

OSZACOWANIE ODPOWIEDZI STRUKTURY MECHANICZNEJ NA DOWOLNE WYMUSZENIE

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. WSTĘP

W praktyce projektowo konstrukcyjnej niejednokrotnie pożądana jest znajomość amplitud drgań lub ogólniej możliwość oceny odpowiedzi konstrukcji przy niejednoznacznie określonym charakterze wymuszenia i niepełnych informacjach o charakterystyce dynamicznej obiektu. Do celów optymalizacji konstrukcji pożądane byłoby też, aby wspomniana ocena, mimo swego przybliżenia, podawana była w postaci funkcyjnej a nie liczbowej. W celu rozpatrzenia tego zagadnienia weźmy pod uwagę dowolną strukturę mechaniczną, pod którą będziemy rozumieć obiekt mechaniczny jednorodny, ciągły, dający się opisać jednym liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym. Liniowość struktury przy dowolnym typie dysypacji pozwala konstruować odpowiedź na dowolne wymuszenie za pomocą odpowiedniej superpozycji odpowiedzi harmonicznych.

2. CHARAKTERYSTYKA DYNAMICZNA STRUKTURY

Niech w punkcie (x_F, y_F, z_F) działa na strukturę harmoniczna siła wymuszająca; wtedy na podstawie [1-4] jej równanie ruchu można przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad m\ddot{u} + \beta\dot{u} + \left(\zeta + \frac{\eta}{\omega}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left[\lambda L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u \right] + \\ + \lambda L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = F(x_F, y_F, z_F) e^{i\omega t}.$$

W równaniu tym przyjęto następujące oznaczenia:

- m masa na jednostkę długości, powierzchni lub objętości struktury,
- $u = u(x, y, z)$ przemieszczenie w kierunku działania siły,
- $F(x_F, y_F, z_F)$ funkcja intensywności wymuszenia,
- β współczynnik tłumienia wewnętrznego (model Maxwella) lub zewnętrznego, np. aerodynamicznego,
- ζ współczynnik tłumienia wewnętrznego proporcjonalnego do szybkości deformacji (model Kelvina-Voigta),
- η współczynnik tłumienia wewnętrznego histerezyowego w przybliżeniu liniowym (dla drgań harmonicznych),
- λ uogólniona sprężystość lokalna struktury.

Występujący wyżej operator $\lambda L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ przedstawia lokalny związek między przemieszczeniem u i intensywnością siły sprężystej. W trzech najprostszych przypadkach operator ten i masa jednostkowa struktury mają postać:

dla pręta o przekroju A drgającego podłużnie

$$m = \rho A, \quad \lambda L(\cdot) = EA \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

dla belki przy drganiach giętnych

$$m = \rho A, \quad \lambda L(\cdot) = EJ \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

dla płyty o grubości h

$$m = \rho h, \quad \lambda L(\cdot) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

gdzie E oznacza moduł Younga, J moment bezwładności przekroju belki względem osi obojętnej, ν współczynnik Poissona materiału płyty.

Łatwo wykazać, że jeśli przyjąć koncepcję zespolonych stałych materiałowych [1, 5], to ostatnie równanie można zapisać w bardziej zwartej postaci

$$(2.2) \quad \bar{m}\ddot{u} + \bar{\lambda}L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = F(x_F, y_F, z_F) e^{i\omega t},$$

gdzie $\bar{m} = m - (i\beta/\omega)$ oznacza zespoloną masę struktury, $\bar{\lambda} = \lambda(1 + i\eta + i\zeta\omega)$ zespoloną stałą sprężystą. Jak się okazuje, taka koncepcja jest bardzo użyteczna przy badaniu dowolnych struktur wymuszeniem harmonicznym.

Przed przystąpieniem do analizy równania (2.2) zwróćmy uwagę na jego rozwiązanie w przypadku jednorodnym i przy współczynnikach rzeczywistych. W takim wypadku mamy [1]

$$(2.3) \quad m\ddot{u} + \lambda L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u = 0,$$

a rozwiązania poszukujemy w postaci szeregu

$$(2.4) \quad u = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x, y, z) e^{i\omega_r t},$$

gdzie $u_r(x, y, z)$ oznacza postacie własne, ω_r zaś częstości drgań własnych struktury.

Łatwo sprawdzić, że postacie własne spełniają równanie różniczkowe

$$(2.5) \quad \lambda L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u_r = m\omega_r^2 u_r$$

i warunek ortogonalności

$$(2.6) \quad \int_{\Omega} u_r u_l d\Omega = \begin{cases} 0, & r \neq l, \\ \langle u_r^2 \rangle \sigma, & r = l, \end{cases} \quad \sigma = \int_{\Omega} d\Omega,$$

gdzie $\langle u_r^2 \rangle$ oznacza kwadrat r -tej postaci drgań, uśredniony po obszarze struktury, zaś σ — wymiar struktury (długość, powierzchnia, objętość).

Wiadomo, że zbiór funkcji własnych jest zupełny i według nich można rozłożyć w szereg dowolne rozwiązanie równania niejednorodnego. Wykorzystując to w równaniu (2.2) i pamiętając, że u_r jest określone z dokładnością do stałej (ewentualnie zespolonej), przyjmiemy rozwiązanie równania wyjściowego w postaci

$$(2.7) \quad u = \sum_r u_r(x, y, z) e^{i\omega t}.$$

Podstawiając je do (2.2) i wykorzystując równanie funkcji własnych (2.5) mamy

$$\sum_r [-m\omega^2 + i\beta\omega + \omega_r^2 m (1 + i\eta + \zeta\omega)] u_r(x, y, z) = F(x_F, y_F, z_F).$$

Przyjmując, że $\beta = \alpha m$, mnożąc obustronnie przez $u_r(x, y, z)$ i całkując po obszarze struktury dostaniemy

$$(2.8) \quad \left[-\omega^2 + \omega_r^2 \left(1 + i\eta + i\zeta\omega + i \frac{\alpha\omega}{\omega_r^2} \right) \right] M \langle u_r^2 \rangle = \int_{\Omega} F(x_F, y_F, z_F) u_r(x, y, z) d\Omega,$$

gdzie $M = m\sigma$ jest masą obiektu.

Zlokalizujmy obecnie miejsce wzbudzenia i miejsce odbioru procesu drganiowego struktury. Załóżmy, że w najprostszym przypadku funkcja intensywności siły wymuszającej jest odpowiednio wymiarową deltą Diraca $F(x_F, y_F, z_F) = F_0 \delta(x - x_F, y - y_F, z - z_F)$, odbiór zaś drgań następuje w punkcie A struktury o współrzędnych (x_A, y_A, z_A) . Wprowadzając zdefiniowaną wyżej intensywność wymuszenia do równania (2.8), dzieląc obustronnie przez amplitudę r -tej postaci własnej w miejscu wzbudzenia $u_r(x_A, y_A, z_A) = u_r(A)$, mamy

$$(2.9) \quad \left[-\omega^2 + \omega_r^2 \left(1 + i\eta + i\zeta\omega + i\alpha \frac{\omega}{\omega_r^2} \right) \right] M \frac{\langle u_r^2 \rangle}{u_r^2(A)} u_r(A) = F_0 \frac{u_r(F)}{u_r(A)}.$$

We wzorze powyższym możemy wprowadzić dwa nowe współczynniki mające prostą interpretację fizyczną: $u_r(F)/u_r(A) = \kappa_r$ oznacza stałą wzbudzenia zależną od lokalizacji miejsca wymuszenia i odbioru, oraz $M_r = M (\langle u_r^2 \rangle / u_r^2(A))$ masę r -tej postaci drgań zredukowaną do punktu odbioru. Uwzględniając powyższe w ostatnim równaniu, uzyskamy zależność na amplitudę r -tej postaci drgań w miejscu odbioru drgań w postaci

$$(2.10) \quad u_r(A) = \frac{F_0 \kappa_r}{M_r \left[-\omega^2 + \omega_r^2 \left(1 + i\eta + i\zeta\omega + i\alpha \frac{\omega}{\omega_r^2} \right) \right]}.$$

Wobec tego amplituda całkowita obserwowana w punkcie A będzie równa

$$(2.11) \quad u(A) = \sum_r u_r(A) = F_0 \sum_r \frac{\kappa_r}{M_r \left[-\omega^2 + \omega_r^2 \left(1 + i\eta + i\zeta\omega + i\alpha \frac{\omega}{\omega_r^2} \right) \right]}.$$

Jak widać z otrzymanego rezultatu dla ustalonego miejsca wzbudzenia i odbioru amplituda drgań zależy tylko od częstości wzbudzenia, gdyż wielkości κ_r i M_r zmieniają się niewiele wraz ze zmianą r [1]. I tak przy wzbudzeniu na swobodnym brzegu struktury mamy $M_r = \frac{1}{2}M$ dla obiektów jednowymiarowych, oraz $M_r = \frac{1}{4}M$ dla obiektów dwuwymiarowych, jeśli zaś punkt wzbudzenia pokrywa się z miejscem odbioru to oczywiście $\kappa_r = 1$.

Zatrzymajmy się obecnie nad identyfikacją współczynników tłumienia w ostatnim równaniu. Z teorii drgań układów dyskretnych wiadomo [5, 6], że jeśli siła tłumiąca, działająca na każdą masę układu, jest proporcjonalna do wielkości tej masy, to mamy do czynienia z tzw. tłumieniem masowym. Innymi słowy, jeśli w naszym przypadku $\alpha = \beta/m$, to przez analogię możemy powiedzieć, iż mamy do czynienia w strukturze z tłumieniem masowym wewnętrznym (model ciała Maxwella). Warto wspomnieć, że siły oporu zewnętrznego, np. aerodynamicznego, związane z wypromieniowaniem dźwięku przez drgającą strukturę, mają identyczny charakter [7] i w konkretnych przypadkach dysypację tę można przyporządkować masowemu tłumieniu wewnętrznemu.

Jeśli współczynniki tłumienia są proporcjonalne do współczynników sprężystości, czyli w naszym przypadku w równaniu (2.1) $\zeta\lambda/\lambda = \text{const}$ (model Kelvina-Voigta), to mamy analogicznie do układów dyskretnych przypadek tłumienia wiskotycznego. Wreszcie, gdy współczynniki tłumienia proporcjonalne są do współczynników sprężystości lecz niezależne od częstości drgań harmoniczných, to mamy przybliżenie liniowe wewnętrznego tłumienia histerezyowego.

Z powyższego wynika, że wprowadzając do rozważań zespolone parametry struktury (masę i sztywność), możemy uwzględnić wszystkie możliwe rodzaje tłumienia liniowego jednorodnego w strukturze, a więc masowego o współczynniku α , histerezyowego o współczynniku η i wiskotycznego ze współczynnikiem ζ . Okazuje się przy tym, że każdy z nich reprezentuje inny sposób rozkładu amplitud maksymalnych w skali częstości.

3. RECEPTANCJA MAKSYMALNA

Wprowadźmy obecnie do rozważań receptancję struktury mierzoną w punkcie A przy wzbudzeniu siłą harmoniczną w punkcie F . Z wyrażenia (2.11) otrzymujemy wprost

$$(3.1) \quad \alpha_{A,F} = \frac{u(A)}{F_0} = \sum \frac{\kappa_r}{M_r \left\{ -\omega^2 + \omega_r^2 \left[1 + i \left(\eta + \zeta\omega + \alpha \frac{\omega}{\omega_r^2} \right) \right] \right\}}$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę zakres częstości niskich i średnich $5 \leq \omega/2\pi \leq 2000$ Hz, z jakim na ogół spotykamy się w dynamice maszyn, to częstości własne ω_s struktur rozłożone są w dostatecznym oddaleniu od siebie. Wobec tego dla częstości wymuszenia bliskich rezonansowym $\omega \approx \omega_s$, $s = 1, \dots$, możemy napisać

$$(3.2) \quad |\alpha_{A, F}|_{\omega \approx \omega_s} \approx \frac{\kappa_s}{M_s \omega_s^2 \left(\eta + \zeta \omega_s + \frac{\alpha}{\omega_s} \right)},$$

$$\left| \frac{\kappa_r}{M_r \left\{ -\omega_s^2 + \omega_r^2 \left[1 + i \left(\eta + \zeta \omega_s + \alpha \frac{\omega_s}{\omega_r^2} \right) \right] \right\}} \right| \sim 0, \quad r \neq s, \quad s = 1, \dots$$

Na podstawie powyższego można postawić problem prostej oceny modułu receptancji maksymalnej struktury

$$(3.3) \quad |\alpha_{A, F}|_{\max} = \text{Max}_{\omega} \left| \sum_r \frac{\kappa_r}{M_r \left\{ -\omega^2 + \omega_r^2 \left[1 + i \left(\eta + \zeta \omega + \frac{\alpha \omega}{\omega_r} \right) \right] \right\}} \right| = |\tilde{\alpha}_{A, F}|.$$

Z ostatniego wzoru wynika, że poszukiwaną krzywą receptancji maksymalnej dogodnie jest zdefiniować w dwu zakresach częstości:

$$(3.4) \quad |\tilde{\alpha}_{A, F}| = \left| \frac{\kappa_1}{M_1 \left\{ -\omega^2 + \omega_1^2 \left[1 + i \left(\eta + \zeta \omega + \alpha \frac{\omega}{\omega_1^2} \right) \right] \right\}} \right|, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_1,$$

$$|\tilde{\alpha}_{A, F}| = \left| \frac{\kappa_r}{M_r \omega_r^2 \left[\eta + \zeta \omega + \alpha \frac{\omega}{\omega_r^2} \right]} \right|_{\omega = \omega_r, r=2, 3, \dots}, \quad \omega_1 < \omega < \infty.$$

Zwróćmy uwagę na zmniejszanie się amplitudy drgań w miarę wzrostu częstości dla $\omega > \omega_1$. Spadek ten obrazuje zmiana modułu receptancji maksymalnej, którą najprościej przedstawić oddzielnie dla poszczególnych rodzajów tłumienia. Przyjmując logarytmiczne miary spadku z zależności (3.4) otrzymujemy

dla tłumienia masowego $\alpha \neq 0$

$$|\tilde{\alpha}_{A, F}| \sim \frac{1}{\omega}, \quad \text{co daje spadek 20 dB/dekadę,}$$

dla tłumienia histerezy $\eta \neq 0$

$$(3.5) \quad |\tilde{\alpha}_{A, F}| \sim \frac{1}{\omega^2}, \quad \text{co daje spadek 40 dB/dekadę,}$$

dla tłumienia wiskotycznego $\zeta \neq 0$

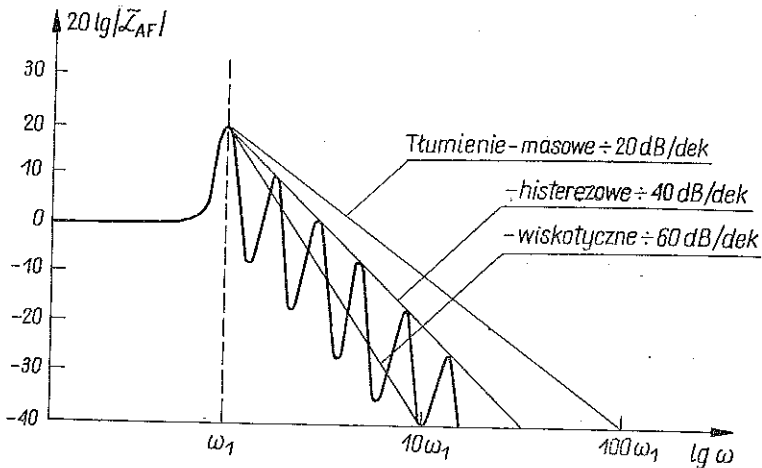
$$|\alpha_{A, F}| \sim \frac{1}{\omega^3}, \quad \text{co daje spadek 60 dB/dekadę.}$$

Wcześniej wspomniano już, że wielkości κ_r i M_r niewiele zmieniają się wraz ze zmianą częstości ω_r , wobec tego w przybliżeniu możemy przyjąć $\kappa_r/M_r = z_r = \text{const} \approx z_1$.

W takim razie moduł receptancji maksymalnej można wyrazić przybliżoną zależnością

$$(3.6) \quad |\tilde{\alpha}_{A, F}| \approx \begin{cases} \left| \frac{z_1}{-\omega^2 + \omega_1^2 \left[1 + i \left(\eta + \zeta \omega + \alpha \frac{\omega}{\omega_1^2} \right) \right]} \right|, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ \left| \frac{z_1}{i\omega^2 \left[\eta + \zeta \omega + \frac{\alpha}{\omega} \right]} \right|, & \omega_1 \leq \omega < \infty. \end{cases}$$

Zależność tę przedstawiono graficznie na rys. 1 w skali logarytmicznej, oddzielnie dla każdego rodzaju tłumienia.



Rys. 1

Z powyższych rozważań i na podstawie rysunku można wywnioskować, że strukturę mechaniczną można w pierwszym przybliżeniu traktować jako mechaniczny filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości rezonansowej ω_1 i tłumieniu 20, 40, 60 dB/dek, w zależności od typu dysypacji w strukturze.

4. OSZACOWANIE ODPOWIEDZI STRUKTURY

Możemy obecnie przystąpić do zasadniczej części pracy, mianowicie do oceny odpowiedzi struktury na dane wymuszenie. Weźmy najpierw pod uwagę wymuszenie o zdeterminowanej amplitudzie siły Q , której częstotliwość może zmieniać się w pewnych granicach $p = p_0 + \Delta p$, $\Delta p/p_0 < 1$. W takim przypadku na podstawie (3.6) amplitudę drgań struktury w miejscu A można oszacować zależnością

$$(4.1) \quad u(A) \leq u(A)_{\max} = |\tilde{\alpha}_{A,F}(ip)| Q =$$

$$= \begin{cases} \left| \frac{z_1}{-p^2 + \omega_1^2 \left[1 + i \left(\eta + \zeta p + \alpha \frac{p}{\omega_1^2} \right) \right]} \right|, & 0 \leq p \leq \omega_1, \\ \left| \frac{z_1}{ip^2 \left[\eta + \zeta p + \frac{\alpha}{p} \right]} \right|, & \omega_1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Jak widać, do oceny amplitudy drgań niezbędne są następujące parametry charakterystyki dynamicznej struktury: ω_1^2 , $z_1 = z_1(A, F)$, oraz η , α , ζ , zależnie od typu tłumienia.

Ze wzorów (3.6) i (2.11) łatwo wywnioskować, że z_1/ω_1^2 ma sens ugięcia statycznego mierzonego w punkcie A od siły jednostkowej w punkcie F . Pomiarowo wielkość tę najłatwiej wyznaczyć mierząc amplitudę przyspieszenia a_1 przy pierwszej częstotliwości własnej $\omega = \omega_1$ i sile jednostkowej, gdyż

$$(4.2) \quad z_1 = \frac{a_1}{F_0} \left[\eta + \zeta \omega_1 + \frac{\alpha}{\omega_1} \right].$$

Współczynnik strat η (stratność) w strukturze wyznaczamy mierząc charakterystykę rezonansową prędkości i obliczając pasmo częstotliwości $\Delta\omega_1$, poza którym amplituda prędkości spada o 3 dB poniżej prędkości rezonansowej. Wtedy można obliczyć stratność η jako $\eta = \Delta\omega_1/\omega_1 = \Delta f_1/f_1$. W przypadku tłumienia innego niż histerezowe postępujemy podobnie, z tym że zamiast η podstawiamy odpowiednio $\zeta\omega_1$ lub α/ω_1 .

Jeśli chodzi o wyznaczenie typu tłumienia w strukturze, to jak łatwo wywnioskować z rys. 1 można go określić ze spadku amplitud rezonansowych, przemieszczenia, prędkości lub nawet przyspieszenia. I tak np. dla pomiaru prędkości przy tłumieniu masowym mamy spadek 0 dB/dek, przy histerezowym 20 dB/dek oraz przy viskozycznym 40 dB/dek.

Tak więc wyznaczając spadek względem częstotliwości dowolnej wielkości drganiowej możemy określić typ tłumienia w strukturze, współczynnik tłumienia, pierwszą częstotliwość rezonansową oraz wielkość $z_1(A, F)$ i tym samym uzyskać dane do oceny zachowania się struktury przy dowolnym wymuszeniu zdeterminowanym według wzoru (4.1).

Z przedstawionego wyżej rozumowania wynika, że oszacowanie zachowania się struktury przy wymuszeniu zdeterminowanym nie stanowi obliczeniowo większej trudności. Jednakże większość wymuszeń spotykanych w technice ma charakter stacjonarnych procesów przypadkowych wąsko lub szeroko pasmowych o określonej gęstości widmowej $S_F(\omega)$, i dyspersji σ_F^2 . Z korelacyjnej teorii procesów losowych wiadomo [8], że gęstość widmowa odpowiedzi i jej dyspersja wyraża się wzorem

$$(4.3) \quad S_u(\omega) = |\alpha_{A,F}|^2 S_F(\omega), \quad \sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha_{A,F}|^2 S_F(\omega) d\omega.$$

Zachodzi obecnie pytanie czy zastąpienie w powyższych wzorach receptancji struktury $|\alpha_{AF}|$ receptancją maksymalną $|\tilde{\alpha}_{A,F}|$ może być podstawą przybliżonej oceny charakterystyki dynamicznej struktury, jeśli wiadomo, że

$$(4.4) \quad \tilde{S}_u(\omega) = |\tilde{\alpha}_{A,F}|^2 S_F(\omega) \geq S_u(\omega), \quad \tilde{\sigma}_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\alpha}_{A,F}|^2 S_F(\omega) d\omega \geq \sigma_u^2.$$

Można przypuszczać, że błąd z tytułu takiej zamiany będzie największy, jeśli wymuszenie ma stałą gęstość widmową. Wiadomo jednak, że biały szum nie jest realizowalny fizycznie z uwagi na swą nieskończoną moc, wobec czego weźmiemy pod uwagę szum o gęstości widmowej stałej w zakresie częstości $(0, \omega_g)$, czyli

$$(4.5) \quad S_F(\omega) = \begin{cases} S_0 = \text{const}, & 0 \leq \omega \leq \omega_g, \\ 0, & \omega_g < \omega < \infty, \end{cases}$$

$$\sigma_F^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega) d\omega = S_0 \omega_g.$$

Przy takim wymuszeniu oszacowanie odpowiedzi struktury w myśl (4.4) i (3.6) będzie następujące:

$$(4.6) \quad \tilde{S}_u(\omega) = \begin{cases} \left| \frac{z_1}{-\omega^2 + \omega_1^2 \left[1 + i \left(\eta + \zeta \omega + \frac{\alpha \omega}{\omega_1^2} \right) \right]} \right|^2 S_0, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ \left| \frac{z_1}{i\omega^2 \left[\eta + \zeta \omega + \frac{\alpha}{\omega} \right]} \right|^2 S_0, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_g, \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_u^2 = S_0 \int_0^{\omega_1} \frac{z_1^2 d\omega}{\left| -\omega^2 + \omega_1^2 \left[1 + i \left(\eta + \zeta \omega + \frac{\alpha \omega}{\omega_1^2} \right) \right] \right|^2} + S_0 \int_{\omega_1}^{\omega_g} \frac{z_1^2 d\omega}{\omega^4 \left[\eta + \zeta \omega + \frac{\alpha}{\omega} \right]^2}.$$

Ponieważ obliczenie dyspersji w postaci (4.6) jest trudne i na ogół nie jest celowe, obliczymy ją oddzielnie dla każdego typu tłumienia, masowego $\tilde{\sigma}_{um}^2$, histerezowego $\tilde{\sigma}_{uh}^2$ i wiskotycznego $\tilde{\sigma}_{uw}^2$. Posługując się tablicami całek [9] po przekształceniach mamy odpowiednio

$$(4.7) \quad \tilde{\sigma}_{um}^2 = \frac{z_1^2}{\omega_1^2 \alpha^2} (S_0 \omega_1) \left\langle 1 - \frac{\omega_1}{\omega_g} + \frac{\pi \alpha}{4\omega_1} + \frac{\alpha^2/4\omega_1^2}{\sqrt{1 - (\alpha^2/4\omega_1^2)}} \text{Ar tgh} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\omega_1^2}} \right\rangle,$$

$$\tilde{\sigma}_{uh}^2 = \frac{z_1^2}{\omega_1^4 \eta^2} (S_0 \omega_1) \left\langle \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_g} \right)^3 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2(1+\eta^2)}} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{\sqrt{1+\eta^2}+1}} \text{Ar ctgh} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\pi}{2} - \text{arc tg} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}} \right] \right\rangle,$$

$$(4.7) \quad \tilde{\sigma}_{uv}^2 = \frac{z_1^2}{\omega_1^6 \zeta^2} (S_0 \omega_1) \left\langle \frac{1}{5} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_g} \right)^5 \right] + \frac{\pi}{4} \zeta \omega_1 + \right. \\ \left. + \frac{\frac{\zeta^2 \omega_1^2}{4}}{\sqrt{1 - \frac{\zeta^2 \omega_1^2}{4}}} \operatorname{Artgh} \sqrt{1 - \frac{\zeta^2 \omega_1^2}{4}} \right\rangle.$$

Zauważmy, że do ostatnich zależności możemy wprowadzić receptancję struktury przy pierwszej częstotliwości własnej oraz dyspersję wymuszenia, gdyż

$$(4.8) \quad \frac{z_1^2}{\omega_1^2 \alpha^2} = |\alpha_m(i\omega_1)|^2, \quad \frac{z_1^2}{\omega_1^4 \eta^2} = |\alpha_h(i\omega_1)|^2, \quad \frac{z_1^2}{\omega_1^6 \zeta^2} = |\alpha_w(i\omega_1)|^2, \\ S_0 \omega_1 = S_0 \omega_g \frac{\omega_1}{\omega_g} = \sigma_F^2 \frac{\omega_1}{\omega_g},$$

gdzie w zapisie receptancji zamieniono indeksy A, F symbolami oznaczającymi rodzaj tłumienia: m, h, w .

Po uwzględnieniu ostatnich związków wzory (4.7) przyjmą postać

$$(4.9) \quad \tilde{\sigma}_{um}^2 = |\alpha_m(i\omega_1)|^2 \sigma_F^2 \frac{\omega_1}{\omega_g} \left\langle 1 - \frac{\omega_1}{\omega_g} + \frac{\pi \alpha}{4 \omega_1} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2 / 4 \omega_1^2}{\sqrt{1 - (\alpha^2 / 4 \omega_1^2)}} \operatorname{Ar tgh} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4 \omega_1^2}} \right\rangle, \\ \tilde{\sigma}_{uh}^2 = |\alpha_h(i\omega_1)|^2 \sigma_F^2 \frac{\omega_1}{\omega_g} \left\langle \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_g} \right)^3 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2(1+\eta^2)}} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{\sqrt{1+\eta^2}+1}} \operatorname{Ar ctgh} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}} \right] \right\rangle, \\ \tilde{\sigma}_{uw}^2 = |\alpha_w(i\omega_1)|^2 \sigma_F^2 \frac{\omega_1}{\omega_g} \left\langle \frac{1}{5} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_g} \right) + \frac{\pi \zeta \omega_1}{4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\frac{\omega_1^2 \zeta^2}{4}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_1^2 \zeta^2}{4}}} \operatorname{Ar tgh} \sqrt{1 - \frac{\omega_1^2 \zeta^2}{4}} \right] \right\rangle.$$

Jak widać z powyższych zależności, znając rodzaj i wielkość tłumienia w strukturze oraz receptancję rezonansową przy pierwszej częstotliwości własnej można oszacować dyspersję odpowiedzi struktury na dowolne wymuszenie pasmem szumowym. Jest oczywiste, że oszacowanie takie można wykonać również dla procesów wymu-

szających o gęstości widmowej $S_F(\omega) \neq \text{const}$, jednak wtedy zależności otrzymane ze wzorów (4.4) będą bardziej złożone od (4.9).

Na podstawie wyprowadzonych wyżej wzorów można przejść do oceny porównawczej odpowiedzi struktury przy wymuszeniu harmonicznym i szumowym. Zauważmy ogólnie, że wielkości $|\alpha(i\omega_1)|^2 \sigma_F^2$ mogą być również traktowane jako kwadraty amplitudy drgań przy równoważnym wymuszeniu z częstością ω_1 i przy amplitudzie siły σ_F . Wobec tego możemy wprowadzić pewien współczynnik określający przewyższenie amplitudy odpowiedzi szumowej w stosunku do harmonicznego przy założeniu równoważności wymuszenia $\sqrt{S_0 \omega_g} = \sqrt{\sigma_F^2} \equiv F_0$. Współczynnik ten można nazwać współczynnikiem przewyższenia i zdefiniować jego kwadrat jako

$$(4.10) \quad K_u^2 = \frac{\tilde{\sigma}_u^2}{|\alpha(i\omega_1)|^2 \sigma_F^2} = \frac{\tilde{\sigma}_u^2}{|u(i\omega_1)|^2}.$$

Wprowadźmy jeszcze bezwymiarowe współczynniki tłumienia masowego $\alpha_m = \alpha/\omega_1$ i wiskotycznego $\zeta_w = \zeta\omega_1$. Wtedy na podstawie (4.10) i (4.9) odpowiednie współczynniki przewyższenia będą się przedstawiały następująco:

$$(4.11) \quad K_{um}^2 = \frac{\omega_1}{\omega_g} \left\langle 1 - \frac{\omega_1}{\omega_g} + \frac{\pi}{4} \alpha_m + \frac{\alpha_m^2/4}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_m^2}{4}}} \text{Ar tgh} \sqrt{1 - \frac{\alpha_m^2}{4}} \right\rangle,$$

$$(4.11) \quad K_{uw}^2 = \frac{\omega_1}{\omega_g} \left\langle \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_g} \right)^3 \right] + \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2(1+\eta^2)}} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{\sqrt{1+\eta^2}+1}} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \text{Ar ctgh} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2}} + \frac{\pi}{2} - \text{ar ctg} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{2}} \right] \right\rangle,$$

$$K_{uw}^2 = \frac{\omega_1}{\omega_g} \left\langle \frac{1}{5} \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_g} \right)^5 \right] + \frac{\pi \zeta_w}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\zeta_w^2}{4}}{\sqrt{1 - \frac{\zeta_w^2}{4}}} \text{Ar tgh} \sqrt{1 - \frac{\zeta_w^2}{4}} \right\rangle, \quad \frac{\omega_1}{\omega_g} < 1.$$

Jak widać z (4.11), do określenia współczynnika przewyższenia wystarczy znajomość typu i wartości współczynnika tłumienia oraz częstości własnej struktury ω_1 i częstości granicznej pasma szumowego ω_g . Znając ten współczynnik możemy na podstawie (4.4) i (4.10) ocenić, że dyspersja równoważnego wymuszenia przypadkowego nie przekroczy wartości

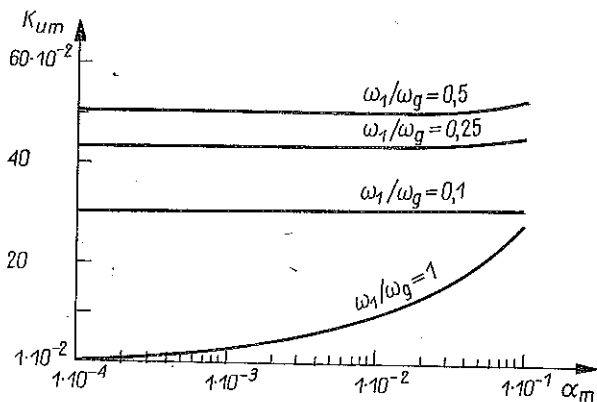
$$(4.12) \quad \sigma_u^2 \leq \tilde{\sigma}_u^2 = K_u^2 |u(i\omega_1)|^2.$$

Przechodząc do amplitud drgań struktury u_{RMS} (pierwiastek ze średniego kwadratu amplitudy) będziemy mieli ocenę ostateczną

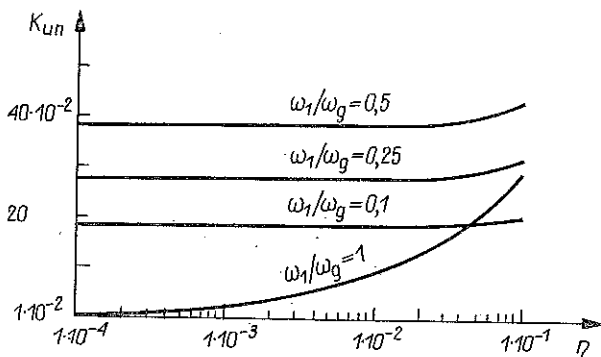
$$(4.13) \quad U_{RMS} \leq K_u |u(i\omega_1)|_{RMS}.$$

5. PRZYKŁAD

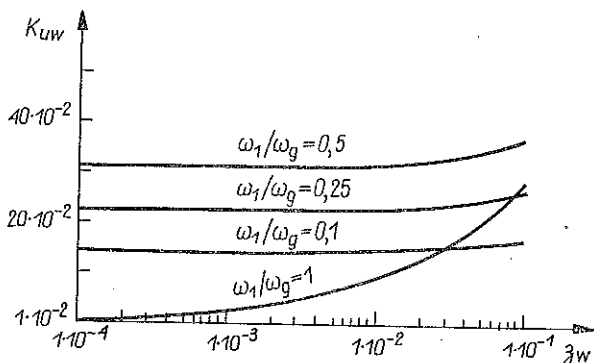
W celu weryfikacji otrzymanych wyników ogólnych dla współczynników prze-
wyższenia (4.11) przyjęto do obliczeń następujące zakresy zmienności parametrów
 $\omega_1/\omega_g = 1; 0,5; 0,25; 0,1$, oraz $\alpha_m; \eta; \zeta_w$ w zakresie $1 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-1}$. Wyniki obliczeń
przedstawiono na rys. 2 dla K_{um} , na rys. 3 dla K_{un} i na rys. 4 dla K_{uw} .



Rys. 2



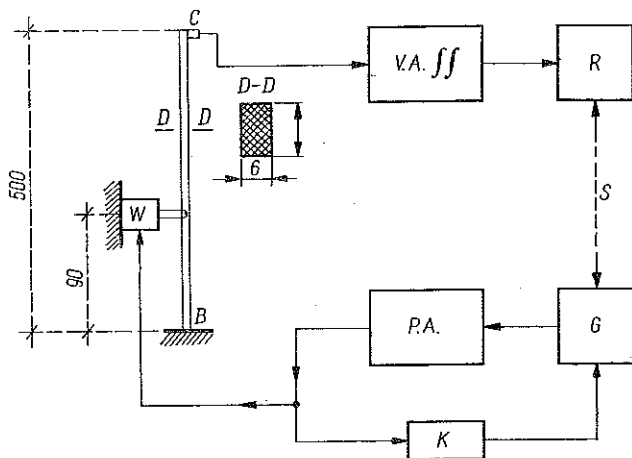
Rys. 3



Rys. 4

Analizując wyniki zamieszczone na rysunkach można stwierdzić, że wszystkie współczynniki przewyższenia są mniejsze od jedności, $K_u < 1$. Wpływ wielkości współczynników tłumienia na wartości współczynników przewyższenia jest najsilniejszy dla $\omega_1/\omega_g = 1$, malejąc następnie bardzo szybko w miarę zmniejszania się ω_1/ω_g . Jeśli chodzi o maksimum współczynnika przewyższenia względem szerokości pasma ω_1/ω_g , to z przebiegu rysunków wynika, że maksimum to znajduje się w zakresie $0,5 < \omega_1/\omega_g < 1$.

W dalszym ciągu przykładu wykonano eksperyment z belką wspornikową w charakterze obiektu pomiarowego. Badania wykonano zestawem pomiarowym, którego schemat pokazano na rys. 5.

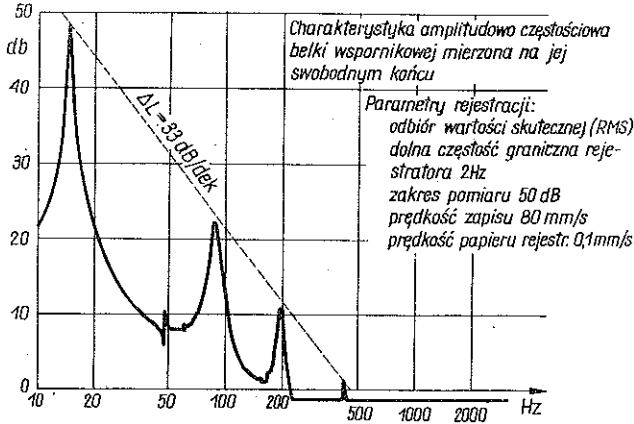


Rys. 5

B — belka wspornikowa stalowa o przekroju $0,6 \times 2,0 \text{ cm}^2$; C — czujnik przyspieszenia, B i K typ 4332; V, A — wzmacniacz napięciowy i układ całkujący, B i K typ 2112+ZR 0020; R — rejestrator, B i K typ 2305; G — generator sinusowo szumowy, B i K typ 1025; P, A — wzmacniacz mocy PYELING typ PP 250 VAP; W — wzbudnik drgań PYELING typ V 50; K — sprzężenie zwrotne; S — synchronizacja przesuwu.

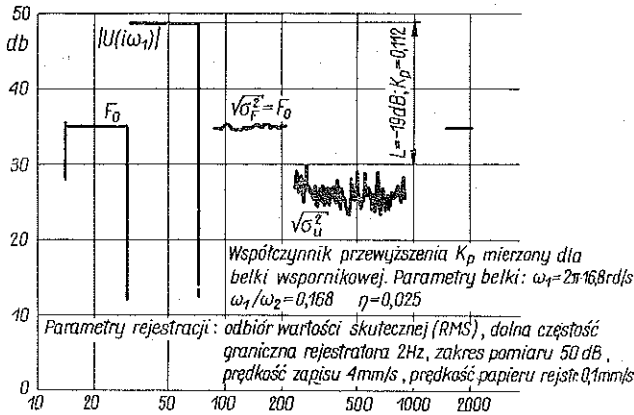
Charakterystykę amplitudowo częstościową belki przedstawiono na rys. 6, z którego wynika, że spadek amplitud rezonansowych w skali częstości wynosi 33 dB/dek, co w przybliżeniu można uznać jako efekt tłumienia histerezy. Pierwsza częstość własna układu wynosi $\omega_1 = 16,8 \cdot 2\pi \text{ rd/s}$, a współczynnik strat $\eta = 0,025$. Jako wymuszenia równoważnego przypadkowego użyto pasma szumowego o szerokości $\Delta f = 100 \text{ Hz}$ i częstości środkowej pasma $f_0 = 50 \text{ Hz}$, tak że $\omega_g = 2\pi (50 + \Delta f/2) = 100 \cdot 2\pi \text{ rd/s}$. W związku z tym szerokość względna pasma szumowego wynosi $\omega_1/\omega_g = 0,168$. Otrzymany w tych warunkach pomiarowy współczynnik przewyższenia wynosi $K_p = 0,112$. Sposób doświadczalny wyznaczania tego współczynnika przedstawiono na rys. 7. Z drugiej strony, dla danych otrzymanych z pomiarów $\omega_1/\omega_g = 0,168$, $\eta = 0,025$ obliczono wartość współczynnika przewyższenia przy tłu-

mieniu histerezowym otrzymując ze wzoru (4.11) wartość $K_{uh} = 0,245$. Tak więc współczynnik przewyższenia otrzymany z pomiarów jest mniejszy niż współczynnik uzyskany z wyniku oszacowania przeprowadzonego w pracy, $K_{uh} > K_p$. Trzeba tu dodać, że dla obiektu jednowymiarowego, jakim jest belka, gęstość częstości własnych



Rys. 6

w skali częstości jest mała, stąd też duża rozpiętość we współczynnikach przewyższenia K_{uh} i K_p . Wynika ona z aproksymacji charakterystyki rzeczywistej (rys. 6) charakterystyką modelową przyjętą w pracy (rys. 1).



Rys. 7

Ocenę amplitudy za pomocą wzorów (4.13) lub (4.12) należy wobec tego traktować jako majorantę możliwych amplitud drgań struktury, rzeczywiste zaś amplitudy drgań będą tym bliższe ocenie (4.13), im większa będzie gęstość częstości własnych struktury.

6. WNIOSKI

Przeprowadzane rozważania ogólne i podany przykład liczbowy poparty badaniami doświadczalnymi wykazują, że koncepcja receptancji maksymalnej przedstawiona w pracy może być podstawą do przybliżonej oceny własności dynamicznych dowolnych struktur mechanicznych. Ocena tę można przeprowadzić tak dla wymuszenia zdeterminowanego jak i przypadkowego. Metoda zaproponowana w pracy dotyczy struktur jednorodnych, jednak, jak wynika z badań [10], nawet obiekty złożone, jakimi są obrabiarki zespołowe, cechują się wyraźnie zarysowanym typem tłumienia histerezy. Stąd też wydaje się, że i w tym przypadku można zastosować zaproponowaną metodę oceny.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. SKUDRZYK, *Simple and complex vibratory systems*, The Pennsylvania State University Press, 248 - 255, 1968.
2. D. J. MEAD, *The vibration characteristics of damped sandwich plates with stiffeners and various boundary conditions*, *Strojnický Casopis*, 22, 1, 1971.
3. F. KANDIANIS, *Frequency response of structures excited by transient or random forces using cross correlation and Laplace transform*, I.S.V.R. Tech. Report, University of Southampton, No 47, August 1971.
4. В. ГОЛЬДСМИТ, *Удар*, Стройиздат, с. 99, Москва 1965.
5. С. М. HARRIS, CH. E. CREDE, *Shock and vibration handbook*, Vol. 1, 1, Chapt. 2, Mc Graw-Hill, New York 1961.
6. E. KAMIŃSKI, *Identyfikacja układów mechanicznych z członami lepkosprężystymi*, ITBP Reports, 37, 1971.
7. Б. В. Павлов, *Акустическая диагностика механизмов*, Машиностроение, с. 161, Москва 1971.
8. A. A. SWIESZNIKOW, *Podstawowe metody funkcji losowych*, s. 91, 103, PWN, Warszawa 1965.
9. И. М. РЫЖИК, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гос. изд. техн. теорет. лит., с. 79, Москва 1951.
10. Cz. CEMPEL, R. GAPSKI, J. KOMOSINSKI, St. PRZYGÓRZEWSKI, *Badania statyczne i dynamiczne obrabiarek zespołowych*, Materiały Konferencji Naukowej Wydziału Mechaniczno-Technologicznego Politechniki Poznańskiej, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 1972 (w druku).

Резюме

ОЦЕНКА РЕАКЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

В работе предложен приближенный метод оценки реакции механической системы на произвольные воздействия. Исходя из общей модели системы с тремя различными видами демпфирования исследуется максимальная динамическая податливость системы, рассматриваемая как основная динамическая характеристика. Эта характеристика позволяет получить оценку реакции системы на произвольное гармоническое возмущение, а также на возмущения типа полосного шума. В работе дан пример и приведены результаты экспериментов.

SUMMARY

ON THE ESTIMATION OF RESPONSE OF A MECHANICAL STRUCTURE
TO ARBITRARY EXCITATION

A method is proposed for estimation of the response of a mechanical system to an arbitrary excitation. Starting with a general model of the structure and three kinds of damping, the concept of maximum receptance playing the role of dynamic characteristics is presented. This concept is then used to determine the response of the structure to arbitrary types of harmonic excitations. When the excitation is considered as a random process, the corresponding variance of the response is derived. Numerical and experimental examples are given.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 maja 1972 r.
