

## DOŚWIADCZALNE BADANIA ELEMENTÓW MASZYN PROJEKTOWANYCH METODĄ NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

JACEK KAPKOWSKI i JACEK STUPNICKI (WARSZAWA)

### 1. WSTĘP

W praktyce inżynierskiej ostatnich lat optymalne projektowanie elementów konstrukcyjnych nabiera coraz większego znaczenia. Odnosi się to również do określania kształtu elementów maszyn, przy czym kryteria optymalizacji są różnorodne. Zaproponowana przez W. SZCZEPIŃSKIEGO [1] metoda projektowania elementów maszyn przy założeniu z góry ich nośności granicznej pozwala w stosunkowo prosty sposób wyznaczyć kształt przy danych obciążeniach, które element ma przenosić. Najogólniej mówiąc, tego rodzaju zagadnienie optymalnego projektowania polega na takim doborze wymiarów i kształtu elementu, aby przy obciążeniu granicznym w całej objętości został jednocześnie osiągnięty stan plastyczny. Oczywiście tak idealne rozwiązanie problemu jest w większości przypadków bardzo trudne do osiągnięcia. Optymalne projektowanie metodą nośności granicznej pozwala jednak na znaczne zbliżenie się do rozwiązania idealnego. W metodzie tej wykorzystuje się zasady ekstremalne teorii plastyczności, a szczególnie jedną z nich dającą dolną ocenę nośności granicznej. Zasada ta mówi, że jeżeli przyjąć w elemencie dowolnie wybrane statycznie dopuszczalne (a więc spełniające warunki brzegowe dla naprężeń oraz warunki równowagi wewnętrznej i zewnętrznej) pole naprężeń, to rzeczywista nośność graniczna tak zaprojektowanego elementu będzie co najmniej równa żadanemu obciążeniu granicznemu. Przy zastosowaniu tej zasady zakłada się również, że w żadnym punkcie przyjętego pola naprężeń nie może być przekroczony warunek plastyczności. Linie graniczne tego pola określają kształt projektowanego elementu. Dowolność doboru statycznie dopuszczalnego pola naprężeń daje pewną klasę rozwiązań, z których można wybrać optymalne, na przykład ze względu na objętość elementu. Żądając aby ta objętość była najmniejsza, otrzymuje się optymalny kształt elementu.

Wobec tego, że metoda nośności granicznej daje jedynie dolną ocenę wielkości obciążeń powodujących stan plastyczny, istotnym zagadnieniem staje się weryfikacja doświadczalna. Doświadczenia mają za zadanie określić proces rozwijania się obszarów uplastycznionych, a przede wszystkim nośność graniczną. Dla elementów maszynowych jako nośność graniczną przyjmuje się obciążenie powodujące duże odkształcenie i co za tym idzie zmiany kształtu takie, że praktycznie element traci przydatność jako konstrukcja. Porównanie nośności granicznej otrzymanej doświad-

czalnie z nośnością założoną przy projektowaniu pozwala stwierdzić, na ile teoretyczna dolna ocena tej wielkości różni się od rzeczywistej.

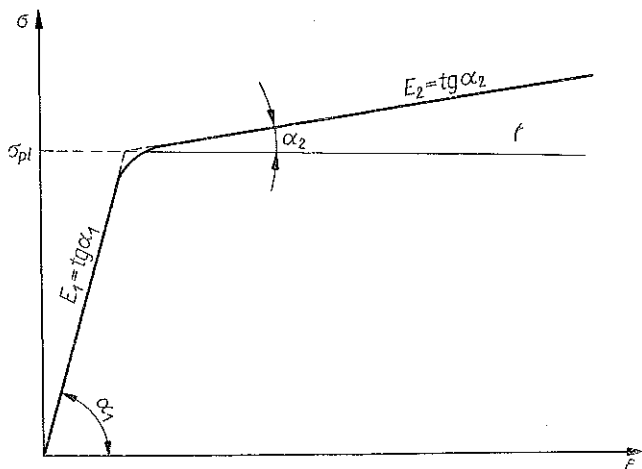
Niniejsza praca prezentuje wyniki badań doświadczalnych płaskich elementów maszynowych, mianowicie:

- 1) rozciąganego pasma z otworem, którego fragment może być wykorzystany jako element połączenia sworzniowego,
- 2) rozciąganego pasma z wieloma otworami,
- 3) elementu kotwiącego.

## 2. METODYKA BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

### 2.1. Przygotowanie próbek

Próbki wykonano z blach o grubości 10 mm ze stopu PA-7, które poddawano obróbce skrawaniem dla uzyskania odpowiedniej grubości. Materiał próbki wykazywał prawie bilinearną charakterystykę o parametrach podanych na rys. 1. Ponie-



Rys. 1

waż próbki do badań wykonywano w różnym okresie z różnych arkuszy blach, przeto każdorazowo z tego samego arkusza wycinano normalne próbki dziesięciokrotne do badań materiałowych. Przeprowadzając ścisłą próbę rozciągania wyznaczono parametry materiału takie jak:

- moduł sprężystości —  $E_1$ ,
- moduł wzmocnienia —  $E_2$ ,
- granice plastyczności —  $\sigma_{pl}$ ,
- doraźną wytrzymałość na rozciąganie  $R_r$ .

Po wykonaniu próbki o określonym kształcie wyznaczonym metodą nośności granicznej i wytrawieniu powierzchni pokrywano ją warstwą optycznie czynną bazowaną na żywicach epoksydowych (Araldit) z dodatkiem około 12% odpo-

wiedniego utwardzacza. Pokrywanie próbek odbywało się przez odlewanie warstwy bezpośrednio na próbce. Stałą grubość warstwy optycznie czynnej (około 2 mm) uzyskano przez to, że jedną ścianę formy odlewniczej stanowiła próbka, a drugą płyta szklana. Metoda ta daje dostatecznie silne związanie warstwy optycznie czynnej z próbką i wystarczająco duże odbicie światła od wygładzonej i wytrawionej powierzchni próbki, aby otrzymać ostre obrazy izochrom. Tak przygotowaną próbkę z warstwą optycznie czynną poddano wykończającej obróbce wiórowej. Proces ten prowadzono w taki sposób, aby warstwa optycznie czynna nie wykazywała wstępnych naprężeń powstałych wskutek skrawania.

## 2.2. Przeprowadzenie doświadczenia

Proces obciążenia próbki realizowano na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej w przystosowanych uchwytach. Rejestrację obrazów izochrom wykonywano fotograficznie przy użyciu polaryskopu kołowego [3] w świetle monochromatycznym  $\lambda=447$  nm spolaryzowanym kołowo. W celu wyznaczenia czułości zastosowanej warstwy optycznie czynnej na bocznych (nie pokrytych) powierzchniach próbki naklejano elektryczne czujniki tensometryczne. Umieszczone były one w miejscach, gdzie nie należało się spodziewać osiągnięcia stanu plastycznego materiału próbki. Porównując odczyty tensometrów z obrazami izochrom (oczywiście przy sprężystych odkształceniach materiału próbki) wyznaczono każdorazowo stałą  $f$  [1/rząd izochromy], określającą czułość zastosowanego pokrycia na odkształcenie.

Doświadczenia wykonywano przy niewielkich przyrostach obciążenia, otrzymując pełny obraz rozwoju izochrom w trakcie procesu obciążania. Po każdym kilku etapach odcinano próbkę, rejestrując również izochromy pozostające wskutek uplastycznienia się pewnych obszarów w próbce.

## 2.3. Opracowanie danych doświadczalnych

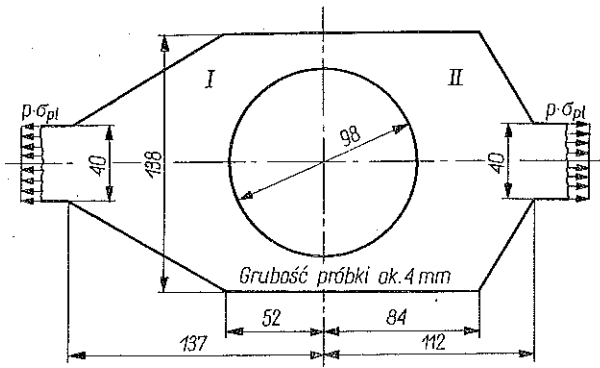
Otrzymane na fotografiach obrazy izochrom poddawano analizie przede wszystkim z punktu widzenia rozwoju obszarów uplastycznionych. Wyznaczenie granic tych obszarów przeprowadzono metodą charakterystyk [4] stosując warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego lub też warunek Treski-Coulomba. Mając obraz rozwoju obszarów plastycznych można przez ekstrapolację z dostatecznie dużą dokładnością wyznaczyć nośność graniczną próbki.

# 3. WYNIKI BADAŃ

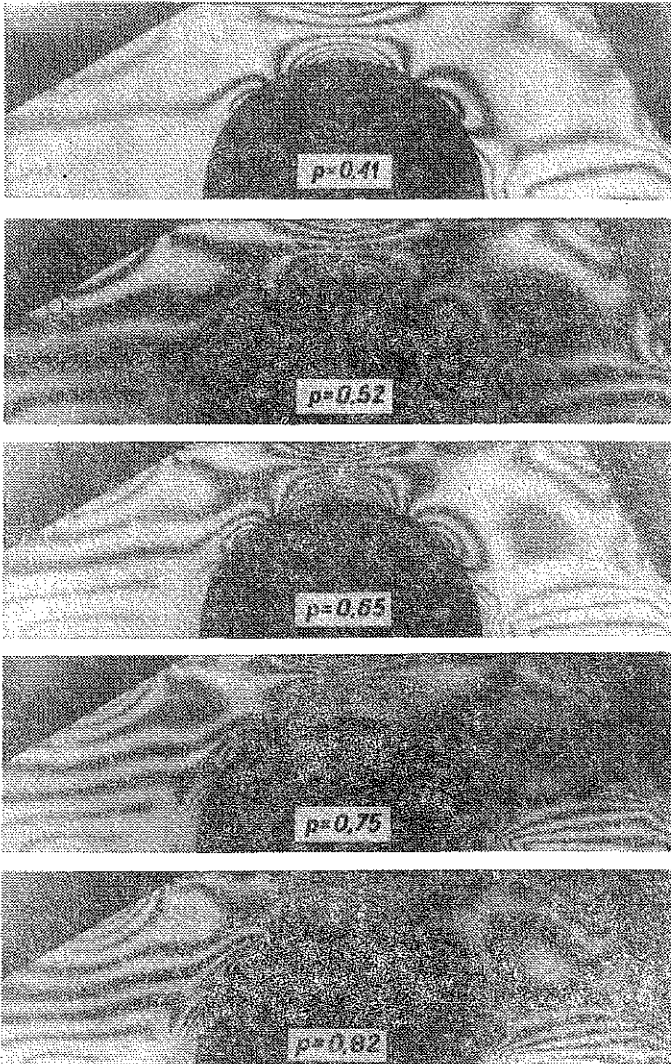
Poniżej przedstawiono wyniki badań trzech próbek optymalizowanych metodą nośności granicznej [1]. Próbki te mają kształt typowych, często spotykanych elementów maszyn.

## 3.1. Rozciągane pasmo z otworem

Kształt próbki jest fragmentem rozciąganego pręta, w którym znajduje się otwór. Otoczenie otworu wymaga wzmocnienia, które wykonano w postaci rozbudowania przekroju pręta w płaszczyźnie otworu. Wyznaczony kształt pokazano na rys. 2.



Rys. 2



Rys. 3

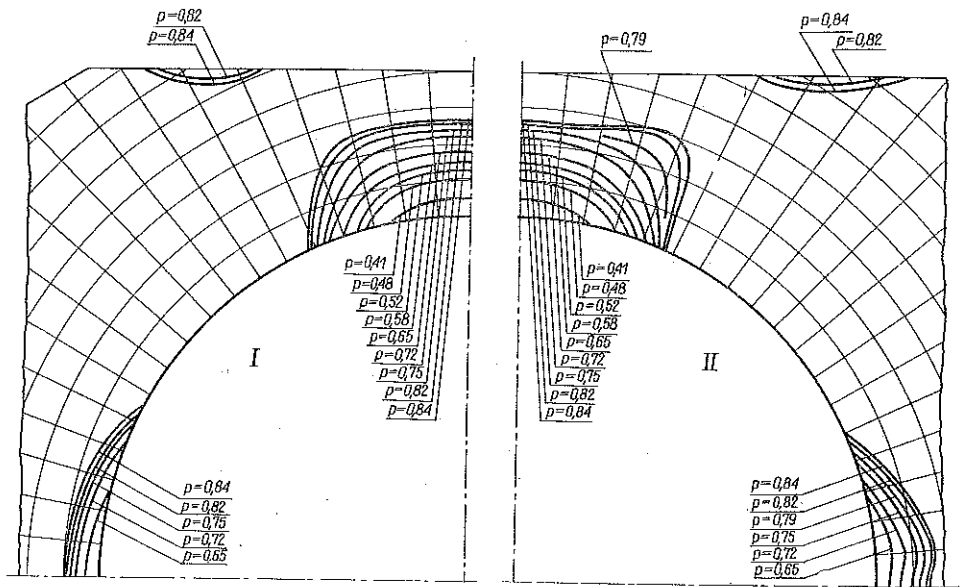
W celu zbadania dwóch wariantów rozwiązania teoretycznego lewa połowa próbki (I) ma inny (bardziej racjonalny) kształt niż prawa (II). Wyznaczenie kształtu przeprowadzono na podstawie hipotezy Treski-Coulomba. Próbką została wykonana ze stopu aluminiowego o następujących danych:

$$E_1 = 7,1 \cdot 10^3 \text{ kG/mm}^2, \quad E_2 = 1,48 \cdot 10^2 \text{ kG/mm}^2, \quad \sigma_{p1} = 36 \text{ kG/mm}^2, \\ R_r = 48 \text{ kG/mm}^2, \quad \nu = 0,3.$$

Pokrycie optycznie czynne o grubości 2 mm z żywicy Araldit wykonano metodą bezpośredniej polimeryzacji na próbce. Wyznaczono czułość optyczną pokrycia

$$f = 1,04 \cdot 10^{-3} \quad 1/\text{rząd izochromy}.$$

Obciążenie próbki stanowiły równomiernie rozłożone na końcach naprężenia rozciągające, przy czym jako miernik obciążenia przyjęto stosunek tych naprężeń do granicy plastyczności materiału próbki. Otrzymane w świetle kołowo spolaryzowanym obrazy izochrom pokazano dla kilku poziomów obciążenia na rys. 3.



Rys. 4

Na podstawie obrazu izochrom wyznaczono położenie granicy między obszarami: sprężystym i plastycznym, przyjmując warunek plastyczności Treski-Coulomba. Położenie tych granic w bezpośredniej okolicy otworu pokazano na rys. 4 dla różnych wartości  $p$ .

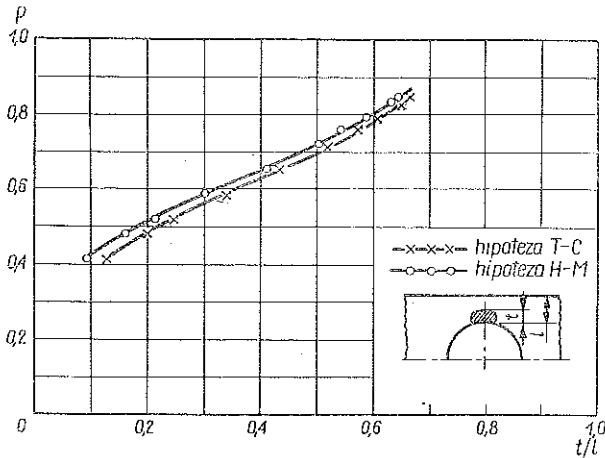
Należy tu zaznaczyć, że przy wyżej opisanych badaniach otrzymano właściwie wyniki dla dwóch próbek, z których kształty wyznaczono dla dwóch różnych statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Połączenie tych próbek na osi najmniejszego przekroju nie powoduje wzajemnego ich wpływu na siebie dlatego, że w tym przekroju teoretyczne rozkłady naprężeń dla obydwóch kształtów są identyczne. Wyko-

nano także wykres wędrówki granicy sprężysto-plastycznej wzdłuż osi najmniejszego przekroju (rys. 5). Na wykresie tym naniesiono również krzywą obliczoną według warunku plastyczności Hubera-Misesa.

Wyznaczona przez ekstrapolację nośność graniczna próbki wynosi:

dla części II —  $\sigma_{gr} = 1,002\sigma_{pl}$

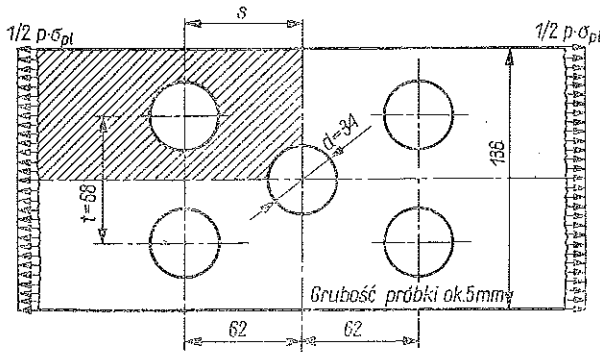
dla części I —  $\sigma_{gr} = 1,084\sigma_{pl}$ .



Rys. 5

### 3.2. Rozciągane pasmo z wieloma otworami

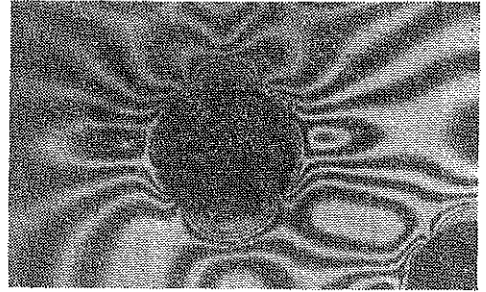
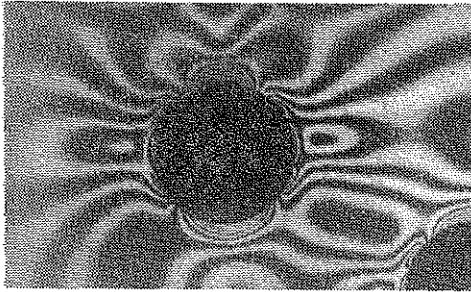
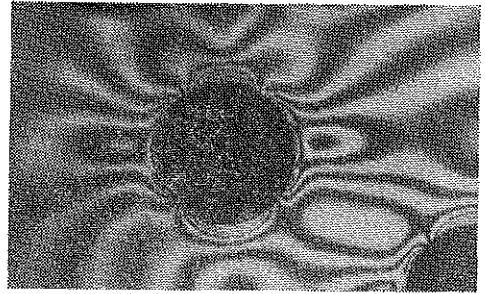
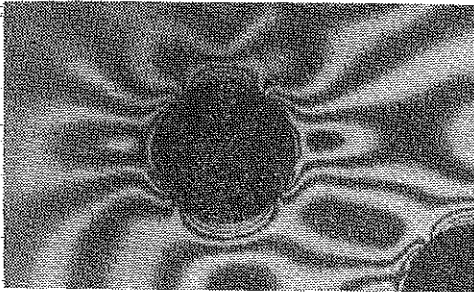
Próbkę wykonano jako rozciągane płaskie pasmo, którego przekrój netto został zmniejszony przez wykonanie otworów, w rozpatrywanym przypadku w liczbie pięciu. Otwory o jednakowej średnicy rozmieszczone są regularnie wg rys. 6. Przy



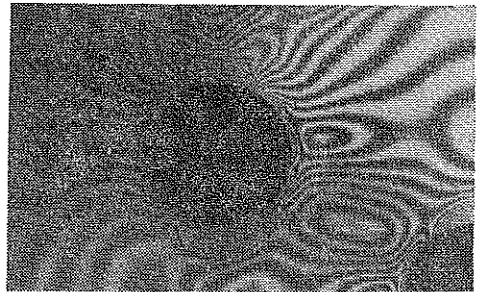
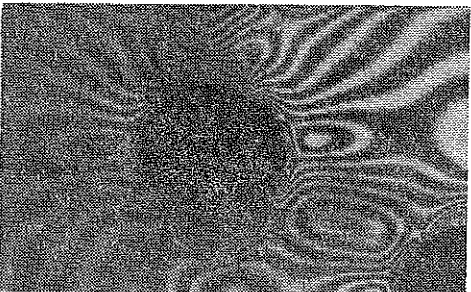
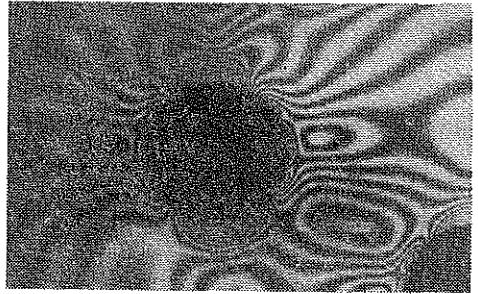
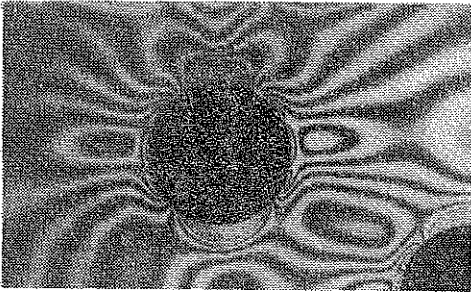
Rys. 6

danej z góry średnicy otworów i podziałce  $t$  w procesie optymalizacji pozostaje do wyznaczenia odległość  $s$ , która przy zastosowaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa wyraża się jako:

$$s = 0,405d + 0,707t,$$



Rys. 7

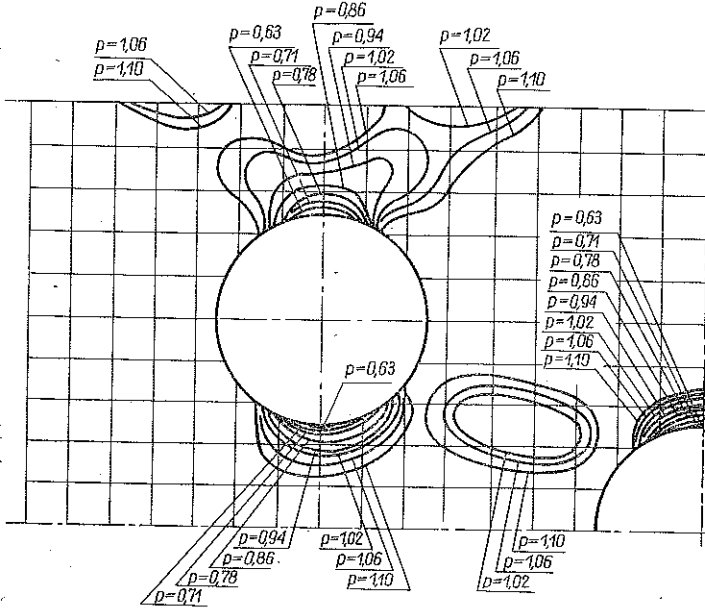


Rys. 8

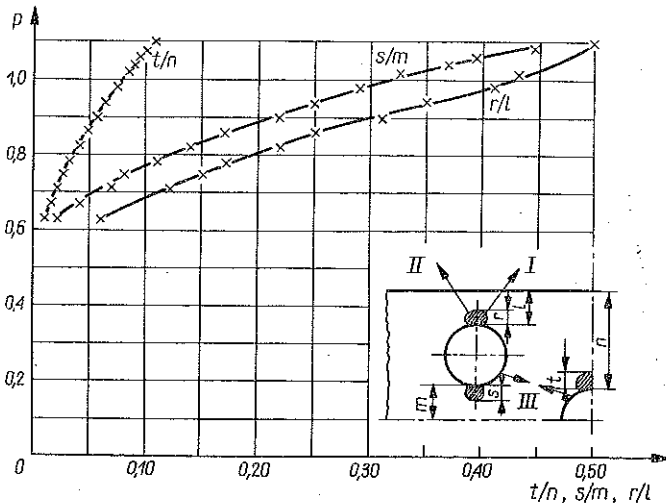
natomiast z warunku plastyczności Treski-Coulomba wyznacza się odległość  $s$  ze wzoru

$$s = 0,211d + 0,866t.$$

Kształt badanej próbki wyznaczono przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa. Próbkę wykonano z tego samego materiału co próbkę opisaną w p. 3.1. Również warstwa optycznie czynna jest ta sama. Dane dotyczące materiału i pokrycia są więc identyczne. Próbkę obciążano równomiernie rozłożonymi rozcią-



Rys. 9



Rys. 10



gającymi naprężeniami na końcach. Miernikiem obciążenia jest współczynnik  $p$ , czyli stosunek naprężeń w przekroju netto (osłabionym dwoma otworami) do granicy plastyczności materiału.

Na rys. 7 i 8 pokazano obrazy izochrom dla różnych wartości współczynnika  $p$ . (Z uwagi na podwójną symetrię próbki pokazano jedną ćwiartkę próbki zakreskowaną na rys. 6).

Na podstawie fotografii wyznaczono przebieg procesu rozwijania się obszarów plastycznych. Granice obszarów uplastycznionych w próbce przy wzrastającym obciążeniu podano na rys. 9. Z rysunku tego wynika, że najbardziej intensywnie rozwijają się obszary plastyczne w pobliżu osi najmniejszego przekroju, to znaczy tego, w którym występują dwa otwory.

Na rys. 10 pokazano m.in. wędrówkę granicy sprężysto-plastycznej wzdłuż osi tego przekroju. Przedstawiono wyniki otrzymane przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski-Coulomba. Jak widać z rozwoju obszarów plastycznych uplastycznienie w pierwszym etapie zachodzi w kierunku I, a potem jednocześnie w kierunkach II i III (kierunki te pokazano na rys. 10). Nośność graniczną próbki zostaje osiągnięta przy obciążeniu, przy którym uplastycznieniu ulegnie odcinek między otworami (kierunek III) i dalej od otworu zewnętrznego do brzegu (kierunek II).

Z rys. 9 drogą ekstrapolacji wyznaczono nośność graniczną próbki

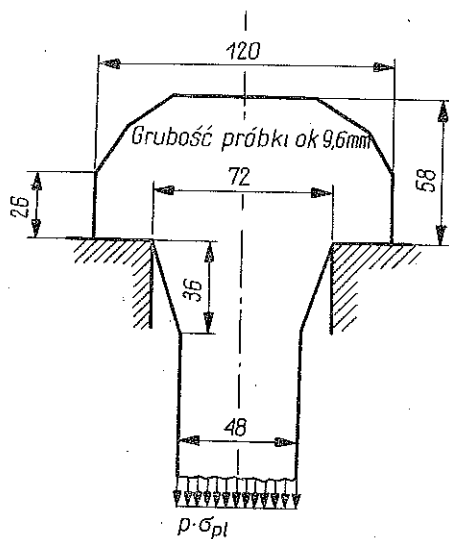
$$\sigma_{gr} = 1,13\sigma_{pl}.$$

### 3.3. Element kotwiący

Próbkę wykonano w kształcie elementu kotwiącego, który spotyka się powszechnie w budowie maszyn, np. przy osadzaniu uzwojeń generatorów. Metodą nośności granicznej wyznaczono kształt elementu, przyjmując warunek plastyczności Hubera-Misesa. Przy założonej szerokości trzonu optymalizacji podlegał kształt i wymiary łba kotwicy. W szczególności zwrócono uwagę na uwzględnienie dwóch kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia, mianowicie zerwanie trzonu i ścięcie łba.

Na rys. 11 pokazano próbkę i sposób jej obciążenia. Próbka wykonana została ze stopu aluminium o następujących danych:

$$\begin{aligned} E_1 &= 7,1 \cdot 10^3 \text{ kG/mm}^2, & \nu &= 0,3, \\ E_2 &= 3,12 \cdot 10^3 \text{ kG/mm}^2, & \sigma_{pl} &= 26,6 \text{ kG/mm}^2. \end{aligned}$$



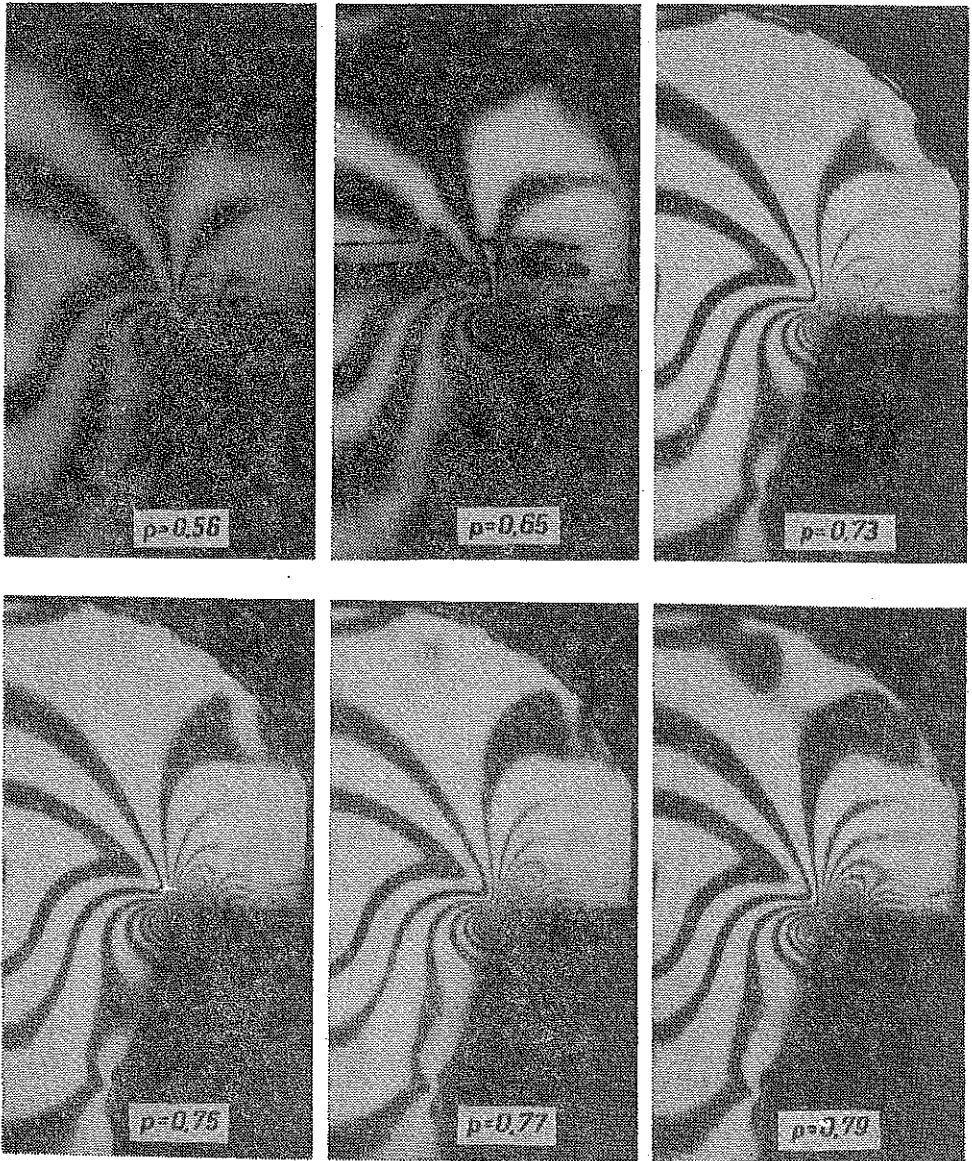
Rys. 11

Pokrycie optycznie czynne o grubości ok. 2 mm wykonano z Aralditu z zawartością 8% plastyfikatora i 12% utwardzacza.

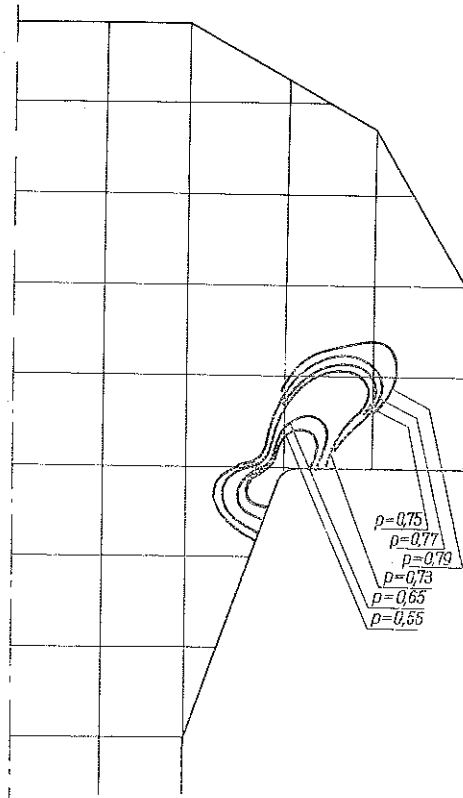
Na podstawie odczytów tensometrów elektrycznych, naklejonych na bocznych powierzchniach trzonu wyznaczono czułość pokrycia na odkształcenia, która wynosi:

$$f = 1,06 \cdot 10^{-3} \quad 1/\text{rzęd izochromy}.$$

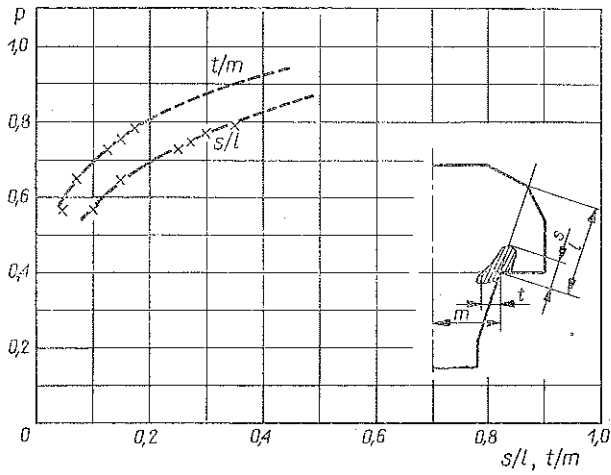
Próbkę obciążono równomiernie rozłożonymi naprężeniami rozciągającymi na trzonie, których wypadkowa zrównoważona jest przez podparcie łba na bocznych



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

powierzchniach. Wielkość tych naprężeń określona jest współczynnikiem  $p$ , który jest stosunkiem naprężeń do granicy plastyczności materiału próbki.

Obrazy izochrom dla próbki (z uwagi na symetrię pokazano tylko połowę) dla różnych wartości współczynnika  $p$  pokazano na rys. 12. Na podstawie zdjęć wyznaczono granice obszarów plastycznych przy różnych poziomach obciążenia (rys. 13). Widoczne jest, że obszary plastyczne rozwijają się zarówno w kierunku poziomym, jak i skośnie w ewentualnym kierunku ścięcia łba. W związku z tym zanalizowano przemieszczenie granic tych obszarów wzdłuż charakterystycznych linii. Na rys. 14. przedstawiono przebieg tego procesu w postaci wykresu. Z wykresu tego można wywnioskować, że obydwie drogi uplastycznienia  $s$  są jednakowo uprzywilejowane.

Wyznaczona na podstawie ekstrapolacji nośność graniczna wynosi

$$\sigma_{gr} = 1,03\sigma_{pl}.$$

#### 4. WNIOSKI

Na podstawie wykonanych doświadczeń przeprowadzono pewnego rodzaju weryfikację doświadczalną elementów projektowanych metodą nośności granicznej. We wszystkich przypadkach badanych próbek o kształcie typowych elementów konstrukcyjnych stan graniczny osiągnięto powyżej nośności teoretycznej założonej przy projektowaniu. A więc teoretyczna nośność graniczna obliczona na podstawie statycznie dopuszczalnych pól naprężeń jest rzeczywiście dolną granicą tej wielkości. Odchyłki rzeczywistej nośności granicznej od dolnej granicy wyniosły co najwyżej 13%. Potwierdzenie optymalizacji kształtu najbardziej widoczne jest na przykładzie badania elementu kotwiącego, gdzie osiągnięcie stanu granicznego przy dwóch podstawowych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmach jest praktycznie jednakowo możliwe.

Należy tu jednak dodać, że projektowanie kształtu metodą nośności granicznej nie likwiduje obszarów, w których występuje spiętrzenie naprężeń. Fakt ten może mieć duże znaczenie przy projektowaniu elementów przeznaczonych do pracy w warunkach obciążeń powtarzalnych i narażonych w związku z tym na zniszczenie zmęczeniowe.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968.
2. L. DIETRICH, J. MIĄSTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Nośność graniczna elementów konstrukcji*, PWN, Warszawa 1970.
3. J. STUPNICKI, *Pomiary naprężeń metodą elastoptycznej warstwy powierzchniowej*, *Archiwum Budowy Maszyn*, **16**, 3, 1969.
4. J. KAPKOWSKI, J. STUPNICKI, *Badanie sprężysto-plastycznych płaskich stanów naprężeń metodą pokryć optycznie czynnych*, *Archiwum Budowy Maszyn*, **18**, 1, 1971.

## Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН  
ПРОЕКТИРОВАННЫХ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В работе содержатся описание и результаты экспериментов проведенных методом оптически активных покрытий на образцах находящихся в плоском напряженном состоянии. Образцы имеют форму определенную методом предельной нагрузки. Проанализирован процесс возникновения и развития пластических областей, а также определена предельная нагрузка, которая сравнена с принятой теоретически.

## SUMMARY

EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF MACHINE ELEMENTS DESIGNED  
BY THE METHOD OF LOAD CARRYING CAPACITY

The paper contains the description and results of experiments performed by means of the photo-stress method on specimens subject to plane states of stress. The forms of the specimens are determined by the method of load carrying capacity. The process of formation and propagation of plastic zones is analyzed and the load carrying capacity is determined, the latter being compared with the theoretically derived values.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lipca 1972 r.*

---