

TŁUMIENIE UKŁADÓW MECHANICZNYCH ZA POMOCĄ CIECZY LEPKOSPĘŻYSTYCH

EUGENIUSZ KAMIŃSKI (WARSZAWA)

1. RÓWNIANIA RUCHU CIECZY LEPKOSPĘŻYSTYCH W BADANIACH PROCESÓW TŁUMIENIA

Temat ten został szczegółowo przedyskutowany przez autora w pracy [6]; poniżej zostaną przytoczone tylko najważniejsze fragmenty tej pracy, uzupełnione badaniem ruchu nowego typu tłumika, nie opisanego w [6].

Badanie tłumienia ruchu układów mechanicznych za pomocą cieczy opiera się na analizie równań równowagi dynamicznej [14]

$$(1.1) \quad \rho \left(F_i - \frac{du_i}{dt} \right) + \frac{\partial p_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{3i}}{\partial x_3} = 0, \quad i=1, 2, 3,$$

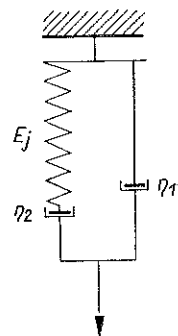
gdzie ρ oznacza gęstość cieczy, F_i składowe sił masowych odniesionych do jednostki masy, u_i prędkości przemieszczeń odpowiednio w kierunku osi x_i , a p_{ik} ($i, k=1, 2, 3$) współrzędne symetrycznego tensora naprężeń, zależnego m.in. od lepkości cieczy. Wielkości u_i jak i p_{ik} mogą być funkcjami zarówno współrzędnych x_i jak i czasu t .

Dla nieściśliwej cieczy newtonowskiej równanie (1.1) przyjmuje postać równań Naviera-Stokesa [14 i 15]

$$(1.2) \quad \rho \left(F_i - \frac{du_i}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i = 0, \quad i=1, 2, 3,$$

gdzie p oznacza ciśnienie hydrostatyczne, μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej [Nsm^{-2}], a symbol ∇ oznacza laplasjan.

Wielu autorów stwierdziło w toku badań doświadczalnych [1, 5, 8, 10, 11 i 12], że ciecze stosowane do tłumienia mają własności lepkospężyste, tzn. że między składowymi tensora naprężeń i odkształceń oraz ich pochodnych względem czasu zachodzą bardziej złożone związki niż w przypadku cieczy newtonowskiej. W pracy [6] rozpatrzono przypadek tzw. cieczy Jeffreysa, której własności mogą być opisane za pomocą modelu reologicznego, pokazanego na rys. 1. Symbole E_j , η_1 i η_2 oznaczają wartości współczynników sprężystości i lepkości elementów wchodzących



Rys. 1

w skład modelu. Związek między dewiatorami odkształceń i naprężeń dla takiej cieczy ma postać [2]

$$(1.3) \quad \eta_2 \dot{p}_{ik} + E_j p_{ik} = \ddot{\gamma}_{ik} \eta_1 \eta_2 + E_j (\eta_1 + \eta_2) \dot{\gamma}_{ik}, \quad i \neq k,$$

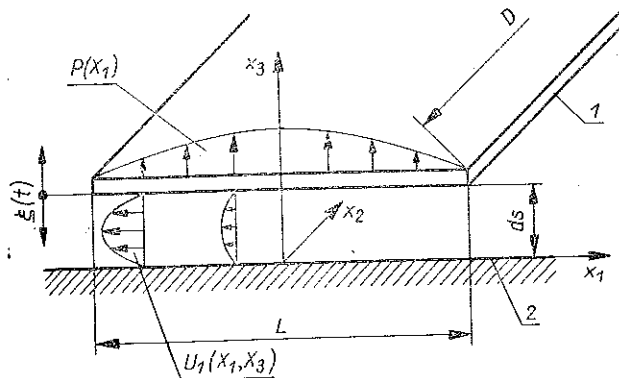
gdzie współrzędne tensora prędkości odkształceń $\dot{\gamma}_{ik}$ mają wartość

$$\dot{\gamma}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Dla nieściślej cieczy Jeffreysa równania równowagi (1.1) przyjmą postać [6]

$$(1.4) \quad \frac{\eta_2}{E_j} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(F_i - \frac{du_i}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \eta_1 \nabla^2 u_i \right] + \\ + \rho \left(F_i - \frac{du_i}{dt} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2) \nabla^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Równania te zostały zastosowane w pracy [6] do badania sił tłumienia w przypadku zbliżania płyty płaskiej oznaczonej numerem 1 na rys. 2 do nieruchomej płyty 2, gdy szczelina d_s wypełniona jest cieczą lepkosprężystą typu Jeffreysa.



Rys. 2

Przy założeniach

$$\xi = \xi_0 \sin \omega t \quad [\text{cm}], \quad h_s \ll L \ll D,$$

$$p = p(x_1), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

oraz po pominięciu sił masowych i sił bezwładności — dla warunków brzegowych

$$[u_1]_{x_3=0} = 0, \quad [u_1]_{x_3=d} = 0, \quad [p]_{x_1=L/2} = 0$$

otrzymuje się następujący wzór na siłę P działającą na płytę:

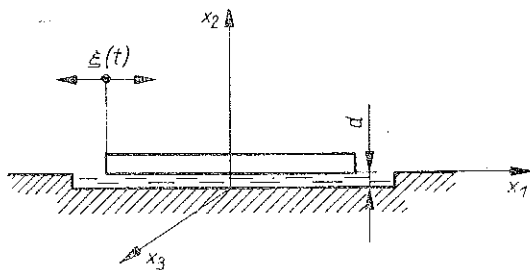
$$(1.5) \quad P = D \frac{B}{A} \left(\frac{L}{h_s} \right)^3 \frac{1}{\left(1 - \frac{\xi_0}{h_s} \sin \omega t \right)^3} (\dot{\xi} \sin \varphi_1 + \xi \omega \cos \varphi_1),$$

gdzie B , A i φ_1 zależą od parametrów cieczy E_j , η_1 , η_2 oraz częstości ruchu płyty ω [6], przy czym

$$A = \sqrt{\frac{\omega^2 \eta_2^2 + E_j^2}{E_j^2}}, \quad B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\eta_1 \eta_2 \omega)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2 E_j^2}{E_j^2}},$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \Omega_2 - \Omega_1, \quad \operatorname{tg} \Omega_1 = \frac{\omega \eta_2}{E_j}, \quad \operatorname{tg} \Omega_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_j (\eta_1 + \eta_2)}.$$

Jak widać jeden składnik siły P jest proporcjonalny do prędkości ruchu płyty $\dot{\xi}$, odpowiada on sile tłumienia, drugi składnik jest proporcjonalny do przemieszczenia ξ ; zwiększa on wraz z częstością ω sztywność układu. Mianownik wyrażenia (1.5) zależy od ξ , w związku z czym obydwie składniki tej siły są nieliniowe: siła tłumienia ma charakterystykę miękka, a siła sprężysta charakterystykę twardą.



Rys. 3

W pracy [6] zbadano również tłumienie realizowane za pomocą płyty o polu powierzchni S (rys. 3) przemieszczającą się w odległości d równoległe do płyty nieruchomej, przy czym przestrzeń między obu płytami wypełniona jest cieczą Jeffreysa. Po przyjęciu założeń

$$u_2 = u_3 = 0, \quad \xi = \xi_0 \sin \omega t, \quad \dot{\gamma}_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad p = 0,$$

oraz po pominięciu sił masowych i bezwładności — dla warunków brzegowych

$$u_1(x_2=0) = 0, \quad u_1(x_2=d) = \dot{\xi}(t)$$

otrzymuje się następujący wzór na siłę P , działającą na płytę:

$$(1.6) \quad P = \frac{1}{2} \frac{S}{d} K (\dot{\xi} \sin \varphi_j + \xi \omega \cos \varphi_j),$$

gdzie

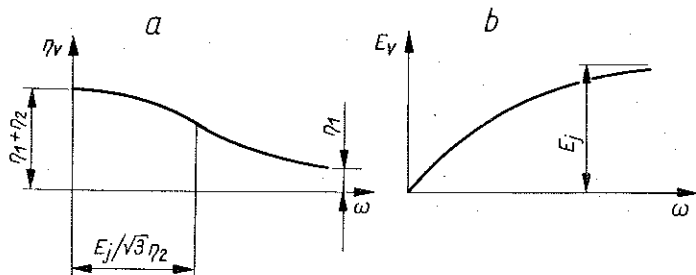
$$K = \sqrt{\frac{E_j^2 (\eta_1 + \eta_2)^2 + (\eta_1 \eta_2 \omega)^2}{E_j^2 + (\eta_2 \omega)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_j = \frac{(\eta_1 + \eta_2) E_j^2 + \eta_1 \eta_2 \omega^2}{E_j \omega \eta_2^2}.$$

Podobnie więc jak poprzednio siła działająca na płytę składa się ze składnika proporcjonalnego do prędkości płyty $\dot{\xi}$, co odpowiada sile tłumiącej, oraz składnika proporcjonalnego do przemieszczenia płyty, co odpowiada dodatkowej sile restytucyjnej. Współczynniki proporcjonalności $K \sin \varphi_j$ i $K \cos \varphi_j$ można przedstawić w bardziej zwartej formie, bardziej przydatnej w zastosowaniach

$$(1.7) \quad K \sin \varphi_j = \eta_v = \frac{E_j^2 (\eta_1 + \eta_2) + \eta_1 \eta_2 \omega^2}{E_j^2 + \eta_2^2 \omega^2},$$

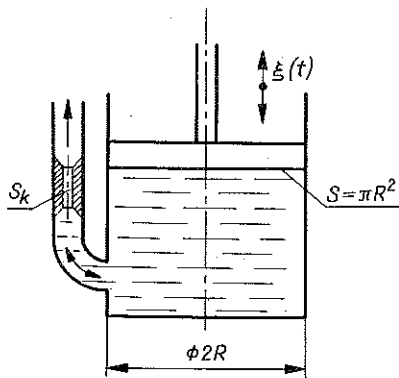
$$(1.8) \quad K \omega \cos \varphi_j = E_v = \frac{E_j (\eta_2 \omega)^2}{E_j^2 + (\eta_2 \omega)^2}.$$

W ten sposób model Jeffreysa został zastąpiony modelem Voigta, w którym charakterystyki elementów składowych, tłumika i sprężyny, zależne są od częstości. Bliższe rozważania na ten temat zawarte są w punkcie następnym. Wykresy $\eta_v(\omega)$ i $E_v(\omega)$ pokazane są na rys. 4.

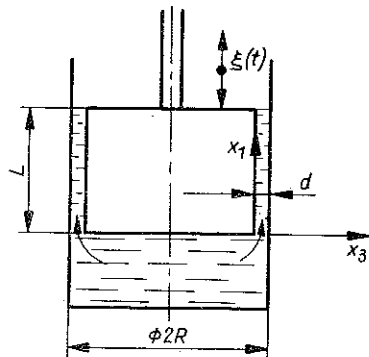


Rys. 4

Kolejny rodzaj tłumienia, nie badany w pracy [6], polega na wyciskaniu cieczy przez szczelinę o przekroju S_k (rys. 5) lub przez szczelinę o grubości d między tłokiem a cylindrem (rys. 6). Podobnie jak w przypadku płyty zbliżanej do podłoża



Rys. 5



Rys. 6

przyjmujemy założenie, że $p = p(x_1)$, $u_2 = u_3 = 0$; $u_1 = u_1(x_1, x_3)$, ale od x_1 zależy liniowo. Warunki brzegowe: $p(L) = 0$, $[u_1]_{x_3=0} = [u_1]_{x_3=d} = 0$. Jeżeli pominięte zostaną siły masowe i bezwładności, to układ równań (1.4) sprowadzi się do jednego równania:

$$(1.9) \quad \frac{\eta_2}{E_j} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \eta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = 0,$$

do którego może być dołączone równanie ciągłości strugi, jeżeli $\xi = \xi_0 \sin \omega t$:

$$(1.10) \quad 2\pi R \int_0^d u_1 dx_3 = \pi R^2 \dot{\xi}(t) = \pi R^2 \xi_0 \omega \cos \omega t.$$

Zarówno ciśnienie jak i prędkość wypływu cieczy ze szczeliny muszą przebiegać w czasie podobnie do ruchu tłoka, mogą one być co najwyżej przesunięte w fazie. Przyjmuje się więc, że

$$(1.11) \quad p = p_0(x_1) \sin(\omega t + \varphi_1), \quad u_1 = u_{10}(x_1, x_3) \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Z warunku ciągłości i wyrażenia na u_1 widać od razu, że $\varphi_2 = \pi/2$.

Wstawiając (1.11) do (1.9) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \left[\frac{\omega \eta_2}{E_j} \cos(\omega t + \varphi_1) + \sin(\omega t + \varphi_1) \right] = \\ = \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_3^2} \left[-\frac{1}{2} \frac{\eta_1 \eta_2}{E_j} \sin \omega t + \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2) \cos \omega t \right] \end{aligned}$$

lub

$$(1.12) \quad \frac{\partial p_0}{\partial x_1} A \sin(\omega t + \varphi_1 + \Omega_1) = \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x_3^2} B \cos(\omega t + \Omega_2),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Omega_1 = \frac{\omega \eta_2}{E_j}, \quad \operatorname{tg} \Omega_2 = \frac{\eta_1 \eta_2 \omega}{E_j (\eta_1 + \eta_2)}, \\ A = \sqrt{\frac{\omega^2 \eta_2^2 + E_j^2}{E_j^2}}, \quad B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\eta_1 \eta_2 \omega)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2 E_j^2}{E_j^2}}. \end{aligned}$$

Po dwukrotnym scałkowaniu (1.12) otrzymuje się

$$(1.13) \quad u_{10} = \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \frac{A \sin(\omega t + \varphi_1 + \Omega_1)}{B \cos(\omega t + \Omega_2)} \frac{x_3^2}{2} + C_1 x_3 + C_2.$$

Amplituda w żadnej chwili nie może osiągać wartości nieskończenie dużej, więc

$$\sin(\omega t + \varphi_1 + \Omega_1) = \cos(\omega t + \Omega_2), \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \Omega_2 - \Omega_1.$$

Z warunków brzegowych wynika, że $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \frac{A}{B} \frac{h}{2}$, więc

$$(1.14) \quad u_{10} = \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \frac{A}{B} \frac{1}{2} (x_3^2 - h x_3).$$

Warunek ciągłości przyjmuje postać

$$(1.15) \quad \int_0^h \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \frac{A}{B} (x_3^2 - h x_3) dx_3 = R \xi_0 \omega$$

czyli

$$(1.16) \quad \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \frac{A}{B} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right) = R \xi_0 \omega$$

oraz

$$(1.17) \quad \frac{\partial p_0}{\partial x_1} = -6 \frac{B}{A} \frac{R}{h^3} \xi_0 \omega.$$

Po scałkowaniu i wykorzystaniu warunku brzegowego znajdziemy

$$(1.18) \quad p_0 = 6 \frac{B}{A} \frac{R}{h^3} \xi_0 \omega (L - x_1).$$

Amplituda prędkości wyniesie

$$(1.19) \quad u_{10} = 3 \frac{R}{h^3} \xi_0 \omega (hx_3 - x_3^2).$$

Ostatecznie więc

$$(1.20) \quad p = 6 \frac{B}{A} \frac{R}{h^3} \xi_0 \omega (L - x_1) \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$(1.21) \quad u_1 = 3 \frac{R}{h^3} \xi_0 \omega (hx_3 - x_3^2) \cos \omega t = 3 \frac{R}{h^3} (hx_3 - x_3^2) \dot{\xi}.$$

Wprowadzając pojęcie prędkości średniej

$$(1.22) \quad u_{1s} = \frac{\pi R^2}{2\pi R h} \dot{\xi} = \frac{R}{2h} \dot{\xi},$$

można napisać

$$(1.23) \quad u_1 = 6 \frac{1}{h^2} (hx_3 - x_3^2) u_{1s}.$$

Siła działająca na tłok tłumika składa się znów ze składników proporcjonalnych do $\dot{\xi}$ i ξ :

$$(1.24) \quad P = [\pi R^2 p]_{x_1=0} = \frac{6\pi R^3 B L}{h^3 A} \xi_0 \omega (\sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1) = \\ = \frac{6\pi R^3 B L}{h^3 A} (\dot{\xi} \sin \varphi_1 + \omega \xi \cos \varphi_1).$$

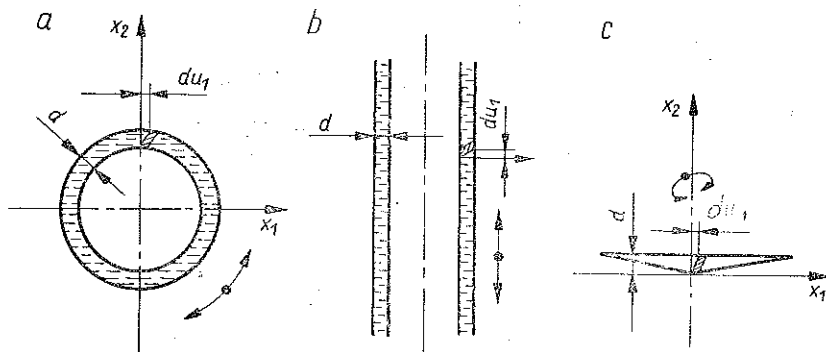
Jeżeli tłumienie realizuje się za pomocą cieczy Newtona o lepkości $\mu = \eta_1/2$, to $\eta_2 = 0$, $A = 1$, $B = \eta_{1/2} = \mu$, $\varphi_1 = \pi/2$ oraz

$$(1.25) \quad P = \frac{6\pi R^3 L \mu}{h^3} \dot{\xi}.$$

2. WYZNACZANIE PARAMETRÓW REOLOGICZNYCH CIECZY METODAMI KLASYCZNYMI. ANALIZA OTRZYMYWANYCH WYNIKÓW

Obecnie stosowane metody eksperymentalnego wyznaczania wartości parametrów reologicznych cieczy [1, 8, 11 i 12] mają dwie cechy wspólne: badania prowadzi się w sposób dynamiczny, a interpretacja i ocena wyników opiera się na założeniu, że model badanej cieczy jest dwuparametrowy: jest ciałem Maxwella

lub Voigta. Stosowana w powyższych metodach aparatura nie jest znormalizowana, ale wszystkie aparaty są tak budowane, aby możliwe było wyznaczenie z góry tensora odkształceń lub pochodnych odkształceń względem czasu badanej cieczy: ma w niej panować proste ścinanie. Taki stan odkształceń był już omówiony w poprzednim punkcie (rys. 3). Stan taki można również realizować za pomocą dwóch koncentrycznych tulei wzajemnie obracających się (rys. 7a) lub przesuujących wzdłuż



Rys. 7

osi (rys. 7b), a także przez zastosowanie stożka o kącie bliskim 180°, stykającego się ostrzem z płaską płytą; typowy układ dla reogoniometru Weissenberga przedstawia rys. 7c. Jak łatwo sprawdzić, również w przypadku cieczy lepkosprężystych w układach pokazanych schematycznie na rys. 7 panuje stan prostego ścinania.

Z analizy warunków pracy pokazanych aparatów łatwo wysnuć wniosek, że pomijalne są tu siły masowe i siły bezwładności, co prowadzi do wniosku wobec założonej uprzednio nieściśliwości cieczy, że tensory kuliste naprężeń i odkształceń oraz ich pochodnych w warstwie cieczy są tożsamościowo równe zero. Równania stanu sprowadzają się więc do szczególnie prostego związku między dewiatorami naprężeń i odkształceń [9]:

$$(2.1) \quad p_{ik} = \begin{cases} \frac{\Gamma_d}{\pi_d} \dot{\gamma}_{ik} & \text{dla } i \neq k, \\ 0 & \text{dla } i = k. \end{cases}$$

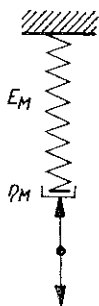
Wobec tego, że w badanej warstwie panuje stan prostego ścinania, układy równań (2.1) sprowadzają się do pojedynczego równania, którego postać zależy od operatorów Γ_d i π_d . Operatory te zależą z kolei od przyjętego modelu cieczy. Dla ich wyznaczenia uogólnia się wyniki, uzyskiwane pierwotnie dla modeli w jednoosiowym stanie naprężeń [2, 9 i 13]. I tak równanie (2.1) dla ciała Maxwella (rys. 8) przyjmuje następującą postać dla układu współrzędnych, przedstawionych na rys. 7:

$$(2.2) \quad \frac{1}{E_M} \dot{p}_{12} + \frac{1}{\eta_M} p_{12} = \dot{\gamma}_{12},$$

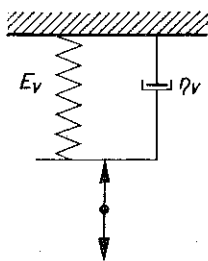
a dla ciała Voigta (rys. 9) postać

$$(2.3) \quad p_{12} = E_V \gamma_{12} + \eta_V \dot{\gamma}_{12}.$$

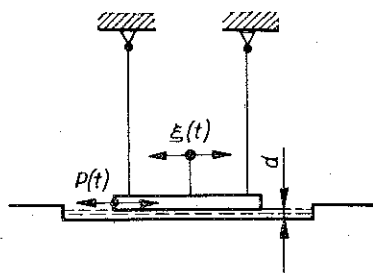
Równania powyższe wykorzystuje się właśnie przy eksperymentalnym wyznaczeniu parametrów reologicznych E_M i η_M lub E_V i η_V . Zasada eksperymentu jest następująca. Do płytki o masie m (rys. 10) przykładają się siłę okresowo zmienną $P(t)$.



Rys. 8

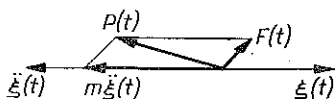


Rys. 9



Rys. 10

Płytką jest odciążona, np. wisi na długich niciach. Szczelina d wypełniona jest badany olejem. Płytką styka się z warstwą oleju na powierzchni S . W czasie próby dokonuje się pomiaru: przemieszczenia płytki $\xi(t)$, przyspieszenia $\ddot{\xi}(t)$ i siły $P(t)$. Siła (rys. 11)

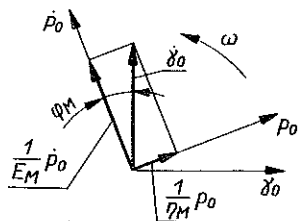


Rys. 11

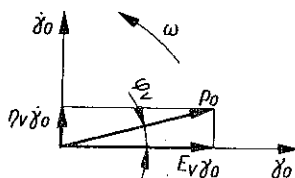
$$\vec{F}(t) = \vec{P}(t) - m\ddot{\xi}(t)$$

jest miarą oporu, jaki stawia warstwa cieczy przy jej ścinaniu. Wielkość $\xi(t)/2d$ jest miarą odkształcenia γ_{12} , natomiast $F(t)/S$ jest miarą naprężenia ścinającego p_{12} . W przypadku cieczy lepkiej (tzw. newtonowskiej) między p_{12} i γ_{12} nie ma przesunięcia fazowego, natomiast w przypadku cieczy lepkosprężystej p_{12} opóźnia się w stosunku do γ_{12} . Ogólnie biorąc mamy

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \gamma_0 \sin \omega t, & \dot{\gamma}_{12} &= \gamma_0 \omega \sin(\omega t + \pi/2), \\ p_{12} &= p_0 \sin(\omega t + \varphi), & \dot{p}_{12} &= p_0 \omega \sin(\omega t + \varphi + \pi/2). \end{aligned}$$



Rys. 12



Rys. 13

Na rys. 12 i 13 pokazano wykresy wektorowe, zbudowane na podstawie równań (2.2) i (2.3), dotyczących ustalonych stanów ruchu, przydatne do wyznaczania szukanych parametrów. Wprowadzono tam następujące oznaczenia:

$$\gamma_0 \omega = \dot{\gamma}_0, \quad p_0 \omega = \dot{p}_0.$$

Na podstawie tych wykresów łatwo wyznaczyć wartości poszczególnych parametrów. Dla cieczy Maxwella mamy mianowicie

$$(2.4) \quad \frac{\dot{p}_0}{\dot{\gamma}_0 \cos \varphi_M} = \frac{E_M \dot{p}_0}{\dot{p}_0} = E_M, \quad \frac{p_0}{\dot{\gamma}_0 \sin \varphi_M} = \frac{\eta_M p_0}{p_0} = \eta_M, \quad \operatorname{tg} \varphi_M = \frac{E_M}{\omega \eta_M},$$

a dla cieczy Voigta

$$(2.5) \quad \frac{p_0 \cos \varphi_V}{\dot{\gamma}_0} = \frac{E_V \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = E_V, \quad \frac{p_0 \sin \varphi_V}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_V \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \eta_V, \quad \operatorname{tg} \varphi_V = \frac{\omega \eta_V}{E_V}.$$

Gdyby własności przyjętych modeli Maxwella i Voigta odpowiadały własnościom rzeczywistym cieczy, to wyznaczone tu parametry E_M i η_M lub, odpowiednio, E_V i η_V powinny być stałe, a więc niezależne od częstości ω . Tak jednak najczęściej nie jest. Jeżeli obliczenia zostaną przeprowadzone na podstawie modelu Maxwella, to z reguły okazuje się, że wartość parametru E_M wraz z częstością rośnie, natomiast η_M maleje. Oznacza to, że albo zmieniają się własności fizyczne cieczy, albo że do obliczeń został przyjęty model zbyt uproszczony.

W uzupełnieniu tych rozważań przypomnijmy, że rozwiązując równania (2.2) i (2.3) lub wykorzystując wykresy pokazane na rys. 12 i 13 uzyskuje się następujące zależności między naprężeniem ścinającym p_{12} , a odkształceniem γ_{12} (jeżeli $\gamma_{12} = \gamma_0 \sin \omega t$):

dla cieczy Maxwella

$$(2.6) \quad p_{12} = \gamma_0 \frac{E_M \eta_M \omega}{\sqrt{E_V^2 + (\eta_M \omega)^2}} \sin(\omega t + \varphi_M);$$

dla cieczy Voigta

$$(2.7) \quad p_{12} = \gamma_0 \sqrt{E_V^2 + (\omega \eta_V)^2} \sin(\omega t + \varphi_V).$$

Wartości kątów φ_M i φ_V wynikają z (2.4) i (2.5).

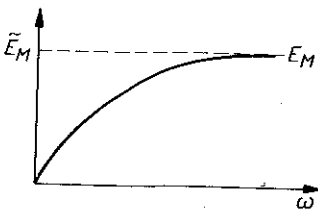
Stosunek $p_0/\dot{\gamma}_0 = \tilde{E}$ nosi nazwę zastępczego modułu sprężystości [2]. Wynosi on dla cieczy Maxwella

$$(2.8) \quad \tilde{E}_M = \frac{E_M \eta_M \omega}{\sqrt{E_M^2 + (\eta_M \omega)^2}},$$

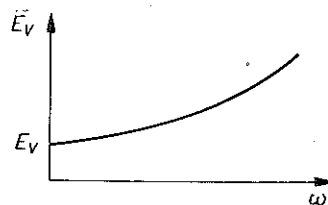
dla cieczy Voigta

$$(2.9) \quad \tilde{E}_V = \sqrt{E_V^2 + (\omega \eta_V)^2}.$$

Zmiany wartości \tilde{E} zależnie od częstości ω pokazano na rys. 14 i 15.



Rys. 14



Rys. 15

Zastępczy moduł sprężystości \tilde{E} równa się wartości bezwzględnej tzw. «zespolonego modułu dynamicznego» przy ścinaniu, który jest oznaczony najczęściej przez G^* [8 i 12]. Nazwa wynika stąd, że może on być przedstawiony w postaci liczby zespolonej

$$(2.10) \quad G^* = G' + iG'' = \frac{p_0 \cos \varphi}{\gamma_0} + i \frac{p_0 \sin \varphi}{\gamma_0},$$

przy czym wtedy

$$(2.11) \quad \tilde{E} = |G^*| = \sqrt{G'^2 + G''^2}.$$

Część rzeczywista G' nosi nazwę «modułu zachowania» przy ścinaniu, a G'' «modułu stratności» przy ścinaniu. Na podstawie rys. 12 i 13 łatwo ustalić, że wartości G' i G'' wynoszą odpowiednio:

dla cieczy Maxwella

$$(2.12) \quad G' = \frac{E_M (\omega \eta_M)^2}{E_M^2 + (\omega \eta_M)^2}, \quad G'' = \frac{E_M^2 \omega \eta_M}{E_M^2 + (\omega \eta_M)^2};$$

dla cieczy Voigta

$$(2.13) \quad G' = E_V, \quad G'' = \eta_V \omega.$$

Analogicznie do zespolonego modułu dynamicznego wprowadzono pojęcie «zespolonej lepkości dynamicznej»:

$$(2.14) \quad \eta^* = \eta' - i\eta'' = \frac{p_0 \sin \varphi}{\gamma_0 \omega} - i \frac{p_0 \cos \varphi}{\gamma_0 \omega}.$$

Z porównania (2.14) i (2.10) wynika, że

$$(2.15) \quad |\eta^*| = \frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{|G^*|}{\omega}, \quad \eta' = \frac{G''}{\omega}, \quad \eta'' = \frac{G'}{\omega}.$$

Część rzeczywista η' nazywana jest w skrócie lepkością dynamiczną [8]. Na rys. 16 pokazano przykładowo wartości η' i G' w zależności od częstości $f = 2\pi\omega$ dla kilku gatunków olejów, zaczerpnięte z pracy [1].

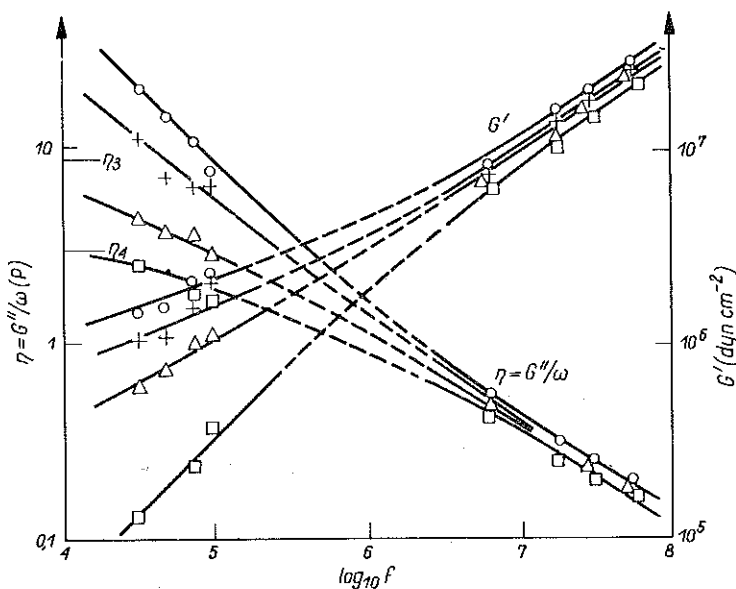
Przyjęcie do analizy wyników badań eksperymentalnych parametrów lepkością dynamiczną modelu Maxwella lub Voigta jest w istocie dowolne. Wynika to z wzajemnej zamienialności tych modeli przez odpowiednio dobrane wartości parametrów, oczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy wymuszenie jest sinusoidalne, gdy drgania są już ustalone i gdy badane ciecze mają charakterystyki liniowe. Ten czysto formalny sposób może przynieść istotne korzyści przy analizie rozprężalności układów tłumionych za pomocą cieczy lepkością dynamiczną. Po przyrównaniu amplitud w równaniach ruchu (2.6) i (2.7) oraz kątów φ_M i φ_V wg (2.4) i (2.5) można wyrazić parametry modelu Maxwella za pomocą parametrów modelu Voigta:

$$(2.16) \quad \eta_M = \eta_V \left[1 + \left(\frac{E_V}{\eta_V \omega} \right)^2 \right], \quad E_M = E_V \left[1 + \left(\frac{\eta_V \omega}{E_V} \right)^2 \right]$$

i odwrotnie

$$(2.17) \quad \eta_V = \eta_M \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega \eta_M}{E_M}\right)^2}, \quad E_V = E_M \frac{1}{1 + \left(\frac{E_M}{\omega \eta_M}\right)^2}.$$

Jeżeli własności cieczy należałoby opisać za pomocą modelu więcej niż dwuparametrowego, np. Jeffreysa, to powyższy tok postępowania przy wyznaczaniu parametrów takiego modelu nie mógłby być wykorzystany. Nie można by w szczególności zbudować wykresu wektorowego typu pokazanego na rys. 12 i 13, bo równania stanu składają się z czterech wyrazów. Interesujące jest jednak, jakie w tym przypadku byłyby wartości modeli zastępczych η_M i E_M lub η_V i E_V , wyrażone za pomocą parametrów modelu Jeffreysa E_J, η_1 i η_2 .



Rys. 16

Rozwiązanie równania stanu dla ciała w sensie Jeffreysa (1.3)

$$(2.18) \quad p_{12} + \frac{\eta_2}{E_J} \dot{p}_{12} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\gamma}_{12} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_J} \ddot{\gamma}_{12}$$

przy wymuszeniu

$$\gamma_{12} = \gamma_0 \sin \omega t = \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{d} \sin \omega t$$

dla stanu ustalonego ma postać

$$(2.19) \quad P_{12} = \frac{1}{2} \frac{\xi_0 \omega}{d} K \sin(\omega t - \varphi_j),$$

gdzie K i φ_j mają wartości wg (1.6). Przyrównując amplitudę $p_{12 \max}$ i $\tan \varphi_j$ do odpowiednich wyrażeń dla ciała Maxwella wg (2.6) lub korzystając wprost z zależności (2.4) otrzymuje się

$$(2.20) \quad \eta_M = \frac{E_J^2 (\eta_1 + \eta_2)^2 + (\eta_1 \eta_2 \omega)^2}{E_J^2 (\eta_1 + \eta_2) + \eta_1 \eta_2^2 \omega^2}$$

oraz

$$(2.21) \quad E_M = \frac{E_J^2 (\eta_1 + \eta_2)^2 + (\eta_1 \eta_2 \omega)^2}{E_J \eta_2^2}$$

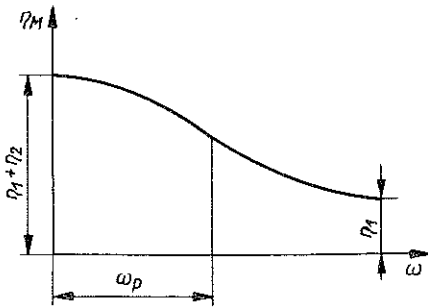
Funkcja $\eta_M(\omega)$ ma maksimum, gdy $\omega = 0$ ($\eta_{M \max} = \eta_1 + \eta_2$); gdy $\omega \rightarrow \infty$, $\eta_M \rightarrow \eta_1$, natomiast gdy

$$(2.22) \quad \omega_p = \frac{E_J}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2^2}},$$

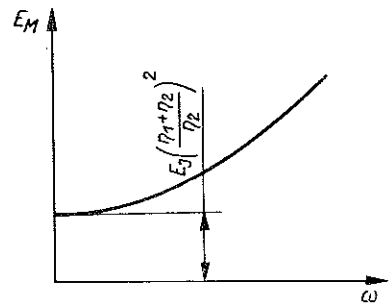
ma punkt przegięcia. Funkcja $E_M(\omega)$ jest monotonicznie rosnąca począwszy od wartości początkowej

$$[E_M]_{\omega=0} = E_J \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_2^2}.$$

Wykresy $\eta_M(\omega)$ i $E_M(\omega)$ pokazano na rys. 17 i 18.



Rys. 17



Rys. 18

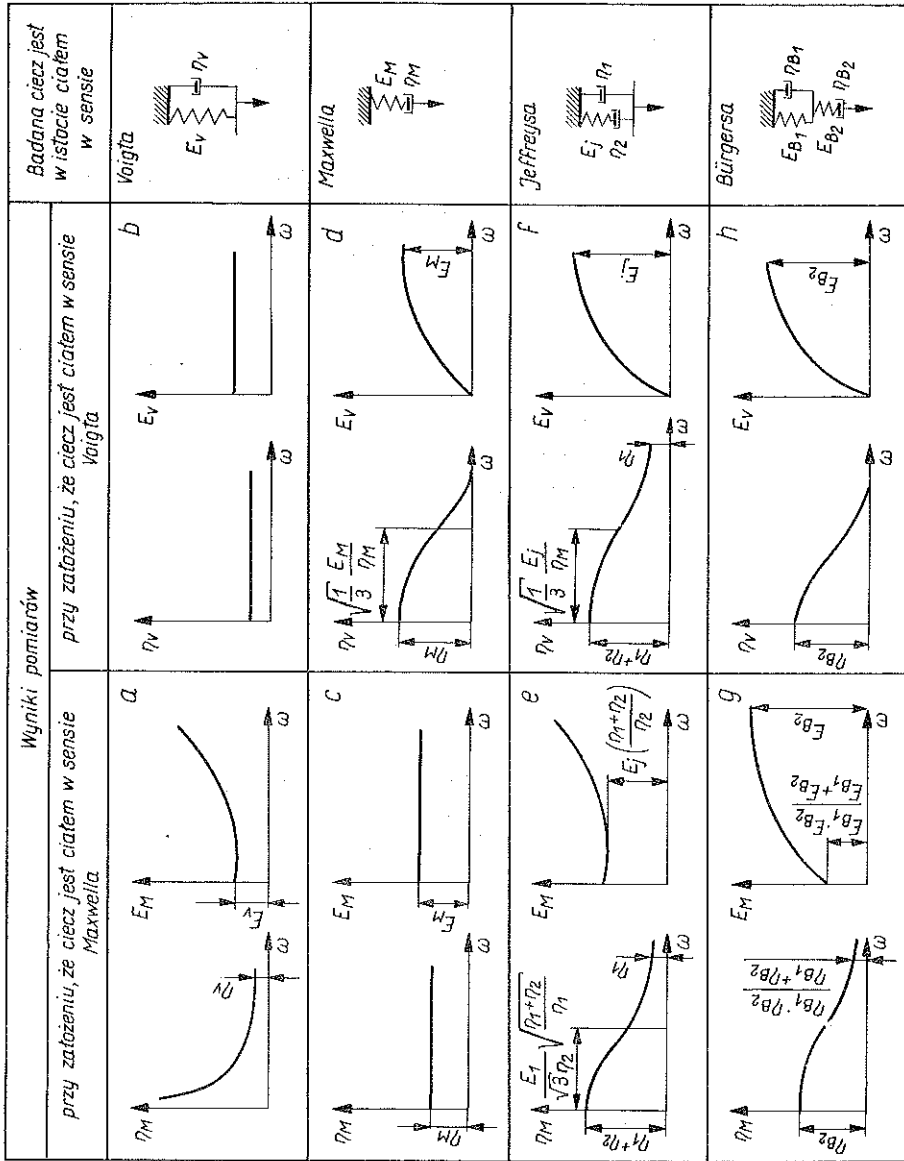
Warto jeszcze dodać, że częstość ω_p , przy której występuje przegięcie krzywej $\eta_M(\omega)$, jest zależna od czasu relaksacji τ_J w elemencie Maxwella, wchodzącego w skład elementu Jeffreysa:

$$\tau_J = \frac{\eta_2}{E_J}.$$

Mamy bowiem, zamiast (2.22),

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{3} \tau_J} \sqrt{\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1}}.$$

Gdy $\eta_1 \rightarrow 0$, $\omega_p \rightarrow \infty$, to $\eta_M \rightarrow \eta_2 = \text{const}$.



Rys. 19

Z porównania parametrów ruchu ciał Jeffreysa i Voigta uzyskuje się wzory na η_V i E_V zgodnie z (1.7) i (1.8).

Uzyskane w toku tego rodzaju analizy wyniki zestawiono na rys. 19. Jak widać, istnieje możliwość dopasowania wykresów rzeczywistych do wykresów obliczeniowych, pokazanych na rys. 19 i tym samym dobranie jednego z trzech pokazanych tu modeli, mogących reprezentować ciecz: modelu Maxwella, Jeffreysa lub Bürgersa. Po dobraniu modelu łatwo wyznaczyć wartości jego parametrów na podstawie danych liczbowych na wykresach c, e i g, odpowiadające częstości wymuszeń $\omega=0$ i $\omega \rightarrow \infty$. Z wykresów pokazanych na rys. 19 widać również, że przyjęcie do obliczeń wyników pomiarów modelu Maxwella jest wygodniejsze, ponieważ przy tej metodzie uzyskuje się wyraźniejsze różnice jakościowe kształtu wykresów dla poszczególnych typów cieczy.

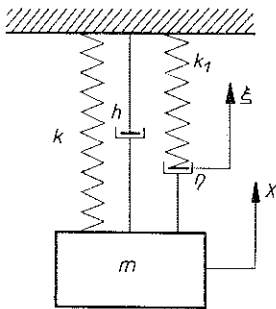
W następnym punkcie pokazany zostanie sposób wyznaczania charakterystyk cieczy na podstawie badań układu mechanicznego o jednym stopniu swobody.

Warto tu jeszcze dodać, że znajomość parametrów cieczy o budowie bardziej złożonej, więcej niż dwuparametrowej, jest konieczna przy badaniu procesów przejściowych, natomiast do badań procesów ustalonych, przy wymuszeniu harmonicznym z częstością ω , wystarczająca może być znajomość funkcji zastępczych $\eta_V(\omega)$ i $E_V(\omega)$ [7].

3. UKŁADY DRGAJĄCE O JEDNYM STOPNIU SWOBODY, TLUMIONE ZA POMOCĄ CIECZY LEPKOSPŘĘŻYSTYCH O CHARAKTERYSTYKACH LINIOWYCH I NIELINIOWYCH

Podczas prowadzonych przez autora prac nad doбором tłumika hydraulicznego do akcelerometru mechanicznego zostały stwierdzone wyraźne odstępstwa kształtu i wartości charakterystyk amplitudowych rzeczywistych od przewidywanych dla typowego modelu układu. Przeprowadzone w związku z tym bardziej szczegółowe badania układu o jednym stopniu swobody, w którym występują człony «sprężyste» i «tłumiące» zarówno w układzie Voigta jak i Maxwella, dostarczyły wskazówek, umożliwiających rozszerzenie zakresu pomiarowego akcelerometru bez obniżenia

jego czułości oraz wskazały na możliwość wykorzystania charakterystyk amplitudowo-częstościowych tego akcelerometru do wyznaczania wartości parametrów reologicznych cieczy.



Rys. 20

Układ o jednym stopniu swobody, tłumiony za pomocą cieczy lepkosprężystej, pokazano na rys. 20. Sprężyna o sztywności k i masa m reprezentują rzeczywiste elementy układu, natomiast pozostałe człony: tłumiki o charakterystykach h i η oraz sprężyna o sztywności k_1 reprezentują ciecz lepkosprężystą typu Jeffreysa. Ciecz ta wypełnia szczelinę tłumika hydraulicznego, zbudowanego wg zasady pokazanej na rys. 3. Współczynniki h , k_1

i η zależne są od wartości parametrów konstrukcyjnych rzeczywistego układu, w szczególności od powierzchni czynnej tłumika S i szczeliny d oraz od wartości

parametrów cieczy Jeffreysa. Warto zwrócić uwagę, że układy nie zawierające członu tłumiącego typu Newtona ($h=0$) były analizowane przez kilku autorów, np. [2 i 3]. Wprowadzenie tego członu ($h \neq 0$) nie powoduje oczywiście żadnych trudności obliczeniowych, ale w istotny sposób zmienia postać charakterystyki dynamicznej.

Równania ruchu masy m mają postać

$$(3.1) \quad m\ddot{x} + (k_1 + \eta)\dot{x} + kx - \eta\dot{\xi} = P_0 \sin \omega t, \\ -\eta\dot{x} + \eta\dot{\xi} + k_1\xi = 0.$$

Symbol ξ oznacza przemieszczenie umownego tłoka. Ruch ustalony masy opisuje równanie

$$(3.2) \quad x = A \sin(\omega t - \varphi),$$

gdzie

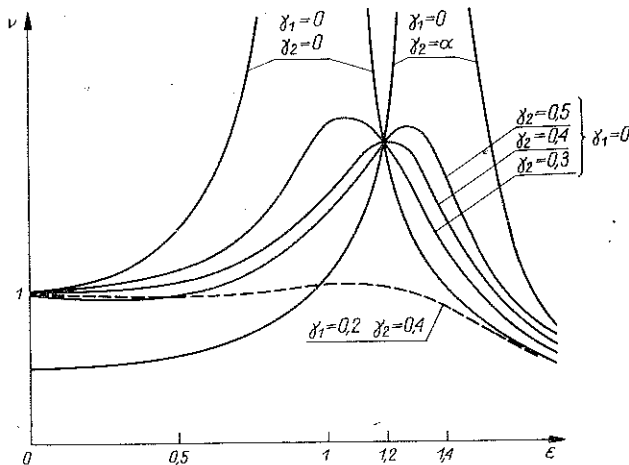
$$(3.3) \quad A = x_{st} \frac{\sigma^4 + 4\gamma_2^2 \varepsilon^2}{\sqrt{[(1 - \varepsilon^2)\sigma^4 + 4\gamma_2^2 \varepsilon^2(1 + \sigma^2 - \varepsilon^2)]^2 + [2\gamma_1 \varepsilon(\sigma^4 + 4\gamma_2^2 \varepsilon^2) + 2\gamma_2^2 \sigma^4 \varepsilon]^2}} = x_{st} \nu;$$

$$(3.4) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma_1 \varepsilon(\sigma^4 + 4\gamma_2^2 \varepsilon^2) + 2\gamma_2^2 \sigma^4 \varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)\sigma^4 + 4\gamma_2^2 \varepsilon^2(1 + \sigma^2 - \varepsilon^2)},$$

$$h/m = 2\delta_1, \quad \eta/m = 2\delta_2, \quad k/m = \omega_0^2, \quad k_1/m = \omega_2^2,$$

$$x_{st} = P_0/k, \quad \omega_2/\omega_0 = \sigma, \quad \gamma_1 = \delta_1/\omega_0, \quad \gamma_2 = \delta_2/\omega_0, \quad \varepsilon = \omega/\omega_0.$$

Na rys. 21 pokazano kilka charakterystyk $x_{st} \nu(\varepsilon) = f(\varepsilon)$ (gdy $x_{st} = 1$) wg wzoru (3.3), a na rys. 22 $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ wg (3.4) dla $\sigma = 1$. Przypadek układu dla $\gamma_1 = 0$ jest

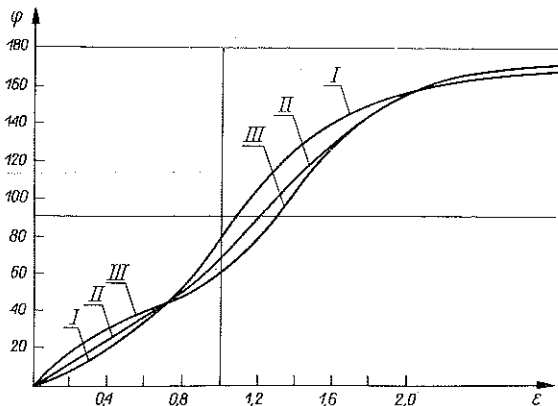


Rys. 21

szczegółowo rozpatrzony w [3]. W odróżnieniu od układu «typowego», z tłumieniem wiskotycznym, wartość ε_{max} , przy której występuje ν_{max} , mieści się w dużym przedziale, zależnie od wartości γ_2 , przy czym z reguły $\varepsilon_{max} > 1$ dla $\gamma_2 > 0$ i $\gamma_1 = 0$. Ponadto, nawet jeżeli $\nu_{max} > 1$, to w przedziale $0 < \varepsilon < \varepsilon_{max}$ może być $\nu < 1$.

Na rys. 21 naniesiono linią przerywaną charakterystykę dla $\gamma_2=0,4$ oraz $\gamma_1=0,2$. Krzywa ta zachowuje wymienione przed chwilą cechy, ale jest przy tym bardzo płaska.

Aż do $\varepsilon=1,35$ wartość ν nie różni się od jedności więcej niż o 4%. Wskazuje to na celowość zastosowania podobnego układu jak na rys. 20 w budowie akcelerometrów. Rozumie się przy tym, że samo zastosowanie cieczy lepkosprężystych może nie zawsze być wystarczające do osiągnięciażądanego celu i wtedy zasłaby potrzeba budowy systemu tłumików. Autor zgłosił wynalazczy projekt na budowę takiego właśnie akcelerometru i uzyskał w 1970 r. patent nr 61630.



Rys. 22

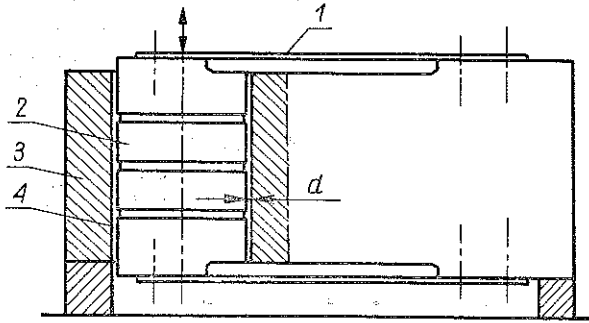
Rozważania powyższe wskazują na możliwość wykorzystania układu o jednym stopniu swobody do wyznaczania wartości parametrów reologicznych cieczy o charakterystykach liniowych pod tym jedynie warunkiem, że w warstwie cieczy tłumiącej drgania tego układu panować będzie proste ścinanie.

Jeżeli z góry zostanie przyjęte, że badana ciecz jest ciałem Jeffreysa, to wartości parametrów mogą być obliczone na podstawie charakterystyki amplitudowo-częstościowej (rys. 21) lub fazowoczęstościowej (rys. 22). Należy bowiem zwrócić uwagę [7], że analogicznie do (1.6) będziemy mieli

$$(3.5) \quad 2\delta_1 = \frac{1}{2} \frac{S}{dm} \eta_1, \quad 2\delta_2 = \frac{1}{2} \frac{S}{dm} \eta_2, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{S}{dm} E_j.$$

A oto przykład tego typu postępowania. Na rys. 23 pokazano schemat prostego przyrządu, wykorzystanego przez autora do badania cieczy tłumiących [4]. Tłok 2 o masie m podwieszony jest na płaskich sprężynach 1. Tłumienie realizowane było przez wypełnienie szczeliny 4 różnymi olejami. Można przyjąć, że w oleju panował stan prostego ścinania. Obudowa przyrządu 3 umocowana była do płyty stołu wibracyjnego, za pomocą którego wymuszano kinematycznie drgania masy m . Przyspieszenie płyty utrzymane było na stałym poziomie 0,5; 1; 1,5; 2 g. Podczas badań mierzono przemieszczenia względne tłoka 2 w stosunku do obudowy 3 za pomocą czujnika indukcyjnego i zestawu rejestrującego Kelvina i Hughesa. Dane liczbowe

przyrządu: sztywność sprężyny $k=11\ 800\ \text{Nm}^{-1}$ ($12\ \text{kGcm}^{-1}$), masa drgająca $m=0,3\ \text{kg}$, częstość drgań własnych $\omega_0=200/\text{s}=32\ \text{Hz}$, pole powierzchni czynnej tłoka $S=3,77\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$ (średnica 3 cm, wysokość 4 cm), szczelina $d=6\cdot 10^{-5}\ \text{m}$



Rys. 23

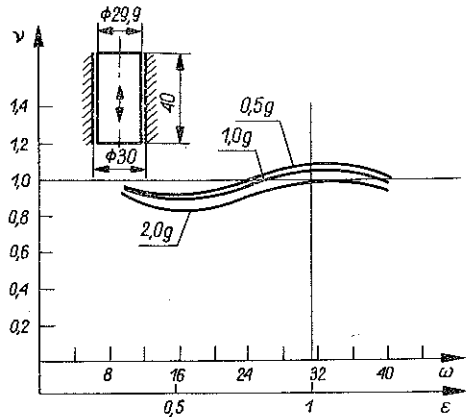
(w niektórych badaniach była inna). Po wyznaczeniu charakterystyk przy tłumieniu olejem parafinowym (rys. 24) ustalono, że pokrywają się one bez większych odchyśleń z charakterystykami wyznaczonymi teoretycznie wg (3.3) dla układu o wartościach parametrów: $\sigma=1$; $\gamma_1=0,2$; $\gamma_2=0,4$. Wobec tego zgodnie z (3.5) i poprzednimi oznaczeniami

$$\eta_1 = \frac{2 \cdot 2dm\omega_0 \gamma_1}{S} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{-5} \cdot 0,3 \cdot 200 \cdot 0,2}{3,77 \cdot 10^{-3}} = 0,764\ [\text{Nsm}^{-2}]$$

$$(0,78 \cdot 10^{-5}\ [\text{kGscm}^{-2}]),$$

$$\eta_2 = 2\eta_1 = 1,528\ [\text{Nsm}^{-2}]$$

$$(1,56 \cdot 10^{-5}\ [\text{kGscm}^{-2}]),$$



Rys. 24

$$E_J = \frac{2dm\omega_0^2 \sigma^2}{S} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-5} \cdot 0,3 \cdot 40\ 000 \cdot 1}{3,77 \cdot 10^{-3}} = 380\ [\text{Nm}^{-2}]$$

$(3,88 \cdot 10^{-3}\ \text{kG cm}^{-2} = 3800\ \text{dyn/cm}^2)$.

Rząd wielkości η_1 i η_2 odpowiada wartościom lepkości dynamicznej, wyznaczonej w sposób klasyczny, tzn. przy stałej prędkości ścinania (nie uwidoczniają się wówczas własności sprężyste, a $2\mu = \eta_1 + \eta_2$). Wartość liczbową E_J podana jest tu po raz pierwszy.

Wyniki badań układu tłumionego za pomocą cieczy lepko-sprężystej o nieliniowych charakterystykach podane są w pracach autora [4 i 7].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. J. BARLOW, J. LAMB, *The visco-elastic behavior of lubricating oil under cyclic shearing stress*, Proc. R. Soc., Ser. A, Nr 1272, **253**, 1959.
2. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, 1958.
3. C. M. HARRIS, C. E. CREDE, *Shock and vibrations handbook*, McGraw-Hill, 1962.
4. E. KAMIŃSKI, *Wpływ nieliniowych parametrów na charakterystyki przenoszenia bezwładnościowych przyrządów pomiarowych*, Księga Sympozjum Dyn. Konstrukcji, RTPN, Rzeszów 1968.
5. E. KAMIŃSKI, *Badanie własności dynamicznych cieczy tłumiących*, Sbornik V Konf. «Dynamika stroju», Liblice 1968.
6. E. KAMIŃSKI, *Wykorzystanie równań ruchu cieczy lepkosprężystej do badania procesów tłumienia*, Prace IPPT, Nr 20, 1969, także Księga II Konf. Dyn. Maszyn, Rzeszów 1971.
7. E. KAMIŃSKI, *Identyfikacja układów mechanicznych z członami lepkosprężystymi*, Prace IPPT, Nr 37, 1971.
8. A. S. LODGE, *Elastic liquids*, Academic Press, 1964.
9. J. OSIECKI, *The construction of discrete vibrating model and the existence of weak couplings in the practical analysis of machine dynamics*, Zag. Drgań Niel., Nr 10, 1969.
10. A. C. PIPKIN, T. G. ROGERS, *A non-linear integral representation for viscoelastic behaviours*, J. Mech. Phys. Solids, **16**, 1, 1968.
11. R. PŁOWIEC, *Wyznaczanie lepkosprężystych właściwości cieczy przy pomocy ultradźwiękowych drgań poprzecznych*, praca doktorska IPPT-PAN, 1970.
12. W. L. WILKINSON, *Ciecze nielowtonowskie*, NT, 1963.
13. S. ZAHORSKI, *Ciecze nielowtonowskie w świetle mechaniki kontinuum*, Mech. Teoret. i Stos., **7**, 4, 1969.
14. А. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, Гос. изд. теорет. лит., 1950.
15. С. И. Сергеев, *Демпфирование механических колебаний*, Гос. изд. физ. мат. лит., 1959.

Резюме

ДЕМПФИРОВАНИЕ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ ПОМОЩИ
ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

В работе обсуждены вопросы демпфирования в механических системах при помощи вязкоупругих жидкостей. Выведены уравнения движения для трехпараметрической жидкости Джеффриса и показаны эффекты, сопровождающие применение этой жидкости в демпферах трех различных видов. Приводится новый способ определения значений параметров модели жидкости на основе исследования динамических характеристик системы с одной степенью свободы; этот новый способ сравнивается с другими известными методами.

SUMMARY

DAMPING OF MECHANICAL SYSTEMS BY MEANS OF VISCOELASTIC LIQUIDS

The paper presents the processes of damping by means of viscoelastic liquids. Equations of motion are found for the three-parameter Jeffreys liquid, and the effects of application of this liquid in three types of dampers are demonstrated. Presented is also a new method of determination of parameters of a liquid model; the method, shown on the background of other methods, is based on the investigation of dynamic characteristics of a system with one degree of freedom.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1972 r.