary różnych typów i sprawdzeniu poprawności tego założenia. Wiemy, że brzeg utwierdzony może leżeć w strefie

hiperbolicznej. Wobec tego założmy, że pole sił wewnętrznych dla płyty, której połowa pokazana jest na rys. 11, będzie składała się z izotropowej strefy (*a*), parabolicznych (*b*) i hiperbolicznych (*c*). Siły wewnętrzne w poszczególnych strefach—zgodnie z (2.34)—(2.35), (5.4), (2.38)—(2.39) określają wzory

dla strefy izotropowej

$$(7.14) \quad m_1 = m_2 = 1, \quad q_1 = q_2 = 0;$$

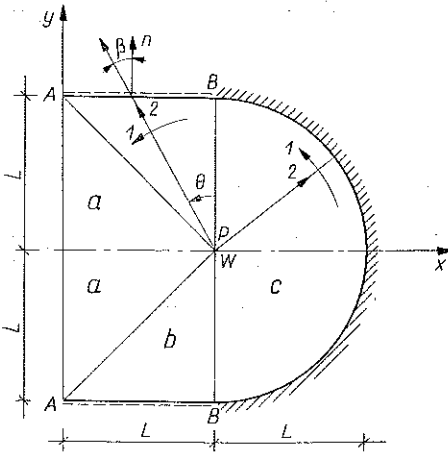
dla strefy parabolicznej, gdy kąt $\beta = \theta$ (oznaczenia podane są na rysunku)

$$(7.15) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = -\operatorname{tg}^2 \theta, \\ q_\rho = -\frac{1}{\rho} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4};$$

dla strefy hiperbolicznej

$$(7.16) \quad m_\theta = 1, \quad m_\rho = -1, \quad q_\theta = 0,$$

$$q_\rho = -\frac{2}{\rho}.$$



Rys. 11

Ponieważ brzeg utwierdzony jest trajektorią momentu m_θ , przeto siatka trajektorii momentów głównych w strefie hiperbolicznej jest siatką biegunową. Należy sprawdzić, czy warunki ciągłości m_n i q_n wzdłuż linii łączących je są spełnione.

Na linii *WA* łączącej obszar izotropowy z parabolicznym zgodnie z (4.7) występują nieciągłości o skokach

$$(7.17) \quad [m_n] = [m_\theta]_{WA} = 0, \quad [q_n] = [q_\theta] = 0, \\ [m_\rho] = -\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - 1 = -2, \quad [q_\rho] = -\frac{1}{\rho}.$$

Na linii *WB* łączącej obszar paraboliczny z hiperbolicznym zgodnie z (4.3) skoki są następujące:

$$(7.18) \quad [m_n] = [m_\theta]_{WB} = 0, \quad [q_n] = [q_\theta] = 0, \\ [m_\rho]_{WB} = -1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{WB} = -1, \quad [q_\rho]_{WB} = -\frac{1}{\rho}.$$

Obrane pole sił spełnia więc warunki poprawności rozwiązania.

Obciążenie graniczne składa się z obciążeń przenoszonych przez poszczególne obszary paraboliczne i hiperboliczne i zgodnie z (5.5) i (2.40) wynosi

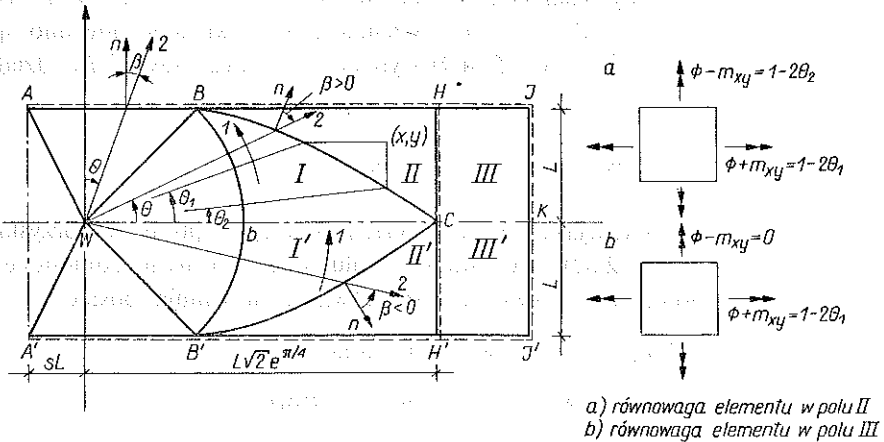
$$(7.19) \quad p_W = 2 + 2\pi.$$

Pole prędkości ugięć będzie w części hiperbolicznej stożkiem, część paraboliczna zaś i izotropowa przesunie się sztywno wraz z przegubem *WW*.

We wszystkich dotychczas przytoczonych przykładach zakładaliśmy, że każdy punkt płyty, także w częściach sztywnych, jest w stanie granicznym. Odejdziemy teraz od tego założenia. Najpierw określimy schemat zniszczenia i ustalimy typy obszarów w częściach odkształcających się plastycznie. Następnie zajmiemy się szukaniem statycznie dopuszczalnych pól sił wewnętrznych w pozostałych częściach płyty.

7.4. Płyta prostokątna obciążona dwiema równymi siłami skupionymi

Przyjmijmy, że pole prędkości ugięć jest ograniczone wycinkiem stożka WBB' i sztywnymi płatami AWA' i AWB przesuwanymi się w dół wraz z dodatnim przegubem WW . Przy takim schemacie zniszczenia wzdłuż BB' powstanie załom ujemny, a wzdłuż WB i WB' dodatni.



Rys. 12

Założmy, że pole sił wewnętrznych składa się ze strefy izotropowej AWA' , w której zgodnie z (2.34) i (2.35)

$$(7.20) \quad m_1 = m_2 = 1, \quad q_1 = q_2 = 0$$

ze strefy parabolicznej AWB , dla której $\beta = \theta$, i zgodnie z (5.4)

$$(7.21) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = -\text{tg}^2 \theta, \quad q_\rho = -\frac{1}{\rho} (1 + \text{tg}^2 \theta).$$

W części WBB' zrealizuje się pole hiperboliczne o biegunowej siatce trajektorii i zgodnie z (2.38)–(2.39)

$$(7.22) \quad m_\theta = 1, \quad m_\rho = -1, \quad q_\theta = 0, \quad q_\rho = -\frac{2}{\rho}.$$

Na liniach WA i WB wystąpią zgodnie z (4.3) i (4.4) nieciągłości o skokach następujących:

$$(7.23) \quad \begin{aligned} [m_\rho]_{WA} &= -\text{tg}^2 \theta_0 - 1, & [q_\rho]_{WA} &= -\frac{1}{\rho} (1 + \text{tg}^2 \theta_0), \\ [m_\rho]_{WB} &= -1 + \text{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 0, & [q_\rho]_{WB} &= 0. \end{aligned}$$

Aby znaleźć funkcję określającą pole sił poza łukiem BbB' , wykorzystamy podejście COLLINSA [1]. W pierwszym kroku COLLINS przedłużył pole (7.22) do linii BC , która jest trajektorią momentu skracającego. Dla biegunowej siatki trajektorii linia BC jest spiralą logarytmiczną o równaniu $\rho_0(\theta) = \sqrt{2}e^{\pi/4 - \theta}$. Jedynymi siłami wewnętrznymi działającymi wzdłuż linii BC jest moment skracający m_{ns} i siła poprzeczna q_n . Siłę q_n można zastąpić równoważnym jej statycznie momentem skracającym równym potencjałowi sił poprzecznych Φ .

Pole sił przedstawimy za pomocą funkcji. W obszarze I (rys. 12) przyjmujemy pole sił wg (7.22) aż do krzywej BC o postaci $\rho_0(\theta) = \sqrt{2}e^{\pi/4 - \theta}$. W następnym kroku szukamy pola sił w obszarze II. Zakładamy, że linia BC jest linią nieciągłości, wzdłuż której muszą być spełnione warunki (4.7) i (4.8). Znając pole sił w obszarze I, więc także momenty i siły działające wzdłuż BC oraz wykorzystując (4.7) i (4.8) określimy, przy pewnych dodatkowych założeniach, warunki jakie powinno spełniać pole sił II wzdłuż spirali BC . Z (4.9) wynika, że wzdłuż krzywej BC działają siły następujące:

$$(7.24) \quad m_n^I = 0, \quad m_{ns}^I = 1, \quad q_n = -\frac{\sqrt{2}}{\rho_0}.$$

Żeby określić zmianę potencjału siły poprzecznej Φ wzdłuż spirali, wykorzystamy wzory (2.32). Równania (2.32) równowagi w polu hiperbolicznym, odniesione do siatki trajektorii momentów głównych i scałkowane, przyjmują postać

$$(7.25) \quad \begin{aligned} 2\psi_0 \theta + \Phi &= \text{const wzdłuż trajektorii } m_\rho, \\ 2\psi_0 \theta - \Phi &= \text{const wzdłuż trajektorii } m_\theta. \end{aligned}$$

Ponieważ trajektorie momentu m_ρ są prostymi, przeto z pierwszego z (7.25) wynika, że $\Phi = \text{const}$ wzdłuż ρ . Z drugiego określamy funkcję Φ wzdłuż spirali, która przy założeniu, że $\Phi = 0$ wzdłuż OC przyjmuje postać

$$(7.26) \quad \Phi^I = 2\psi_0 \theta,$$

gdzie dla pola (7.22) $\psi_0 = -1$.

Założmy, że w obszarze II momenty spełniają warunek

$$(7.27) \quad m_x^{\text{II}} = m_y^{\text{II}} = 0.$$

W ten sposób warunki swobodnego podparcia na brzegach równoległych do osi x i y są spełnione.

Aby warunek ciągłości momentu normalnego na spirali był spełniony, przyjmujemy wzdłuż BC

$$(7.28) \quad m_n^{\text{II}} = 0,$$

a stąd i z założenia (7.27) wynika, że

$$(7.29) \quad m_{xy}^{\text{II}} = 0, \quad m_{ns}^{\text{II}} = 0$$

wzdłuż BC .

Z warunku ciągłości $[\Phi + m_{ns}] = 0$ znajdziemy

$$(7.30) \quad \Phi^{II} = -2\theta + 1.$$

Pole sił w obszarze II musi spełniać równania równowagi, które po wprowadzeniu potencjału i przy założeniu (7.27) przyjmują postać

$$(7.31) \quad \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Nieskończenie mały element prostokątny jest w równowadze pod działaniem $\chi_1 = \Phi + m_{xy} = 1 - 2\theta_1$ i $\chi_2 = \Phi - m_{xy} = 1 - 2\theta_2$ (rys. 12a). Rozwiązując dwa te równania względem Φ i m_{xy} otrzymujemy całki równań (7.31) spełniające warunki (7.29) i (7.30) wzdłuż spirali:

$$(7.32) \quad m_{xy}^{II} = \theta_2(x) - \theta_1(y), \quad \Phi^{II} = 1 - \theta_2(x) - \theta_1(y).$$

Funkcje $\theta_1(y)$ i $\theta_2(x)$ określamy w następujący sposób:

$$(7.33) \quad \begin{aligned} F(\theta_1, y) &= y - \rho_0 \sin \theta_1 = 0, & 0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4}, \\ G(\theta_2, x) &= x - \rho_0 \cos \theta_2 = 0, & 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Korzystając z (2.11) obliczamy siły poprzeczne w polu II:

$$(7.34) \quad \begin{aligned} q_x^{II} &= \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial y} = -\frac{\partial \theta_1(y)}{\partial y} = -\left(-\frac{F_{,y}}{F_{,\theta_1}}\right) = \frac{1}{\rho_0(\theta_1)(\sin \theta_1 - \cos \theta_1)}, \\ q_y^{II} &= -\frac{\partial \Phi^{II}}{\partial x} = \frac{\partial \theta_2(x)}{\partial x} = -\frac{G_{,x}}{G_{,\theta_2}} = -\frac{1}{\rho_0(\theta_2)(\sin \theta_2 + \cos \theta_2)}. \end{aligned}$$

Normalna siła poprzeczna po obu stronach spirali jest następująca:

$$(7.35) \quad \begin{aligned} q_n^I &= -\frac{\sqrt{2}}{\rho_0}, \\ q_n^{II} &= q_x^{II} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + q_y^{II} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\rho_0}, \end{aligned}$$

a zatem siła poprzeczna poprzez linię BC jest ciągła. Spirala jest linią nieciągłości tylko momentu skracającego:

$$(7.36) \quad [m_{ns}]_{BC} = \text{const.}$$

W punktach B i C powstają siły węzłowe

$$(7.37) \quad R_B = m_{ns}^{II} - m_{ns}^I = -1, \quad R_C = m_{ns}^I - m_{ns}^{II} = 1,$$

gdzie za dodatnie uważamy siły skierowane w dół. Składowe tensora momentu w polu II przyjmują wartości

$$(7.38) \quad m_x = m_y = 0, \quad |m_{xy}| \leq \frac{\pi}{4} < 1,$$

a to oznacza, że powierzchnia plastyczności (2.4) w żadnym punkcie pola *BCH* nie jest przekroczona. Tak opisane pole II ograniczone jest linią *HC*, wzdłuż której siły wynoszą:

$$(7.39) \quad m_{xy}^{\text{II}} = -\theta_1(y), \quad \Phi^{\text{II}} = 1 - \theta_1(y),$$

$$q_x^{\text{II}} = \frac{1}{\rho_0(\theta_1)(\sin \theta_1 - \cos \theta_1)}, \quad q_y^{\text{II}} = -\frac{1}{\rho_0(\theta_1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}.$$

Następnie szukamy pola sił w obszarze III. Powtórzmy dla tego obszaru założenie (7.27). Równowagę opisują wtedy równania (7.31). Całki ich obliczymy rozwiązując dwa równania określające efektywne momenty χ_1 i χ_2 , działające na nieskończenie mały element w polu III (rys. 12b). Wówczas

$$(7.40) \quad m_{xy}^{\text{III}} = \frac{1}{2} - \theta_1(y), \quad \Phi^{\text{III}} = \frac{1}{2} - \theta_1(y), \quad 0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4}.$$

Wymagania ciągłości (4.7) i (4.8) przez *HC* są spełnione, ponieważ

$$(7.41) \quad [m_n] = [m_x] = 0, \quad [\Phi + m_{xy}] = 0.$$

Siły poprzeczne w obszarze III zgodnie z (2.11) są następujące:

$$(7.42) \quad q_x = \frac{\partial \Phi^{\text{III}}}{\partial y} = -\frac{\partial \theta_1(y)}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0(\theta_1)(\sin \theta_1 - \cos \theta_1)},$$

$$q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Skok normalnej siły poprzecznej na *HC* jest równy zeru:

$$(7.43) \quad [q_n] = [q_x] = q_x^{\text{III}} - q_x^{\text{II}} = 0.$$

Zatem *HC* jest linią nieciągłości momentu skręcającego i siły $q_s = q_y$

$$(7.44) \quad [m_{ns}] = [m_{xy}] = \frac{1}{2}, \quad [q_y] = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\pi/4}}.$$

W wyniku nieciągłości momentu m_{xy} w punktach *C* i *H* występują siły węzłowe:

$$(7.45) \quad R_C = m_{ns}^{\text{II}} - m_{ns}^{\text{III}} = -\frac{1}{2}, \quad R_w = m_{ns}^{\text{III}} - m_{ns}^{\text{II}} = \frac{1}{2}.$$

Analogicznie określimy pole sił wewnętrznych w dolnej ćwiartce.

Na osi symetrii *CK* występują nieciągłości o następujących skokach:

$$(7.46) \quad [m_n] = [m_y] = 0, \quad [m_{xy} + \Phi] = -2 = \text{const},$$

$$[q_n] = [q_x] = 0, \quad [m_{xy}] = -1, \quad [q_y] = 0.$$

Oś symetrii jest więc linią nieciągłości momentu skręcającego, w wyniku czego w punktach *C* i *K* powstają następujące siły węzłowe:

$$(7.47) \quad R_C = m_{xy}^{\text{III}} - m_{xy}^{\text{IV}} = 1, \quad R_K = m_{xy}^{\text{IV}} - m_{xy}^{\text{III}} = -1.$$

W rozpatrywanej płycie, tzn. gdy stosunek boków $\alpha > \sqrt{2} e^{\pi/4} + s$ (rys. 12), w punkcie C przecina się pięć linii nieciągłości momentu skręcającego. Siła węzłowa w tym punkcie jest sumą pięciu składników

$$(7.48) \quad R_C = 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2;$$

jest ona skierowana w dół.

Siły węzłowe powstające w punktach przecięcia linii nieciągłości z brzegiem mogą być traktowane jako reakcje i nie wpływają na poprawność rozwiązania zupełnego. Siła węzłowa w punkcie C nie może być pominięta, zatem uzyskane przez nas rozwiązanie może być rozwiązaniem zupełnym tylko w przypadku, gdy w punkcie C płyta zostanie dodatkowo podparta. W każdym innym przypadku rozwiązanie nie jest zupełne, a nawet nie jest statycznie dopuszczalne. Uwaga ta dotyczy także rozwiązania podanego przez COLLINSA [1] dla płyty prostokątnej, obciążonej jedną siłą skupioną w środku o stosunku boków $\alpha = \sqrt{2} e^{\pi/4}$.

Znalezione rozwiązanie jest zupełne dla płyty o $\alpha = \sqrt{2} e^{\pi/4} + s$. Nośność graniczna płyty prostokątnej o stosunku boków $\alpha = \sqrt{2} e^{\pi/4} + s$ jest sumą obciążeń przenoszonych przez obszary paraboliczne i hiperboliczne i wynosi

$$(7.49) \quad 2p = 4 \left(1 + \int_0^{\text{arctg } s} (1 + \text{tg}^2 \theta) d\theta + 2 \frac{\pi}{4} \right) = 2\pi + 4(1 + s).$$

Dla $s=0$ mamy $2p=2\pi+4$; nośność płyty prostokątnej obciążonej siłą skupioną dla $s=1$ wynosi $2p=2\pi+8$.

Wynik (7.49) jest identyczny z oceną górną nośności granicznej obliczoną metodą teorii linii załomów [8].

7.5. Płyta prostokątna o stosunku boków $\alpha < \sqrt{2} e^{\pi/4}$

Stosując metodę przedłużania pola hiperbolicznego poprzez spirale, tak jak w przykładzie 7.4, znajdziemy pole statycznie dopuszczalne sił wewnętrznych dla płyty prostokątnej, obciążonej siłą skupioną w środku (rys. 13). Pole sił składa się ze stref parabolicznych AOB i DOE o rozkładzie momentów (5.4) i ze strefy hiperbolicznej BOD o rozkładzie sił (7.22). Pole sił wewnętrznych w obszarze BCD zbudowane tak jak w poprzednim przykładzie ma postać

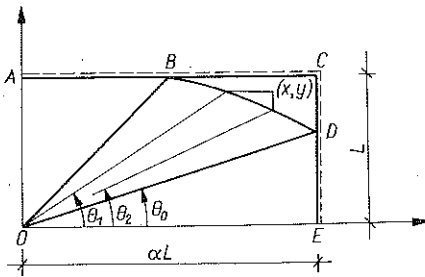
$$(7.50) \quad \begin{aligned} m_x = m_y = 0, \quad m_{xy} = \theta_2(x) - \theta_1(y), \\ q_x = \frac{1}{\rho_0(\theta_1)(\sin \theta_1 - \cos \theta_1)}, \\ q_y = -\frac{1}{\rho_0(\theta_2)(\sin \theta_2 + \cos \theta_2)}; \end{aligned}$$

wszystkie wymagania ciągłości na spirali tak jak poprzednio są spełnione. W punktach B i D powstają reakcje

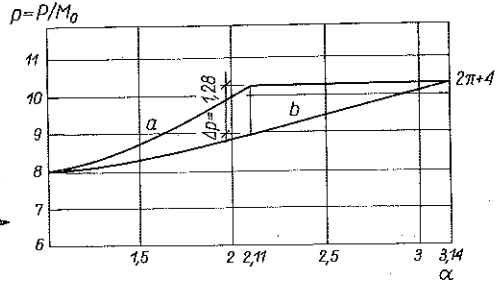
$$(7.51) \quad R_B = -1, \quad R_D = 1.$$

Siła przenoszona przez tak skonstruowane pole jest dolną oceną nośności granicznej:

$$(7.52) \quad p_s = 4 \left(1 + \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) 2 + \int_0^{\theta_0} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\theta \right) = 4 \left(1 + \operatorname{tg} \theta + 2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) \right).$$



Rys. 13



Rys. 14

Na rys. 14 podano dwa wykresy nośności granicznej w zależności od stosunku boków α : ocenę górną otrzymaną metodą teorii linii załomów [14] — wykres a i ocenę dolną zgodnie z (7.52) — wykres b.

7.6. Płyta kwadratowa obciążona siłą skupioną poruszającą się po średnicy

Założymy, że pole sił w płycie składa się z obszarów parabolicznych a, b, c (5.4) i obszarów hiperbolicznych d, f (7.22). Obszary hiperboliczne ograniczone są odpowiednio następującymi spiralami logarytmicznymi

$$(7.53) \quad \rho_d = \sqrt{2} e^{\pi/4 - \theta}, \quad \rho_f = \sqrt{2} (1-s) e^{\pi/4 - \varphi}.$$

Pola sił poza spiralami zbudowane są tak jak w przykładzie (7.4) i mają postać następującą:

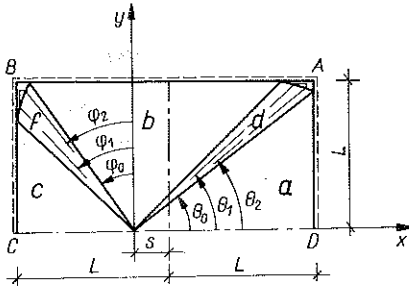
poza spiralą ρ_d

$$(7.54) \quad \begin{aligned} m_x = m_y = 0, \quad m_x = \theta_2(x) - \theta_1(y), \\ q_x = \frac{1}{\rho_d(\theta_1)(\sin \theta_1 - \cos \theta_1)}, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{4}, \\ q_y = -\frac{1}{\rho_d(\theta_2)(\sin \theta_2 + \cos \theta_2)}; \end{aligned}$$

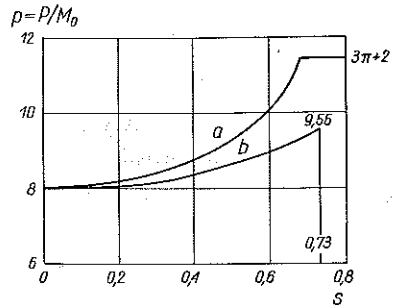
poza spiralą ρ_f

$$(7.55) \quad \begin{aligned} m_x = m_y = 0, \quad m_{xy} = \varphi_2(y) - \varphi_1(x), \\ q_x = -\frac{1}{\rho_f(\varphi_2)(\sin \varphi_2 + \cos \varphi_2)}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \frac{\pi}{4}, \\ q_y = \frac{1}{\rho_f(\varphi_1)(\sin \varphi_1 - \cos \varphi_1)}. \end{aligned}$$

Granice stosowalności opisanego pola określamy tak, aby w żadnym punkcie obszaru stan momentów nie przekraczał powierzchni plastyczności (2.4), tzn. aby był spełniony warunek $|m_{xy}| \leq 1$. Dla punktu B, najbardziej niebezpiecznego pod tym



Rys. 15



Rys. 16

względem, kąty określające położenie punktu przyjmują wartości $\varphi_1(x) = \pi/4$, $\varphi_2(y) = \varphi_0$. Wówczas z warunku $m_{xy}^B = \varphi_0 - \pi/4 \geq -1$ otrzymujemy $\varphi_0 \geq -1 + \pi/4$, tzn. kąt φ_0 może zawierać się w następującym przedziale:

$$(7.56) \quad -0,22 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{4}.$$

Wprowadzając (7.56) do równania $p_f(\varphi_0) \cos \varphi_0 = 1$, wyznaczmy granice zmienności parametru s określającego położenie siły:

$$(7.57) \quad 0 \leq s \leq 0,73.$$

Kąty θ_0 i φ_0 ograniczające strefy hiperboliczne dla ustalonego s są rozwiązaniami następujących równań przestępnych:

$$(7.58) \quad 1 + s - \sqrt{2} e^{\pi/4 - \theta_0} \cos \theta_0 = 0, \quad 1 - \sqrt{2} (1 - s) e^{\pi/4 - \varphi_0} \cos \varphi_0 = 0.$$

Siła przenoszona wynosi

$$(7.59) \quad \begin{aligned} p &= 2(\operatorname{tg} \theta_0 + \operatorname{tg} \varphi_0 + 2 + \pi - 2\theta_0 - 2\varphi_0), & 0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{4}, \\ p &= 2\left(\operatorname{tg} \theta_0 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi_0\right) + 1 + \pi - 2\theta_0 - 2\varphi_0\right), & -0,22 \leq \varphi_0 \leq 0. \end{aligned}$$

Wzory (7.59) określają dolną ocenę nośności granicznej. Na rys. 16 podano wykresy dolnej i górnej oceny nośności granicznej w zależności od parametru s .

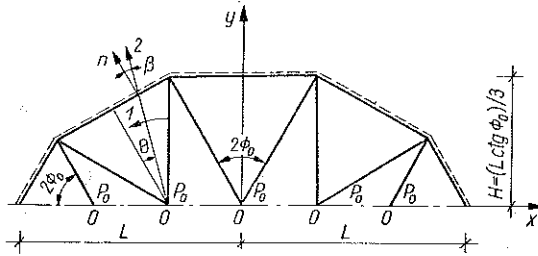
8. KSZTAŁTOWANIE

Korzystając z możliwości łączenia pól odmiennych typów możemy rozwiązywać zadania polegające na poszukiwaniu kształtu płyty przy danych z góry warunkach obciążenia. Jeśli nie są narzucone żadne inne warunki, zadanie takie można rozwiązać na wiele sposobów i wybrać najlepsze ze względu na jakieś ustalone kryterium.

Przeważnie stawiamy pewne dodatkowe wymagania, np. sposób podparcia płyty, rodzaj brzegu (krzywoliniowy czy prostoliniowy), miejsce przyłożenia obciążenia na płycie itp. Podamy kilka przykładów, które zilustrują sposób postępowania, wynikający z przeprowadzonej analizy typu równań, opisujących plastyczne zginanie płyt.

8.1. Płyta obciążona układem sił skupionych stojących wzdłuż prostej

Weźmy przykład płyty swobodnie podpartej, o nieznanym na razie kształcie, obciążonej wzdłuż prostej symetralnej pięcioma równymi siłami (rys. 17). Załóżmy, że brzeg płyty jest linią łamaną, pole sił wewnętrznych zaś składać się będzie z ob-



Rys. 17

szarów parabolicznych i izotropowych. Warunki równości sił i prostoliniowości brzegu wymagają, aby strefy paraboliczne przenoszące jedną siłę skupioną były podobnymi trójkątami równoramionymi. Kąt $\beta = \theta$ dla każdej ze stref.

Pole sił wewnętrznych dla strefy parabolicznej zgodnie z (5.4) jest następujące:

$$(8.1) \quad m_\theta = 1, \quad q_\theta = 0, \quad m_\rho = -\text{tg}^2 \theta, \quad q_\rho = -\frac{1}{\rho} (1 + \text{tg}^2 \theta).$$

Strefy paraboliczne łączymy ze sobą za pośrednictwem obszarów izotropowych o polu sił (2.34) i (2.35)

$$(8.2) \quad m_1 = m_2 = 1, \quad q_1 = q_2 = 0.$$

Kąt rozwarcia strefy parabolicznej określa równanie

$$(8.3) \quad \Phi_0 = 2 \arctg \left[\frac{\text{ctg} \Phi_0 - \cos \Phi_0}{\text{ctg} \Phi_0 + \cos \Phi_0} \text{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_0}{2} \right) \right] - \frac{\pi}{6},$$

którego rozwiązanie daje kąt $\Phi_0 = 30^\circ$.

W rezultacie druga półoś płyty wynosi

$$(8.4) \quad h = \frac{H}{L} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

a pojedyncza siła skupiona przenoszona przez element

$$(8.5) \quad p_0 = 4 \int_0^{\Phi_0} (1 + \text{tg}^2 \theta) d\theta = 4 \text{tg} \Phi_0.$$

Całkowite obciążenie graniczne

$$(8.6) \quad p = 5p_0 = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

Wzdłuż linii łączących poszczególne strefy powstają nieciągłości sił wewnętrznych (4.3):

$$(8.7) \quad [m_\rho] = \rho [q_\rho] = 1 + \operatorname{tg}^2 \Phi_0.$$

Pole prędkości ugięć ograniczone jest wielościannem składającym się ze sztywnych płyt parabolicznych połączonych ze sobą za pomocą stref izotropowych. Strefy izotropowe pozostają sztywne obracając się wokół przegubu WW i przesuując wraz z nim do $w = w_0$.

Dla płyt obciążonych n równymi siłami działającymi w równych odległościach wzdłuż symetralnej płyty łatwo zauważyć, że kąt rozwarcia strefy parabolicznej wynosi

$$(8.8) \quad \Phi_0 = \frac{\pi}{n+1};$$

wówczas druga półoś płyty jest równa $h = \frac{H}{L} = \frac{2}{(n+1)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{(n+1)}$, całkowite zaś obciążenie graniczne przyjmuje wielkość

$$(8.9) \quad p = 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1},$$

gdzie $n \geq 3$; ograniczenie to wynika z warunku $|\beta| \leq \pi/4$.

Jeśli przyjmiemy, że $n \rightarrow \infty$, to otrzymamy płytę obciążoną liniowo o półosiach $L=1$ i $h=2/\pi$. Graniczne obciążenie liniowe na jednostkę długości

$$(8.10) \quad p = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1} \rightarrow 2\pi$$

jest równe granicznemu obciążeniu dla płyty cykloidalnej swobodnie podpartej, obciążonej liniowo wzdłuż dłuższej osi [16].

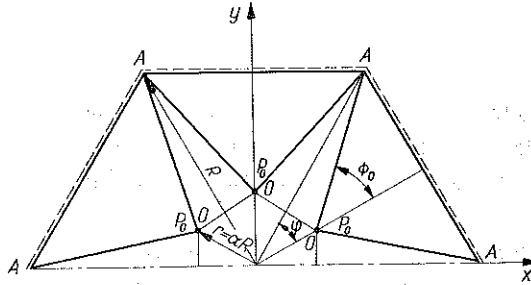
8.2. Płyta obciążona siłami skupionymi wzdłuż okręgu

Innym przykładem tego typu jest płyta obciążona wzdłuż okręgu równymi siłami skupionymi (rys. 18). Dana jest odległość sił od środka i brzegu płyty. Poszukujemy kształtu płyty, która przeniesie powyższe obciążenia i dla której pole sił wewnętrznych będzie zbudowane ze stref parabolicznych i izotropowych. Z założenia o równości sił i równych między nimi odległościach wynika, że strefy parabolicznie przenoszące każdą z nich mają ten sam kąt rozwarcia $2\Phi_0$, brzegiem zaś płyty jest wielobok foremny o n bokach. Ze wzorów trygonometrycznych i przy oznaczeniach przedstawionych na rysunku można otrzymać równanie określające kąt Φ_0 jako funkcję liczby sił:

$$(8.11) \quad \Phi_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right),$$

gdzie $\alpha = r/R$, $\varphi = \pi/n$. Dla konkretnych wartości α z warunku $\Phi_0 \leq 45_p$ możemy otrzymać ograniczenie na liczbę sił.

Pole sił wewnętrznych składa się z trójkątnych stref parabolicznych AOA o rozkładzie opisanym przez (5.4) oraz pola izotropowego, zajmującego część środkową



Rys. 18

plyty i część pomiędzy strefami parabolicznymi o rozkładzie sił (2.34) i (2.35). Zgodnie z (4.3) wzdłuż linii OA powstaną nieciągłości o skoku

$$(8.12) \quad [m_p] = \rho [q_p] = 1 + \operatorname{tg} \Phi_0^2.$$

Całkowite obciążenie graniczne wynosi

$$(8.13) \quad p = np_0 = 2n \operatorname{tg} \Phi_0.$$

Powierzchnia ograniczająca pole prędkości składa się z trójkątnych płatów AOA , obracających się sztywno wokół brzegu AA ($w=0$). Wzdłuż wieloboku $OOOO$ tworzy się przegub plastyczny ($w=w_0$).

Dla liczby sił $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy płytę kołową o promieniu R i granicznym obciążeniu liniowym

$$(8.14) \quad \bar{p} = \frac{1}{2\pi\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right) \right] = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)};$$

dla $\alpha=0$ otrzymujemy z (8.13) nośność płyty okrągłej obciążonej siłą skupioną $p=2\pi$.

Przedstawiona metoda pozwala wyznaczać rozwiązania dla płyt obciążonych siłami skupionymi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I. F. COLLINS, *On an analogy between plane strain and plate bending solutions in rigid (perfect plasticity theory)*, Int. J. Solids Structures, **7**, 1057–1073, 1971.
2. М. И. Эстрин, *Пластический изгиб жестко-пластических плит исследования по строительной механике*, Гостройиздат, 67–74, Москва 1962.
3. P. G. HODGE, Jr., *Plastic plate theory*, Quart. Appl. Math., **22**, 74–77, 1964.
4. P. G. HODGE, Jr., *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
5. H. C. HOPKINS, *On the plastic theory of plates*, Proc. Royal Soc. Lond., Ser. A, **241**, 153–179, 1957.

6. K. W. JOHANSEN, *Yield line theory*, Cement and Concrete Association, London 1962.
7. W. JOHNSON, *Upper bound to the load for the transverse bending of flat rigid-perfectly plastic plates*, Int. J. Mech. Sci., **11**, 9113–938, 1969.
8. E. H. MANSFIELD, *Studies in collapse analysis of rigid-plastic plates with a square yield diagram*, Proc. Royal Soc. Lond. Ser. A, **242**, 311–338, 1957.
9. CH. MASSONNET, *Complete solutions describing the limit state of reinforced concrete slabs*, Magazine of Concrete Research, **19**, 13–32, 1967.
10. M. P. NIELSEN, *Limit analysis of reinforced concrete slabs*, Acta Polytechnica Scandinavica, **C1 26**, Copenhagen 1964.
11. D. NIEPOSTYN, *Rozwiązanie statyczne w teorii nośności granicznej płyt*, Politechnika Warszawska, Zeszyty naukowe, Budownictwo Nr 39, Warszawa 1967.
12. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
13. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов*, Изд. Лит. по Строит. и Арх., Москва 1954.
14. A. SAWCZUK und Th. JAEGER, *Grenztragahigkeitstheorie der Platten*, Springer, Berlin 1963.
15. A. SAWCZUK and P. G. HODGE Jr., *Limit analysis and yield-line theory*, J. Appl. Mech., **35**, 357–362, 1968.
16. A. SAWCZUK, J. SOKÓŁ-SUPEŁ, *Rozwiązania zupełne zagadnień nośności granicznej płyt*, Prace IPPT, **2**, 1972.
17. W. SCHUMANN, *On limit analysis of plates*, Quart. Appl. Math., **16**, 61–71, 1958.
18. P. H. WOOD, *Plastic and elastic design of slabs and plates*, Thames and Hudson, pp. 344, London 1961.

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ПЛАСТИНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ УСИЛИЙ

Данная работа посвящена анализу пластических пластин в условиях изгиба, в случае, когда справедливо условие пластичности максимальных главных моментов.

В статье обсуждены уравнения, описывающие данную задачу, и сформулированы краевые условия. Определены допустимые разрывы кинематических и статических полей. Обсуждены принципы построения разрывных полей внутренних усилий.

Получен ряд полных решений, основанных на использовании предлагаемого метода.

Представленный метод дает также возможность построения статически допустимых решений. Даны примеры иллюстрирующие рассмотренный способ конструкции этих решений.

SUMMARY

PLASTIC PLATES UNDER CONCENTRATED LOADS

The paper is concerned with the analysis of bending of plastic plates subjected to the yield condition of maximum principal moments. It contains the discussion of equations governing the problem and it formulates the boundary conditions. Admissible static and kinematic discontinuities are determined and the principles of construction of discontinuous fields of internal forces are outlined. Application of the method proposed made it possible to derive a number of complete solutions.

The method presented makes it also possible to obtain statically admissible solutions. The procedure is illustrated by examples.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 września 1972 r.