ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 21, 1, 107–112, 1973, Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

O PARAMETRACH KRYTYCZNYCH WZGLĘDNEGO RUCHU DWÓCH PŁYT

ROMAN BOGACZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Rozwój badań poświęconych zagadnieniom stateczności względnego ruchu ośrodków ciągłych zapoczątkowany został w aerodynamice i towarzyszył rozwojowi lotnictwa. Obecnie zagadnienia te mają już bogatą literaturę w różnych dziedzinach fizyki i techniki.

Do prac, w których badano układy mechaniczne, należą m.in. [1 i 2], natomiast z licznych prac poświęconych analizie stateczności układów teorii pól połączonych wymienimy pracę [3] tematycznie najbardziej zbliżona do rozważanych przez nas zagadnień.

W pracy [1] wykazano, że istnieje prędkość krytyczna układu, po której przekroczeniu ruch układu jest niestateczny. Podano również metodę określania tej prędkości. Praca [2] stanowi uogólnienie rezultatów uzyskanych w [1] na przypadek ośrodków lepkosprężystych. Dyskutuje się w niej wpływ lepkości na wartość krytycznej prędkości ruchu dla liniowych modeli ciała lepkosprężystego. W pracy [3] zbadano stateczność względnego, bezkontaktowego ruchu dwóch piezodielektryków wykazując istnienie obszarów niestateczności oraz podając metodę ich wyznaczania.

Niniejszy komunikat poświęcony jest analizie układu złożonego z dwóch dociśniętych do siebie płyt, przesuwających się po sobie ze stałą prędkością względną V. W części drugiej niniejszej pracy rozważymy przypadek płyt o materiale sprężystym, natomiast w części trzeciej przypadek lepkosprężystego materiału płyt. Pracę zakończymy omówieniem zasadniczych wniosków.

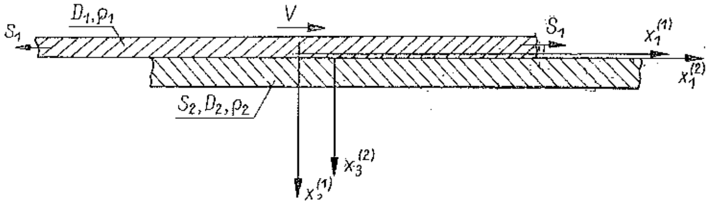
2. Przypadek płyt sprężystych

Rozważmy układ złożony z dwóch nieograniczonych płyt o sztywnościach D_i, gęstościach materiału ρ_i i stałych jednostkowych siłach naciągu S_i (np. w przypadku pominięcia tarcia na powierzchni styku płyt).

Założymy, że płyty poruszające się ze stałą prędkością względną V w ruchu niezaburzonym wywierają na siebie jednostkowy nacisk P_0. Z każdą z płyt zwiążemy układ współrzędnych $x_j^{(1)}$ i $x_j^{(2)}$ tak, aby płyta o parametrach D_1, ρ_1, S_1 poruszała się względem drugiej z płyt w kierunku osi $x_1^{(i)}$.

Związki pomiędzy układami współrzędnych wyrażą się wówczas następująco:

$$x_1^{(2)} - x_1^{(1)} = Vt, \quad x_3^{(1)} - x_3^{(2)} = 0. \tag{2.1}$$



Rys. 1

Oznaczając przemieszczenia płyt w kierunku osi $x_3^{(i)}$ przez $W_i = W_i(x_1^{(i)}, t)$ $(i=1, 2)$ napiszemy równania ruchu obu płyt w następującej postaci:

$$D_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial x_1^{(i)4}} - S_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial x_1^{(i)2}} + \rho_i h_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} = p_i(x_1^{(i)}, t), \tag{2.2}$$

gdzie przez h_i oznaczono grubości płyt.

W dalszych rozważaniach zakładać będziemy, że zaburzeniowe ciśnienie spełnia warunek

$$|p_i(x_1^{(i)}, t)| < P_0, \tag{2.3}$$

co zapewni płytom kontakt na całej ich powierzchni.

Warunek zgodności przemieszczeń i ciśnień na powierzchni styku płyt napisany w jednym z układów współrzędnych, np. $x_j^{(1)}$, przyjmie postać:

$$W_1(x_1^{(1)}, t) - W_2(x_1^{(1)}, t) = 0, \quad p_1(x_1^{(1)}, t) + p_2(x_1^{(1)}, t) = 0. \tag{2.4}$$

Jedyną nietrywialną postacią stacjonarnych rozwiązań układu równań (2.2) jest rozwiązanie w postaci fali bieżącej:

$$W_1(x_1^{(i)}, t) = A_i e^{ik(x_1^{(i)} - v_i t)}, \quad p_i(x_1^{(i)}, t) = P_i e^{ik(x_1^{(i)} - v_i t)}, \quad i = 1, 2. \tag{2.5}$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do równań ruchu (2.2) a następnie spełnieniu warunków (2.4) otrzymamy zależność

$$\alpha(R_1^2 - v_1^2) = -R_2^2 + v_2^2, \tag{2.6}$$

gdzie

$$R_i^2 = \frac{D_i k^2 + S_i}{\rho_i h_i}, \quad \alpha = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2 h_2}. \tag{2.6'}$$

Związek pomiędzy prędkościami fazowymi v_1 i v_2 a prędkością ruchu V otrzymamy po wykorzystaniu wzorów (2.1), (2.4) i (2.5). Przyjmie on postać

$$v_1 + v_2 + V = 0. \tag{2.7}$$

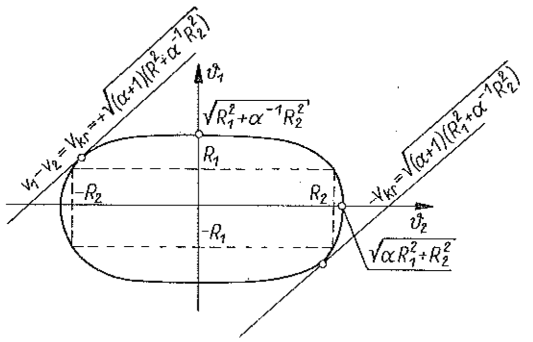
Równania (2.6) i (2.7) stanowić będą układ równań charakterystycznych naszego problemu i będą podstawą do wyznaczania parametrów krytycznych, określających granicę zakresu niestateczności, tj. obszaru, w którym spełniona będzie nierówność:

$$\operatorname{Im}(kv_i) > 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.8}$$

Warunek ten oznacza narastanie amplitudy fali w czasie (w układzie liniowym nieograniczone o stałym dekremencie).

Ze względu na fakt, że rozważany przez nas układ nie jest układem dysypatywnym w obszarze dokrytycznym, rozwiązania o postaci (2.5) nie będą zanikać. Jest to równoznaczne z tym, że przy stałej prędkości ruchu $V \leqslant V_{kr}$ pierwiastki układu równań v_1, v_2 będą liczbami rzeczywistymi. Z postaci (2.7) wynika, że jeżeli przy pewnej wartości V wystąpią pierwiastki zespolone, to muszą one być parami sprzężone. Dwa z tych pierwiastków reprezentują rozwiązania zanikające, natomiast drugie dwa spełniające (2.8) rozwiązania narastające, niestateczne (por. [1 – 4]). Tak więc wartością graniczną prędkości będzie $V = V_{kr}$, dla której prosta opisana równaniem (2.7) będzie styczna do krzywej, opisanej równaniem (2.6). Powyższy sposób wyznaczania parametrów krytycznych, stosowany także w pracy [1], uzasadniony jest na podstawie kryterium stateczności Nyquista.

Postać krzywej, opisanej równaniem (2.6) z prostymi (2.7), dla przypadków krytycznych ilustruje rys. 2.



Rys 2.

Parametry krytyczne rozważanych dotychczas układów znajdowano zazwyczaj graficznie. W naszym przypadku łatwo zauważyć, że dla płyt o takich samych parametrach krytyczna prędkość ruchu wynosi $2R$, natomiast w przypadku ogólnym z rozważań analitycznych otrzymujemy wzór

$$V_{kr} = \pm \sqrt{(\alpha+1)\,(R_1^2+\alpha^{-1}R_2^2)}. \tag{2.9}$$

Postać wyrażenia (2.6a), określającego kwadrat prędkości fal sprężystych w płycie pozwala wnioskować, że utrata stateczności płyt w postaci fali o większej wartości liczby falowej k następuje przy większej prędkości ich względnego ruchu. Teoretycznie najmniejszą prędkością krytyczną jest V_{kr} dla $k = 0$, jednak ze względu na fakt, że w praktyce mamy do czynienia z układami ograniczonymi, aby korzystać ze wzoru (2.9), należy nałożyć odpowiednie ograniczenia na liczbę falową k, żeby oddziaływania brzegów były względnie małe.

3. Przypadek płyt lepkosprężystych

W celu zbadania wpływu lepkosprężystego charakteru materiału płyt na wartość prędkości krytycznej rozważymy przypadek płyt o modelu Voigta. Równania ruchu (2.2) po uzupełnieniu wyrazem uwzględniającym lepkość przyjmą postać

$$D_i\left(1+\gamma_i\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 W_i}{\partial x_1^{(i)4}} - S_i\frac{\partial^2 W_i}{\partial x_1^{(i)2}} + \rho_i h_i\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} = P_i(x_1^{(i)}, t). \tag{3.1}$$

Poszukiwać będziemy rozwiązań układu równań (3.1) w postaci (2.4), podobnie jak to miało miejsce w przypadku sprężystym. Ze względu na dysypatywność układu rozwiązaniom zanikającym, występującym w zakresie dokrytycznym, odpowiadać będą zespolone wartości pierwiastków v_1 i v_2, co nie pozwala stosować kryterium stateczności wykorzystywanego w przypadku płyt sprężystych.

Wykorzystując fakt, że rozwiązania zanikające (stateczne), jako funkcje prędkości ruchu, przechodzą w narastające (niestateczne) w sposób ciągły, poszukiwać będziemy rozwiązań równań charakterystycznych, reprezentujących rozwiązania okresowe, które wystąpią na granicy obu zakresów. Graniczne rozwiązanie okresowe charakteryzuje się zerowym względnym przesunięciem fazowym (które jest funkcją ilorazu urojonej i rzeczywistej części równania charakterystycznego).

Warunek ten (jak udowodniono w [4]) jest równoważny kryterium stateczności Michajłowa.

Równanie charakterystyczne w przypadku układu o płytach lepkosprężystych przyjmie postać

$$\Phi(v_1, v_2) = \alpha\,[(1-i\beta_1 v_1)\,R_1^2 - v_1^2] - [-(1-i\beta_2 v_2)\,R_2^2 + v_2^2] = 0, \tag{3.2}$$

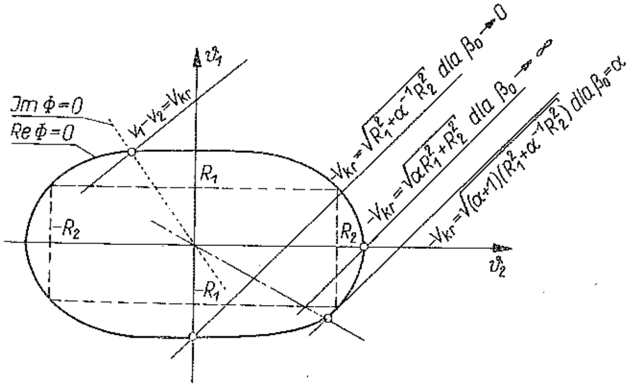
gdzie

$$\beta_i = \frac{\gamma_i D_i k^3}{D_i k^2 + S_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Rozwiązaniem naszego problemu będzie znalezienie rzeczywistych v_1 i v_2, spełniających rzeczywistą część równania (3.2) (tj. równania (2.6)) oraz części urojonej (3.2) lub równoważnego warunku na przesunięcie fazowe o postaci

$$R_1^2\,\beta_1\,v_1\,(R_2^2 - v_2^2) = -R_2^2\,\beta_2\,v_2\,(R_2^2 - v_1^2). \tag{3.3}$$

Graficzne przedstawienie funkcji (2.6), (3.3) oraz (2.7) dla przypadku krytycznego ilustruje rys. 3.



Rys. 3

Rozwiązując układ równań algebraicznych (2.7) i (3.2) otrzymamy wyrażenie określające wartość prędkości krytycznej jako funkcji parametrów charakteryzujących układ:

$$V_{\text{kr}} = \pm(\beta_0 + 1)\sqrt{\frac{\alpha R_1^2 + R_2^2}{\alpha + \beta_0^2}}, \tag{3.4}$$

gdzie

$$\beta_0 = \frac{\gamma_2 D_2}{\gamma_1 D_1}.$$

Porównując wyrażenia (2.9) i (3.4) zauważymy, że w przypadku, gdy $\alpha = \beta_0$ prędkość krytyczna układu tłumionego i układu bez tłumienia jest taka sama, natomiast przy $\alpha \neq \beta_0$ i $\gamma_i \neq 0$ układ traci stateczność przy mniejszych prędkościach względnego ruchu płyt. Charakterystyczny jest fakt, że wartość prędkości krytycznej zależy od ilorazu współczynników lepkości płyt, natomiast nie zależy od ich wartości. Prowadzi to do pozornych sprzeczności, gdy wartości tych współczynników dążą do zera. Porównując bowiem prędkości krytyczne w przypadku $\gamma_i = 0$ oraz w przypadku $\gamma_i \to 0$ przy $\alpha \neq \beta_0$ zauważymy, że będą się one różnić o skończoną wartość. Fakt ten łatwo wyjaśnić przeprowadzając analizę dekrementów narastania fal, które zależą od gęstości dysypowanej przez układ energii, a więc od wartości współczynników γ_i. Okazuje się wówczas, że w zakresie nadkrytycznym dla układu dysypatywnego przy prędkościach nie przekraczających prędkości krytycznej układu o płytach sprężystych, nieskończenie małe narastanie fal w nieskończenie długim czasie (ustacjonarnienie) powoduje wzrost amplitudy, co jest klasyfikowane jako niestateczność. Stąd wniosek, że przy projektowaniu układów o stosunkowo krótkich okresach działania i nieznacznym tłumieniu można tłumienie pominąć. Minimalne wartości prędkości krytycznych układu tłumionego określają wzory

$$V_{kr} \to \sqrt{\alpha R_1^2 + R_2^2}, \text{ gdy } \beta_0 \to \infty;$$

natomiast gdy $\beta_0 \to 0$,

$$V_{kr} \to \sqrt{R_1^2 + \alpha^{-1} R_2^2}.$$

Porównując powyższe wzory ze wzorem (2.9) zauważymy, że przy pewnych wartościach α różnica pomiędzy wartościami prędkości krytycznych może być znaczna.

4. Uwagi końcowe

Z przytoczonych rozważań wynika, że parametrami decydującymi o wartości prędkości krytycznej względnego ruchu dwóch płyt są: sztywności i jednostkowe siły naciągu płyt, iloraz ich jednostkowych mas oraz iloraz współczynników lepkości.

Istotny jest fakt, że lepkość może wpływać jedynie na obniżenie krytycznej prędkości ruchu (co nie jest intuicyjnie oczywiste). Z tego też względu przy rozstrzyganiu kwestii stateczności układów o względnie długim czasie działania pominięcie nawet niewielkiego tłumienia jest niewskazane, bowiem przy pewnych parametrach prowadzi do bardzo istotnych błędów w określeniu prędkości krytycznej. W niektórych przypadkach dla celów technicznych pożądana jest znajomość dekrementów narastania fal: jest to związane z koniecznością numerycznego rozwiązania układu równań charakterystycznych (w celu określenia urojonych części pierwiastków), czym nie zajmowaliśmy się w niniejszej pracy.

Poważne znaczenie dla techniki ma określenie wpływu lepkości na stateczność konstrukcji opływanych cieczą. Wybranym zagadnieniom tego problemu poświęcimy oddzielny komunikat.

Literatura cytowana w tekście

1. Р. Е. Лампер, *Устойчивость взаимного движения двух сред*, Изд. Высших Уч. Зав., Серия Авияционная Техника, No 4, 1959.
2. R. Bogacz, *The influence of viscosity on the stability of a relative motion of two media*, Arch. Appl. Mech., **24**, 4, 1972.
3. S. Kaliski, *Stability of relative, contactless motion of piezoelectric bodies*, Proc. Vibr. Probl., **7**, 2, 1966.
4. R. Bogacz, *Interaction between a moving set of nonlinear oscillators and a travelling wave*, Proc. Vibr. Probl., **9**, 1, 1968.

Резюме

О КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ПЛАСТИНОК

В работе дан анализ устойчивости системы, состоящей из неограниченных пластинок, перемещающихся друг по другу с постоянной скоростью. Рассмотрены пластинки из упругого и вязко-упругого материалов. Даны формулы, определяющие критическую относительную скорость пластинок в зависимости от параметров, характеризующих систему. Показано, что вязкость может существенно влиять на кричтиескую величину скорости относительного движения.

Summary

ON THE CRITICAL PARAMETERS OF THE RELATIVE MOTION OF TWO PLATES

An analysis of stability of a system consisting of two plates sliding on each other at a constant velocity. The cases are considered of elastic and viscoelastic materials of the plates. The formulae determining the critical value of the relative motion of plates is given, taking into account the characteristic parameters of the system. It is shown that viscosity may substantially influence the critical velocity of motion.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 kwietnia 1972 r.