ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 21, 2, 305–310, 1973, Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

METODA SIŁ DLA TERMO-LEPKOSPRĘŻYSTYCH UKŁADÓW PRĘTOWYCH

JADWIGA JĘDRZEJCZYK (GLIWICE)

1. Wstęp

Rozwój metod obliczania konstrukcji inżynierskich stwarza konieczność stosowania modeli obliczeniowych coraz bardziej zbliżonych do rzeczywistości. Wśród wielu czynników mających istotny wpływ na pracę konstrukcji niemałą rolę odgrywają właściwości reologiczne ośrodka; zachowanie się takich ośrodków może być opisane w wielu przypadkach równaniami liniowej lepkosprężystości. Dla większości materiałów wzrost temperatury wpływa na «aktywizację» właściwości reologicznych, która jest szczególnie znaczna w metalach i polimerach, materiałach wrażliwych na zmiany pól termicznych.

Wpływ ten jest do tego stopnia istotny, że ośrodki, które w normalnych warunkach nie ulegają pełzaniu, uzyskują te właściwości pod wpływem przyrostów temperatury. Łączny opis zjawisk cieplnych i lepkosprężystych prowadzi do termo-lepkosprężystości.

W ramach tej teorii i przy założeniu, że własności mechaniczne materiału nie zależą od temperatury konstruujemy równania quasi-statyki lepkosprężystych układów prętowych znajdujących się w polu temperatury.

Równania metody sił uzyskujemy z zasady wzajemności Bettiego, podanej w pracy Sternberga [7]. Wyprowadzenie równań tej metody dla układu N-krotnie statycznie niewyznaczalnego sprowadza się w tym przypadku do rozpatrzenia N par układów lepkosprężystych. Elementem każdej pary jest układ rzeczywisty C poddany działaniu sił nadliczbowych, obciążenia zewnętrznego i temperatury oraz układ poddany działaniu siły jednostkowej stałej w czasie. Stosując do tych układów zasadę wzajemności uzyskujemy równania metody sił dla układów lepkosprężystych z uwzględnieniem temperatury.

Rozpatrywany w artykule problem możemy uważać za uogólnienie wyników podanych w pracy [2], gdzie równania statyki lepkosprężystych układów prętowych zostały otrzymane na innej drodze.

2. Założenia

Niech $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ będą składowymi przemieszczenia, odkształcenia oraz naprężenia w punkcie $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ w chwili t, układu lepkosprężystego $\boldsymbol{B}$ o modułach relaksacji $G_\alpha(t)$, $\alpha=1, 2$, poddanego działaniu pola termicznego

$T(\mathbf{x}, t)$. Załóżmy dalej, że na liniowy układ termo-lepkosprężysty, o właściwościach mechanicznych niezależnych od temperatury działają dwa układy sił, przemieszczeń i temperatury $\{S_i, F_i, \Theta, u_i, \varepsilon_{ii}, \sigma_{ii}\}$, $\{S'_i, F'_i, \Theta'_i, u'_i, \varepsilon'_{ii}, \sigma'_{ii}\}$, wówczas odpowiednikiem twierdzenia Bettiego o wzajemności jest równanie (por. [7 i 8],

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad \int_{\partial B} S_i * du'_i\, dA + \alpha \int_B \Theta * d(\sigma'_{ii} + 3\alpha\Theta' * dG_2)\, dv = \\
= \int_{\partial B} S'_i * du_i\, dA + \alpha \int_B \Theta' * d(\sigma'_{ii} + 3\alpha\Theta' * dG_2)\, dv,
\end{aligned}
$$

gdzie $\Theta(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x}, t_0)$ jest historią pola temperatury, $S_i = \sigma_{ij} n_j$ siłami zewnętrznymi, α współczynnikiem rozszerzalności cieplnej, B i ∂B odpowiednio obszarem i brzegiem ośrodka.

W związkach (2.1) i dalszych stosujemy konwencję sumacyjną względem powtarzających się indeksów i skrócony zapis splotu Stieltjesa $(f * dg)$, którego podstawowe własności podane są w pracy [1].

3. Równania zagadnienia

Niech C będzie układem prętowym lepkosprężystym N-krotnie statycznie niewyznaczalnym, a C_0 zastępującym go układem podstawowym, na który obok obciążenia zewnętrznego działają nadliczbowe siły zewnętrzne

$$\underset{\beta}{\mathbf{X}} = (\underset{\beta}{X_1}, \underset{\beta}{X_2}, \underset{\beta}{X_3}) = \mathbf{X}(\underset{\beta}{\mathbf{x}}, t), \qquad \beta = 1, 2, \ldots, N.$$

W pracy założymy upraszczająco, bez zmniejszenia ogólności rozważań, że w każdej cząstce układu C może występować tylko jedna siła hiperstatyczna $\underset{\beta}{\mathbf{X}}$ oraz że w chwili $t = 0$, $\sigma_{ij} = 0$. Założenie to daje przejrzystość wszystkim wywodom i w sposób elementarny może zostać uogólnione na przypadek, gdy z elementem $\underset{\beta}{\mathbf{x}}$ jest związanych kilka sił hiperstatycznych. Równania metody sił dla tego układu otrzymamy z zasady wzajemności, przyjmując następujące N par układów sił, przemieszczeń i historii temperatury:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}
\{\mathbf{X}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\beta}{\mathbf{x}}), & \mathbf{q}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\gamma}{\mathbf{x}}), & \Theta(\mathbf{x}, t), & u_i(\mathbf{x}, t), & \sigma_{ii}(\mathbf{x}, t)\} \\
\{\mathbf{1}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{1}{\mathbf{x}}), & & \Theta'(\mathbf{x}, t) = 0, & u_i^{1'}(\mathbf{x}, t), & \sigma_{ii}^{1'}(\mathbf{x}, t)\}'
\end{bmatrix}, \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(3.1)\quad &\begin{bmatrix}
\{\mathbf{X}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\beta}{\mathbf{x}}), & \mathbf{q}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\gamma}{\mathbf{x}}), & \Theta(\mathbf{x}, t), & u_i(\mathbf{x}, t), & \sigma_{ii}(\mathbf{x}, t)\} \\
\{\mathbf{1}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{j}{\mathbf{x}}), & & \Theta'(\mathbf{x}, t) = 0, & u_i^{j'}(\mathbf{x}, t), & \sigma_{ii}^{j'}(\mathbf{x}, t)\}'
\end{bmatrix}, \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\begin{bmatrix}
\{\mathbf{X}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\beta}{\mathbf{x}}), & \mathbf{q}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\gamma}{\mathbf{x}}), & \Theta(\mathbf{x}, t), & u_i(\mathbf{x}, t), & \sigma_{ii}(\mathbf{x}, t)\} \\
\{\mathbf{1}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{N}{\mathbf{x}}), & & \Theta'(\mathbf{x}, t) = 0, & u_i^{N'}(\mathbf{x}, t), & \sigma_{ii}^{N'}(\mathbf{x}, t)\}'
\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$$\beta = 1, 2, \ldots, N, \qquad \gamma = 1, 2, \ldots, M, \qquad i = 1, 2, 3, \qquad k = 0, 1.$$

gdzie $\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\beta}{\mathbf{x}})$ jest deltą Diraca ($k=0$) lub jej pochodną ($k=1$), $\underset{\beta}{\mathbf{X}} = \underset{\beta}{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ siłą uogólnioną (siłą lub momentem), $\underset{j}{\mathbf{1}} = \underset{j}{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) H(t)$ jest stałą ze względu na czas siłą jednostkową, $H(t)$ funkcją Heaviside'a, $u_i^{j'}(\mathbf{x}, t) = u_i(\mathbf{x}, t; \underset{j}{\mathbf{1}})$ i $\sigma_{ii}^{j'}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ii}(\mathbf{x}, t; \underset{j}{\mathbf{1}})$ jest przemieszczeniem i naprężeniem wywołanym działaniem siły $\underset{j}{\mathbf{1}}\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{j}{\mathbf{x}})$, a $\underset{\gamma}{\mathbf{q}} = \underset{\gamma}{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)$ obciążeniem przyłożonym w punkcie $\underset{\gamma}{\mathbf{x}}$.

Wypisując dla każdego z układów (3.1) zasadę wzajemności otrzymamy:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B} [\underset{\beta}{X_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\beta}{\mathbf{x}}) * du_i^{1'} + \underset{\gamma}{q_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\gamma}{\mathbf{x}}) * du_i^{1'}]\,dA + \\
&\qquad + \alpha \int_B \Theta * d\sigma_{ii}^{1'}\,dv = \int_{\partial B} \underset{1}{\mathbf{1}_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{1}{\mathbf{x}}) * du_i(\mathbf{x}, t)\,dA \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\int_{\partial B} [\underset{\beta}{X_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\beta}{\mathbf{x}}) * du_i^{j'} + \underset{\gamma}{q_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\gamma}{\mathbf{x}}) * du_i^{j'}]\,dA + \\
&\qquad + \alpha \int_B \Theta * d\sigma_{ii}^{j'}\,dv = \int_{\partial B} \underset{j}{\mathbf{1}_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{j}{\mathbf{x}}) * du_i\,dA \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\int_{\partial B} [\underset{\beta}{X_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\beta}{\mathbf{x}}) * du_i^{N'} + \underset{\gamma}{q_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{\gamma}{\mathbf{x}}) * du_i^{N'}]\,dA + \\
&\qquad + \alpha \int_B \Theta * d\sigma_{ii}^{N'}\,dv = \int_{\partial B} \underset{N}{\mathbf{1}_i}\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{N}{\mathbf{x}}) * du_i\,dA .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Korzystając z własności delty Diraca [6]

$$\int_B f(\mathbf{x})\,\delta^{(k)}(\mathbf{x}, \underset{j}{\mathbf{x}})\,dv = f^{(k)}(\underset{j}{\mathbf{x}}), \qquad k = 0, 1 \tag{3.3}$$

i oznaczając przez $\bar{\delta}_{j\beta}$ przemieszczenia lub obrót punktu wywołany działaniem uogólnionej siły jednostkowej przyłożonej w punkcie $\underset{j}{\mathbf{x}}$, otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\underset{\beta}{\mathbf{X}} * d\bar{\delta}_{1\beta} + \underset{\gamma}{\mathbf{q}} * d\bar{\delta}_{1\gamma} + \alpha \int_B \Theta * d\sigma_{ii}^{1'}\,dv = \underset{1}{\mathbf{1}} * d\mathbf{u}(\underset{1}{\mathbf{x}}), \\
&\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\underset{\beta}{\mathbf{X}} * d\bar{\delta}_{j\beta} + \underset{\gamma}{\mathbf{q}} * d\bar{\delta}_{j\gamma} + \alpha \int_B \Theta * d\sigma_{ii}^{j'}\,dv = \underset{j}{\mathbf{1}} * d\mathbf{u}(\underset{j}{\mathbf{x}}), \\
&\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\underset{\beta}{\mathbf{X}} * d\bar{\delta}_{N\beta} + \underset{\gamma}{\mathbf{q}} * d\bar{\delta}_{J\gamma} + \alpha \int_B \Theta * d\sigma_{ii}^{N'}\,dv = \underset{N}{\mathbf{1}} * d\mathbf{u}(\underset{N}{\mathbf{x}}).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Uwzględniając związek [1],

$$\underset{j}{\mathbf{1}} * d\mathbf{u}(\underset{j}{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}(\underset{j}{\mathbf{x}}) = \underset{j}{\mathbf{u}} \tag{3.5}$$

i wykorzystując zależności określające wartości naprężeń w przekroju wywołane działaniem sił osiowych i momentów zginających

$$\sigma_{ii}^{j'} = \frac{N_j}{A} + \frac{M_{j2}}{J_2}\tilde{x}_3 + \frac{M_{j3}}{J_3}\tilde{x}_2, \tag{3.6}$$

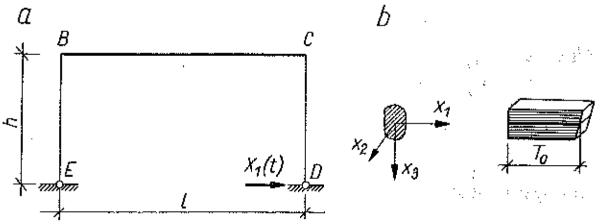
gdzie $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ są współrzędnymi punktu przekroju a N_j, M_{j2}, M_{j3} odpowiednio siłą podłużną i momentami zginającymi, wywołanymi działaniem siły $\underset{j}{\mathbf{1}}$; J_2, J_3 momentami bezwładności, A polem przekroju pręta, równania (3.4) możemy napisać w formie

$$\underset{\beta}{\mathbf{X}}*d\bar{\delta}_{j\beta}+\underset{\gamma}{\mathbf{q}}*d\bar{\delta}_{j\gamma}+\alpha\int\limits_{B}\Theta*d\left(\frac{N_j}{A}+\frac{M_{j2}}{J_2}\tilde{x}_3+\frac{M_{j3}}{J_3}\tilde{x}_2\right)dv=\underset{j}{\mathbf{u}}, \tag{3.6}$$

$$\beta, j=1, 2, \ldots, N, \qquad \gamma=1, 2, \ldots, M.$$

4. Przykład

Rozpatrzmy układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (rys. 1) z materiału lepkosprężystego, opisanego modelem Maxwella i poddanego na odcinku BC działaniu stacjonarnego pola termicznego o rozkładzie $T(\mathbf{x}, t)=T_0(1+bx_3)H(t)$ $T(\mathbf{x}, 0)=0$ (rys. 1).



Rys. 1

Dla tego układu równanie metody sił jest postaci

$$\underset{1}{\mathbf{X}}(t)*d\bar{\delta}_{11}+\alpha\int\limits_{v}T_0(1+bx_3)H(t)*d\left(\frac{1}{A}+\frac{h}{J}\right)dv=0, \tag{4.1}$$

gdzie A jest polem przekroju pręta BC, v jego objętością, a J momentem bezwładności.

Korzystając z własności splotu Stieltjesa [1], transformacji Laplace'a [6] $\mathcal{L}[f(t)]=\bar{f}(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ i ze związku (por. [2 i 5])

$$\mathcal{L}[\bar{\delta}_{11}(t)]=\delta_{11}^0\frac{p+\kappa}{p^2}, \qquad \kappa=\frac{E}{\eta}, \tag{4.2}$$

otrzymamy z równania (4.1) transformatę siły hiperstatycznej $\underset{1}{\mathbf{X}}(t)$:

$$\underset{1}{\bar{\mathbf{X}}}(p)=-\frac{\alpha T_0(1+bh)l}{\delta_{11}^0}\frac{1}{1+p\kappa}. \tag{4.3}$$

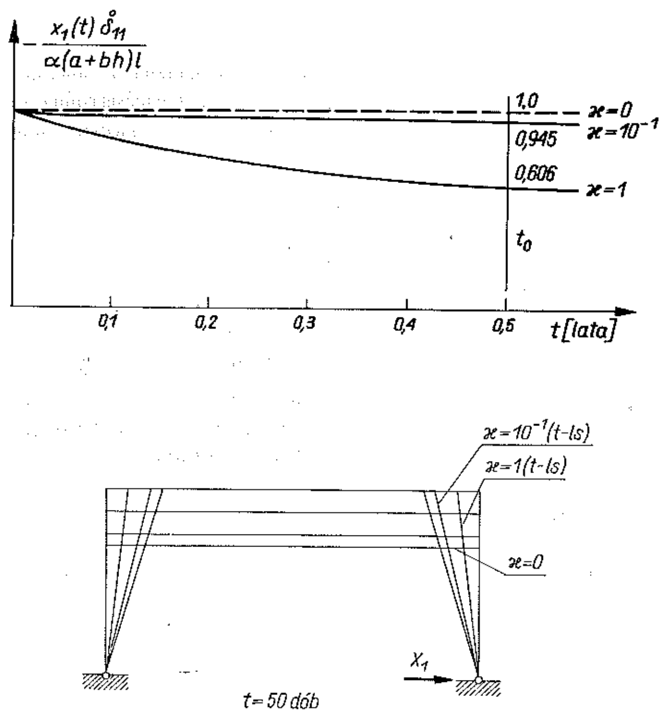
W powyższym wzorze δ_{11}^0 jest ugięciem statycznym w punkcie $\underset{1}{x}$ wywołanym działaniem siły $\underset{1}{\mathbf{1}}$, η współczynnikiem lepkości, E współczynnikiem sprężystości. Retransformata funkcji (4.3) jest postaci [6]:

$$\underset{1}{\mathbf{X}}(t) = \frac{\alpha T_0 (1+bh) l}{\delta_{11}^0} e^{-\kappa t}. \tag{4.4}$$

W analogicznym zagadnieniu sprężystym mamy

$$\underset{1}{\mathbf{X}}(t) = \frac{\alpha T_0 (1+bh) l}{\delta_{11}^0}. \tag{4.5}$$

Porównanie wyników rozwiązań sprężystych i lepkosprężystych, poddanych działaniu pola temperatury, prowadzi do stwierdzenia, że siły wewnętrzne w przypadku lepkosprężystym będą mniejsze niż w przypadku sprężystym (proces relaksacji



Rys. 2

konstrukcji). Różnica między tymi rozwiązaniami rośnie z upływem czasu i ze wzrostem współczynnika κ. Rozwiązania są identyczne tylko w początkowym czasie pracy konstrukcji.

Różnice w momentach zginających przedstawia rys. 2.

Literatura cytowana w tekście

1. M. E. Gurtin, E. Strenberg, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, 4, 293 - 355, 1962.
2. J. Kubik, *Metoda sił dla układów lepkosprężystych*, Rozpr. Inżyn. **18**, 1, 595 - 605, 1970.
3. J. Kubik, *Metoda sił i przemieszczeń — układy lepkosprężyste*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Budown., 25, 1968.
4. W. Nowacki, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1960.
5. W. Nowacki, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
6. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego*, N.T. Warszawa 1965.
7. E. Sternberg, *Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych*, Mech. Teoret. i Stos. **2**, 1, 67 - 103, 1963.
8. Б. Е. Победря, *О связанных задачах механики сплошной среды*, Упруг. и неупр., вып. 2, 1971.

Резюме

МЕТОД СИЛ ДЛЯ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В работе даны уравнения метода сил для вязкоупругих систем, подверженных воздействию нестационарного температурного поля. Задача решена в линейном приближении вязкоупругости, без учета термомеханических сопряжений. В рассматриваемой задаче предполагается также, что изменения температуры не влияют на реологические свойства материала, из которого построена система.

Summary

THE METHOD OF FORCES FOR SYSTEMS OF THERMO-VISCOELASTIC RODS

The paper presents the equations of the method of forces for viscoelastic systems subject to the action of a non-stationary temperature field. The solution is found within the framework of linear viscoelasticity, thermo-mechanical coupling effects being disregarded. Rheological properties of the material are assumed to be independent from the temperature.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lipca 1972 r.