

MOMENT OPOROWY CIENKIEJ TARCZY WIRUJĄCEJ W OSŁONIE (LAMINARNE PRZEPLYWY WTÓRNE)

RYSZARD G R Y B O Ś (GLIWICE)

1. SFORMUŁOWANIE I RÓWNANIA ZAGADNIENIA

Przedmiotem rozważań będzie zagadnienie momentu oporowego, na jaki napotyka płaska tarcza kołowa o promieniu a , wirująca jednostajnie w swej płaszczyźnie. Tarcza osadzona jest w walcowej osłonie, której wewnątrz wypełnione jest płynem lepkiem, nieściśliwym. W związku z tym zarówno przy tarczy, jak i na ścianach osłony tworzą się trójwymiarowe warstwy przyścienne, co do których zakładamy, iż mają charakter laminarny. To założenie ogranicza zakres stosowalności wyprowadzonych wzorów. Wiadomo bowiem z doświadczeń [2, 5 i 8], że powyżej pewnej granicznej wartości liczby Reynoldsa przepływy wtórne przybierają charakter burzliwy.

Będziemy pomijać wpływ oporu powstającego na walcowych ścianach osłony oraz na obrzeżu tarczy, traktując jej grubość jako małą w porównaniu z promieniem a . Nie będziemy także zajmowali się wpływem szorstkości ścian na wartość momentu oporowego.

Tak sformułowane zagadnienie było przedmiotem rozważań kilku badaczy [1, 2 i 3]. W pracy [5] podjęto oprócz tego próbę przybliżonego uwzględnienia tarcia na walcowych ścianach osłony. Wartości momentu oporowego najbardziej zbliżone do wyników pomiarowych uzyskali T. OKAYA i M. HASEGAWA w pracy [1] oraz J. W. DAILY i R. E. NECE [5]. Jednakże prace te zawierają istotne błędy merytoryczne, które omówimy w p. 6.

Tymczasem przytoczymy podstawowe równania zagadnienia. Będą to oczywiście równania Naviera-Stokesa, moment zaś oporowy określimy z pomocą zasady krętu. Równania Naviera-Stokesa napiszemy w walcowym układzie współrzędnych r, φ, z , przy czym ze względu na ustalony i osiowo-symetryczny charakter przepływu pominiemy od razu wszystkie pochodne lokalne i względem φ :

$$(1.1) \quad v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right),$$

$$(1.2) \quad v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right),$$

$$(1.3) \quad v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

Tutaj v_r, v_ϕ, v_z są składowymi wektora prędkości,

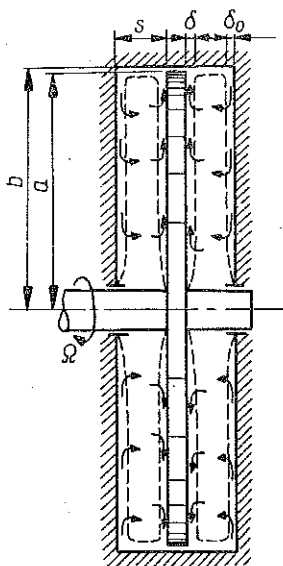
$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_z \mathbf{e}_z,$$

p oznacza ciśnienie, ρ gęstość, ν lepkość kinematyczną, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ wersory układu współrzędnych.

Oprócz tego spełnione musi być równanie ciągłości dla płynu nieściśliwego:

$$(1.4) \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Ustalimy jeszcze warunki brzegowe dla warstwy przyściennej na tarczy. Eksperymenty [2, 3 i 5] wykazują, że gdy szczelina osiowa między tarczą i osłoną jest dostatecznie duża w porównaniu z grubością warstwy przyściennej, to w komorze pomiędzy warstwami przyściennymi ustala się pewien przepływ, podczas którego płyn krąży jak ciało sztywne z prędkością kątową ω , mniejszą niż prędkość Ω tarczy ($\omega = \Omega/\beta$, $\beta > 1$). Ten obszar przepływu umownie nazywamy *rdzeniem wirującym*, lub krótko — rdzeniem. Ścisłej mówiąc jest to przepływ, w którym składowa obwodowa prędkości jest wprost proporcjonalna do odległości od osi obrotu ($v_\phi = \omega r$), przepływu zaś promieniowego nie ma ($v_r = 0$). Powstawanie rdzenia stwierdzono w komorach, dla których stosunek szerokości s szczeliny osiowej do promienia a był większy od pewnej wartości granicznej. W literaturze [2 i 4] cytowana jest wartość $(s/a)_l = 0,02$, jednakże dokładniejszym określeniem tej wielkości zajmiemy się w p. 4.



Rys. 1

Grubość warstwy przyściennej jest, jak zwykle, wielkością umowną. W naszym przypadku będziemy ją interpretować jako taką odległość od powierzchni tarczy, na której nie ma już przepływu promieniowego.

Oprócz tego kinematyczne warunki brzegowe zagadnienia muszą wyrażać fakt przywierania elementów płynu do powierzchni tarczy oraz równość prędkości obwodowych w rdzeniu i na zewnętrznej granicy warstwy przyściennej, czyli

$$(1.5) \quad \begin{aligned} v_r &= 0, & v_\phi &= r\Omega & \text{dla} & z=0, \\ v_r &= 0, & v_\phi &= r\omega & \text{dla} & z=\delta. \end{aligned}$$

Dzięki odśrodkowej sile bezwładności w warstwie przyściennej na tarczy przepływ ma charakter odśrodkowy, na osłonie zaś — dośrodkowy. Z drugiej strony jest

oczywiste, że w miarę zwiększania się odległości od osi obrotu wzrasta ilość płynu zawarta w elementarnym słoju warstwy przyściennej, nawet przy założeniu jej niezmiennej grubości. Przyrost masy płynu uczestniczącego w ruchu przyściennym uzupełniany jest elementami płynu porywanymi z rdzenia. Tak ma się rzecz w warstwie przyściennej na tarczy.

Natomiast na nieruchomej, płaskiej ścianie osłony zachodzi proces odwrotny, tzn. część płynu w miarę zbliżania się do osi zostaje sukcesywnie oddawana do rdzenia. To wyjaśnia, dlaczego w rdzeniu, obok dominującego ruchu okrężnego, musi istnieć także pewien przepływ osiowy od osłony ku tarczy (rys. 1).

W związku z tym i w warstwie przyściennej pole prędkości musi zawierać składową v_z . Pomijanie tej składowej (jak to uczyniono w pracach [1 i 5]) jest uproszczeniem, które prowadzi do sprzeczności z warunkiem ciągłości. Funkcja $v_z(r, z)$, oprócz warunku ciągłości (1.4), musi czynić zadość warunkowi brzegowemu

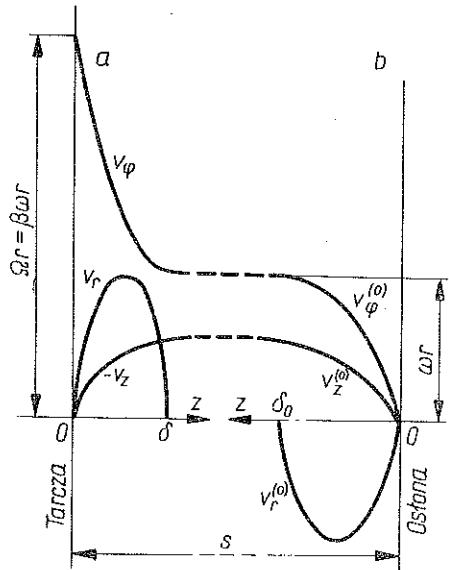
$$(1.6) \quad v_z = 0, \quad \text{dla} \quad z = 0.$$

Na rys. 2 przedstawione są profile prędkości w przestrzennej, laminarnej warstwie przyściennej na tarczy i na płaskiej ścianie osłony, gdy komora jest na tyle szeroka, iż może się utworzyć rdzeń.

2. WYPROWADZENIE WZORU NA MOMENT OPOROWY

Wzór na moment oporowy wyprowadzimy z zasady krętu. Z faktu, iż pola prędkości w rdzeniu i w warstwie przyściennej różnią się istotnie między sobą, wynika, że kręt tej masy płynu, która przenika z rdzenia do warstwy przyściennej (lub na odwrót) ulega ilościowej zmianie. Ponieważ przepływ wtórny jest spowodowany ruchem tarczy, przeto zmiana krętu ma swój równoważnik w momencie sił zewnętrznych działających na płyn. Liczbowo moment ten równa się momentowi sił tarcia $M_z^{(t)}$ na tarczy, która w tym układzie spełnia rolę elementu pośredniczącego w przekazywaniu energii silnika do płynu.

Podobnie jak w pobliżu tarczy zmiana krętu ulega również część płynu przedostająca się z warstwy przyściennej na osłonie do rdzenia. Ta zmiana krętu spowodowana



Rys. 2

jest momentem $M_z^{(0)}$ sił, jakimi osłona działa na płyn. Oczywiście doznaje ona ze strony płynu oddziaływania liczbowo równego lecz skierowanego przeciwnie.

Nie należy sądzić, że wartości momentów $M_z^{(t)}$ i $M_z^{(0)}$ są sobie równe. Wynika to z faktu, że przepływy wtórne przy tarczy i przy osłonie wykazują odmienne pola prędkości, a więc i zmiana krętu w pierwszym przypadku będzie inna niż w drugim. Praca różnicy $M_z^{(t)} - M_z^{(0)}$ momentów zostaje zamieniona na ciepło.

Jak wynika z powyższych uwag, czynnikiem istotnym w przekazywaniu ruchu tarczy do płynu jest lepkość, dzięki której powstają warstwy przyścienne, będące obszarem intensywnej wymiany pędu między elementami płynu.

Moment oporowy tarczy wirującej w płynie lepkiem równa się przeto zmianie krętu tej części płynu, która przenika z rdzenia do warstwy przyściennej na tarczy. Wobec tego właściwym równaniem dynamicznym dla opisu tego zjawiska będzie równanie zasady krętu

$$(2.1) \quad \rho \frac{d}{dt} \int \int \int_0 (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dO = \mathbf{M},$$

gdzie $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$ oznacza promień-wektor elementu płynu o objętości $dO = r dr d\varphi dz$, O objętość warstwy przyściennej, $\mathbf{M} = M_r^{(t)}\mathbf{e}_r + M_\varphi^{(t)}\mathbf{e}_\varphi + M_z^{(t)}\mathbf{e}_z$ wektor momentu sił, jakimi tarcza działa na płyn.

Jeśli rozwiniemy pochodną substancjalną

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

(∇ oznacza operator Hamiltona) i odrzucimy pochodną lokalną ze względu na ustalony charakter przepływu, to równanie (2.1) przyjmie postać

$$\rho \int \int \int_0 \mathbf{v} \nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dO = \mathbf{M}.$$

Aby napisać go w formie analitycznej, celowe będzie zamiast tensora $\nabla (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ wprowadzić do rozważań trzy następujące wektory

$$\nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_r = \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_r}{r \partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_r}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_\varphi = \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_\varphi}{r \partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_z = \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_z}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_z}{r \partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_z}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Wówczas można napisać

$$(2.2) \quad \rho \int \int \int \mathbf{v} \nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_r dO = M_r^{(t)},$$

$$(2.3) \quad \rho \int \int \int \mathbf{v} \nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_\varphi dO = M_\varphi^{(t)},$$

$$(2.4) \quad \rho \int \int \int \mathbf{v} \nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_z dO = M_z^{(t)},$$

przy czym

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_r = -zv_\varphi, \quad |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_\varphi = zv_r - rv_z, \quad |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_z = rv_\varphi.$$

Wobec tego wyrażenie podcałkowe w (2.2), po pomnożeniu skalarowym i odrzuceniu pochodnych względem φ , przyjmuje postać

$$\mathbf{v} \nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_r = (v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{e}_z) \left[\frac{\partial(-zv_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial(-zv_\varphi)}{\partial z} \mathbf{e}_z \right] = -v_r \frac{\partial(zv_\varphi)}{\partial r} - v_z \frac{\partial(zv_\varphi)}{\partial z}$$

i podobnie

$$\mathbf{v} \nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_\varphi = v_r \frac{\partial(zv_r - rv_z)}{\partial r} + v_z \frac{\partial(zv_r - rv_z)}{\partial z}, \quad \mathbf{v} \nabla |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|_z = v_r \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} + v_z \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial z}.$$

Zważywszy na osiową symetrię zagadnienia jest oczywiste, że wektor momentu sił zewnętrznych leży na osi z , czyli $|\mathbf{M}| \equiv M_z^{(t)} \neq 0$ oraz $M_r^{(t)} = M_\varphi^{(t)} \equiv 0$.

Jeśli uwzględnimy teraz powyższe zależności, to otrzymamy dwa równania

$$(2.5) \quad \int_0^\delta \int_0^a \left[v_r \frac{\partial(zv_\varphi)}{\partial r} + v_z \frac{\partial(zv_\varphi)}{\partial z} \right] r dr dz = 0,$$

$$(2.6) \quad \int_0^\delta \int_0^a \left[v_r \frac{\partial(zv_r - rv_z)}{\partial r} + v_z \frac{\partial(zv_r - rv_z)}{\partial z} \right] r dr dz = 0$$

oraz wzór na moment oporowy tarczy

$$(2.7) \quad 4\pi\rho \int_0^\delta \int_0^a \left[v_r \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} + v_z \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial z} \right] r dr dz = M_z^{(t)}.$$

Wzór (2.7) można wykorzystać także do obliczenia momentu oporowego $M_z^{(0)}$ na płaskich ścianach osłony, jeśli podstawimy do niego funkcje v_r, v_φ, v_z , opisujące przepływ wtórny przy osłonie, a także odpowiednio zmienimy granice całkowania.

3. ANALIZA PRZEPLYWU WTÓRNEGO PRZY TARCZY

Ze względu na laminarny (wg założenia) charakter warstwy przyściennej można przyjąć, iż jej grubość δ jest niezależna od r ; poza tym jest to wielkość na razie nie znana. W dalszym ciągu zamiast zmiennej z ($z \geq 0$) posługiwac się będziemy bezwymiarową zmienną $\zeta = z/\delta$.

Niechaj

$$(3.1) \quad v_r(r, \zeta) = \gamma r R(\zeta), \quad v_\varphi(r, \zeta) = \omega r \Phi(\zeta), \quad v_z(r, \zeta) = -\gamma \delta Z(\zeta),$$

gdzie γ jest to stała dodatnia o wymiarze prędkości kątowej; $R(\zeta)$, $\Phi(\zeta)$, $Z(\zeta)$ — nieznane funkcje zmiennej ζ , które muszą spełniać warunki brzegowe

$$(3.2) \quad R(0) = 0, \quad R(1) = 0, \quad \Phi(0) = \beta, \quad \Phi(1) = 1, \quad \Phi'(1) = 0, \quad Z(0) = 0,$$

wynikające z (1.5) i (1.6) (rys. 2a). Przedostatni spośród warunków (3.2) wyraża ciągłość zmian prędkości obwodowej przy przejściu od warstwy przyściennej do rdzenia.

Funkcje $R(\zeta)$ i $Z(\zeta)$ powiązane są równaniem ciągłości (1.4). Mianowicie wynikająca z niego równość

$$\frac{\partial v_z}{\partial \zeta} = -\delta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right),$$

wobec założenia (3.1) daje

$$(3.3) \quad Z'(\zeta) = 2R(\zeta) \quad \text{lub} \quad Z(\zeta) = 2 \int_0^\zeta R(x) dx.$$

Przecinkiem u góry oznaczamy różniczkowanie względem ζ . Wzory (2.5), (2.6) i (2.7) po podstawieniu (3.1) przekształcają się do postaci

$$(3.4) \quad \int_0^1 [\zeta R \Phi - (\zeta \Phi)' Z] d\zeta = 0,$$

$$(3.5) \quad \int_0^1 (\zeta R^2 - \zeta R' Z - Z' Z) d\zeta = 0,$$

$$(3.6) \quad 4\pi\rho\delta\gamma\omega a^4 \int_0^1 \eta^3 d\eta \int_0^1 (2R\Phi - \Phi' Z) d\zeta = M_z^{(0)}, \quad \eta = r/a.$$

Niechaj

$$(3.7) \quad R(\zeta) = (1 - \zeta) \zeta$$

i odpowiednio według wzoru (3.3)

$$(3.8) \quad Z(\zeta) = \frac{1}{3} (3 - 2\zeta) \zeta^2.$$

Gdy funkcje te podstawimy do całki stojącej z lewej strony równania (3.5), to okaże się, iż przyjmuje ona wartość 1/45. A zatem funkcje (3.7) i (3.8) nie spełniają warunku $M_\phi^{(0)} = 0$ ściśle, a jedynie z dużym przybliżeniem. Wprawdzie można by osiągnąć tożsamościowe spełnienie równania (3.5) przyjmując np. dla $R(\zeta)$ funkcje wyższego stopnia względem ζ , jednak wobec przybliżonego charakteru dalszych obliczeń zabieg ten byłby zbyt dużą komplikacją rachunków. Tak więc pozostaniemy przy możliwie najprostszych postaciach funkcji (3.7) i (3.8), spełniających wszakże warunki brzegowe (3.2).

Przejdźmy z kolei do równania (3.4). Oprócz $R(\zeta)$ i $Z(\zeta)$ występuje w nim nieokreślona jeszcze funkcja $\Phi(\zeta)$, która musi spełniać m.in. warunek $\Phi(0) = \beta$. A zatem równanie to posłuży nam do wyznaczenia stosunku prędkości kątowych tarczy i rdzenia ($\beta = \Omega/\omega$). Doświadczenia [3, 4 i 5] wykazują, że wartość tego stosunku zależy istotnie od względnej szerokości komory, czyli od parametru s/a . J. W. DAILY i R. E. NECE [5] badali m.in. to zagadnienie używając komory wypełnionej

wodą. Wyznaczali oni prędkość wirowania rdzenia przy różnych prędkościach tarczy oraz dla rozmaitych szerokości szczeliny osiowej, zmienianych w granicach od $s/a=0,03$ do $0,22$. Po naniesieniu wyników na płaszczyznę układu współrzędnych β^{-1} , s/a okazało się, że odnośne punkty układają się na prostej, której równanie jest następujące⁽¹⁾:

$$(3.9) \quad \beta^{-1} = 0,510 - 0,703s/a.$$

Mając na względzie powyższe uwagi oraz warunki brzegowe (3.2), przyjmujemy

$$(3.10) \quad \Phi(\zeta) = \beta - \frac{\beta-1}{\sigma-1}(\sigma\zeta - \zeta^\sigma).$$

Niewiadomą stałą σ uzależnimy w toku dalszych obliczeń od parametru s/a tak, aby spełniona była empiryczna zależność (3.9). Tymczasem podstawiamy funkcje (3.7), (3.8) i (3.10) do równania (3.4), co daje nam następujący związek między stałymi β i σ :

$$(3.11) \quad \beta = \frac{11\sigma^2 + 68\sigma + 60}{3\sigma(2\sigma + 11)}.$$

Przejdźmy do określenia stałych γ i δ , które występują we wzorach na $v_r(\zeta, r)$ i $v_z(\zeta, r)$. Stałe te dobierzemy tak, aby spełnione były dwa pierwsze równania Naviera-Stokesa (1.1) i (1.2). Za pomocą trzeciego równania można by obliczyć gradient ciśnienia $\partial p/\partial z$ w kierunku osiowym, ale wielkość ta nie będzie nam dalej potrzebna.

Z powodu znanych trudności, na które natrafiamy przy rozwiązywaniu nieliniowych, cząstkowych równań różniczkowych, postaramy się wspomniane równania Naviera-Stokesa spełnić jedynie w sposób przybliżony w sensie średniej całkowitej wartości poszczególnych wyrazów, obliczonej wzdłuż grubości warstwy przyściennej. Tak więc zamiast równań (1.1) i (1.2) przyjmiemy, uwzględniając że $\partial p/\partial r = \rho r \omega^2$,

$$(3.12) \quad \int_0^\delta v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} dz + \int_0^\delta v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} dz - \int_0^\delta \frac{v_\varphi^2}{r} dz = \\ = - \int_0^\delta r \omega^2 dz + \nu \int_0^\delta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) dz,$$

$$(3.13) \quad \int_0^\delta v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} dz + \int_0^\delta v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} dz + \int_0^\delta \frac{v_r v_\varphi}{r} dz = \\ = \nu \int_0^\delta \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) dz.$$

⁽¹⁾ Wzór ten potwierdza się również w odniesieniu do wyników badań SEDAČA [3], który w komorze o parametrze $s/a=0,155$ wyznaczył wartość $\beta \approx 2,5$.

Podstawienie funkcji (3.4) do (3.12) i (3.13) daje po uporządkowaniu

$$(3.14) \quad \gamma^2 \int_0^1 (R^2 - R'Z) d\zeta + \omega^2 \left(1 - \int_0^1 \Phi^2 d\zeta \right) = \frac{\nu\gamma}{\delta^2} \int_0^1 R'' d\zeta,$$

$$(3.15) \quad \int_0^1 (2R\Phi - \Phi'Z) d\zeta = \frac{\nu}{\gamma\delta^2} \int_0^1 \Phi'' d\zeta.$$

Następnie podstawiamy tu funkcje (3.7), (3.8) i (3.10). Po wykonaniu licznych rachunków otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych dla niewiadomych γ i δ :

$$(3.16) \quad \frac{1}{10} \gamma^2 - \omega^2 M(\beta, \sigma) = -\frac{2\nu\gamma}{\delta^2}, \quad N(\beta, \sigma) = \frac{3\nu}{\gamma\delta^2},$$

gdzie

$$M(\beta, \sigma) \equiv \beta^2 - 1 - \frac{(\beta-1)(\sigma^2 + \sigma - 2)}{\sigma^2 - 1} + \left(\frac{\beta-1}{\sigma-1} \right)^2 \left(\frac{\sigma^2}{3} + \frac{1}{2\sigma+1} - \frac{2\sigma}{\sigma+2} \right),$$

$$N(\beta, \sigma) \equiv \frac{\beta}{\sigma} \frac{\sigma-1}{\beta-1} + \frac{2}{\sigma} \frac{\sigma-3}{\sigma+3} - \frac{3}{\sigma} \frac{\sigma-2}{\sigma+2}.$$

Stąd

$$(3.17) \quad \gamma = \omega \left[\frac{30M(\beta, \sigma)}{3 + 20N(\beta, \sigma)} \right]^{1/2},$$

$$(3.18) \quad \delta = \left[\frac{3}{N(\beta, \sigma)} \right]^{1/2} \left[\frac{3 + 20N(\beta, \sigma)}{30M(\beta, \sigma)} \right]^{1/4} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{1/2}.$$

Tak więc określiliśmy wszystkie wielkości charakteryzujące przepływ wtórny w warstwie przyściennej przy tarczy. Pozostaje do wyznaczenia zależność $\sigma(s/a)$. Wyniknie ona ze skojarzenia wzorów (3.9) i (3.11). Przedtem jednak wzór (3.11) zastąpimy formułą przybliżoną

$$(3.19) \quad \beta = 3,15\sigma^{-1/4},$$

która okaże się wygodniejsza w dalszych obliczeniach. W przedziale obserwowanych doświadczalnie [2, 3, 4 i 5] wartości $2,1 < \beta < 2,8$ (czemu odpowiada $1,7 < \sigma < 5,5$) błąd tego przybliżenia nie przekracza 2,5% w stosunku do wartości, jakie daje wzór (3.11). Ostatecznie skojarzenie równości (3.9) i (3.19) prowadzi do poszukiwanego związku między parametrami σ i s/a :

$$(3.20) \quad \sigma = \left(1,61 - 2,22 \frac{s}{a} \right)^4.$$

Tym samym funkcję $\Phi(\zeta)$, charakteryzującą pole prędkości obwodowej w warstwie przyściennej na tarczy, mamy w pełni określoną wzorami (3.10), (3.11) i (3.20) przy znanym parametrze s/a , charakteryzującym kształt komory. Jak widać ze wzoru (3.18), parametr ten ma również wpływ na grubość warstwy przyściennej oraz, przez stałą γ , na prędkość przepływu osiowego w warstwie przyściennej.

4. ANALIZA PRZEPLYWU WTRÓNEGO PRZY PŁASKICH ŚCIANACH OSŁONY

Płaskie wewnętrzne ściany osłony traktujemy jako gładkie, nieruchome powierzchnie kołowe o promieniu b ($b > a$), na których powstają laminarne warstwy przyścienne. W warstwach tych zanika przepływ okrężny, jaki istnieje w rdzeniu. Innymi słowy, prędkość obwodowa $v_\varphi^{(0)}$ maleje od wartości ωr na zewnętrznej powierzchni warstwy do zera na powierzchni ścianki. Oprócz tego występuje tam przepływ promieniowy (dośrodkowy) z prędkością $v_r^{(0)}$ oraz osiowy ($v_z^{(0)}$), przy czym wektor tej drugiej prędkości zwrócony jest od osłony ku tarczy. A zatem wtórny przepływ przy płaskich ścianach osłony ma również charakter przestrzenny. Przyjmujemy, że promieniowy gradient ciśnienia jest taki sam jak w warstwie przyściennej na tarczy, tzn. $\partial p / \partial r = \rho r \omega^2$.

Mając na względzie te fakty będziemy kinetykę przepływu wtórnego przy osłonie analizować za pomocą równań (2.5), (2.6) oraz (3.12) i (3.13). Trzeba jednak uwzględnić, że wystąpi tu inne niż przy tarczy pole prędkości obwodowej, ze względu na odmienne warunki brzegowe. Mianowicie jeśli dodatnią półoś Oz skierujemy teraz od osłony ku tarczy i przez δ_0 oznaczymy grubość warstwy przyściennej przy osłonie, to wspomniane warunki przyjmą postać:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} v_r^{(0)}=0, \quad v_\varphi^{(0)}=0, \quad v_z^{(0)}=0 & \quad \text{dla} \quad z=0; \\ v_r^{(0)}=0, \quad v_\varphi^{(0)}=-\omega r & \quad \text{dla} \quad z=\delta_0. \end{aligned}$$

Profile prędkości w tej warstwie przyściennej przedstawia rys. 2b. Niechaj

$$(4.2) \quad v_r^{(0)}(r, \zeta) = -\gamma_0 r R_0(\zeta), \quad v_\varphi^{(0)}(r, \zeta) = -\omega r \Phi_0(\zeta), \quad v_z^{(0)}(r, \zeta) = \gamma_0 \delta_0 Z_0(\zeta),$$

gdzie γ_0, δ_0 oznaczają stałe dodatnie; $\zeta = z / \delta_0$. Znaki przy $v_\varphi^{(0)}$ i $v_z^{(0)}$ są odmienne niż we wzorach (3.1) z powodu zmienionego kierunku dodatniej półosi Oz ; znak minus przy $v_r^{(0)}$ wskazuje na doosiowy kierunek przepływu przy osłonie.

Na funkcje R_0, Φ_0, Z_0 nakładamy następujące warunki brzegowe:

$$R_0(0)=0, \quad R_0(1)=0, \quad \Phi_0(0)=0, \quad \Phi_0(1)=1, \quad \Phi_0'(1)=0, \quad Z_0(0)=0.$$

W związku z tym przyjmujemy, że

$$(4.3) \quad R_0(\zeta) = (1-\zeta)\zeta, \quad \Phi_0(\zeta) = (2-\zeta)\zeta$$

oraz

$$Z_0(\zeta) = 2 \int_0^\zeta R_0(x) dx = \frac{1}{3} (3-2\zeta)\zeta^2.$$

Funkcje $R_0(\zeta), Z_0(\zeta)$ są identyczne z $R(\zeta), Z(\zeta)$ [por. (3.7) i (3.8)], wobec czego równanie (3.5) będzie spełnione z takim samym jak poprzednio stopniem przybliżenia. Natomiast całka stojąca z lewej strony równania (3.4) uzyskuje wartość $-2/15$. Tak więc funkcje (4.3) czynią zadość równaniom zasady krętu tylko w przybliżeniu. Przyjmując zamiast (4.3) bardziej skomplikowane funkcje można by uzyskać w tym względzie większą lub nawet całkowitą dokładność. Spowodowałoby to jednak

znaczną komplikację dalszych obliczeń, które i tak mają charakter przybliżony zważywszy, że równania Naviera-Stokesa przyjmujemy w postaci uśrednionej, a ponadto pomijamy wpływ tarcia na walcowych ścianach osłony. Dlatego porzucamy na tej prostej, aczkolwiek przybliżonej postaci funkcji $R_o(\zeta)$, $\Phi_o(\zeta)$, $Z_o(\zeta)$.

Następnie przechodzimy do równań Naviera-Stokesa. Postępując w sposób analogiczny do wyprowadzania równań (3.16) otrzymujemy

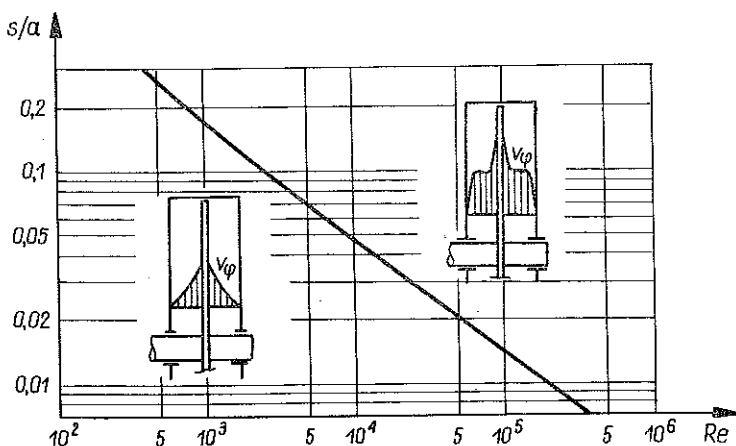
$$\frac{1}{10} \gamma_0^2 + \frac{7}{15} \omega^2 = \frac{2\nu\gamma_0}{\delta_0^2}, \quad \frac{2}{15} = \frac{2\nu}{\gamma_0 \delta_0^2},$$

skąd

$$(4.4) \quad \gamma_0 = \sqrt{14} \omega = 3,742 \omega,$$

$$(4.5) \quad \delta_0 = \sqrt[4]{\frac{225}{14}} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \approx 2 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}.$$

Z kolei, znając już grubość warstwy przyściennej na tarczy i osłonie, możemy określić wartość stosunku (s/a) , powyżej której w komorze powstaje wirujący rdzeń. Otóż przepływ tego rodzaju może powstać dopiero wówczas, gdy szerokość



Rys. 3

szczeliny osiowej będzie większa od łącznej grubości obu warstw przyściennych, czyli dla $s/a > (\delta + \delta_0)/a$. Podstawiając tu wzory (3.18) i (4.5) oraz wprowadzając liczbę Reynoldsa

$$(4.6) \quad Re = \Omega a^2 / \nu$$

otrzymujemy następujący warunek powstawania rdzenia wirującego:

$$\frac{s}{a} > \left\{ \left[\frac{3}{N(\beta, \sigma)} \right]^{1/2} \left[\frac{3 + 20N(\beta, \sigma)}{30M(\beta, \sigma)} \right]^{1/4} + 2 \right\} \left(\frac{\beta}{Re} \right)^{1/2}$$

lub po uproszczeniach opartych na wykorzystaniu wzoru (3.19)

$$(4.7) \quad \frac{s}{a} > \sqrt{\frac{10\beta}{\text{Re}}}.$$

Przy posługiwaniu się tym wzorem należy pamiętać, że parametr β zależy od stosunku s/a . Dlatego wygodniej jest korzystać z wykresu na rys. 3, na którym współrzędne punktu określone są przez kształt komory (czyli stosunek s/a) oraz charakter przepływu (liczba Re). Omawianym tu przepływom z rdzeniem wirującym odpowiadają punkty leżące na prawo od krzywej granicznej, obszar zaś położony na lewo odpowiada przepływom, dla których warstwy przyscienne na tarczy i na osłonie zlewają się, przy czym powstaje pole prędkości jak w przepływie Couette'a. Ten ostatni przypadek był analizowany szczegółowo w pracach [2, 6 i 8].

5. WSPÓŁCZYNNIK MOMENTU OPOROWEGO

Końcowym celem niniejszych obliczeń jest wyznaczenie momentu oporowego, jaki należy pokonać, aby podtrzymać jednostajny obrót tarczy z określoną prędkością kątową. Dla celów porównawczych zamiast momentem wygodniej będzie posługiwać się bezwymiarowym współczynnikiem momentu oporowego. Istniejące dla tej wielkości dane empiryczne pozwolą ustalić stopień dokładności oraz zakres stosowalności wyprowadzonych wzorów.

W p. 3 wyprowadzony został wzór (3.6) na moment oporowy tarczy. Jeśli występującą tam całką wyeliminujemy za pomocą równości (3.15), to otrzymamy

$$(5.1) \quad M_z^{(t)} = \pi \rho v \omega a^4 \delta^{-1} [-\Phi'(0)],$$

przy czym

$$-\Phi'(0) = \sigma \frac{\beta - 1}{\sigma - 1}.$$

Uwzględniając ponadto wzór (3.18) otrzymujemy ostatecznie

$$(5.2) \quad M_z^{(t)} = \frac{\beta - 1}{\beta^{3/2}} \frac{\sigma}{\sigma - 1} \left[\frac{N(\beta, \sigma)}{3} \right]^{1/2} \left[\frac{30M(\beta, \sigma)}{3 + 20N(\beta, \sigma)} \right]^{1/4} \pi \rho v^{1/2} \Omega^{3/2} a^4.$$

W podobny sposób określamy moment oporowy $M_z^{(o)}$ na płaskich ścianach osłony. Mianowicie opierając się na wzorze (5.1) piszemy

$$M_z^{(o)} = \pi \rho v \omega b^4 \delta_0^{-1} \Phi_0'(0),$$

przy czym $\Phi_0'(0) = 2$, a grubość δ_0 dana jest wzorem (4.5). Tak więc

$$(5.3) \quad M_z^{(o)} = \pi \rho v^{1/2} \Omega^{3/2} \beta^{-3/2} b^4.$$

Jeśli pominąć opór na walcowych ściankach osłony, to całkowity moment oporowy

$$M_z = M_z^{(t)} + M_z^{(o)}$$

lub po uwzględnieniu (5.2) i (5.3)

$$(5.4) \quad M_z = \rho v^{1/2} \Omega^{3/2} a^4 W(\beta, \sigma, b/a),$$

gdzie

$$W(\beta, \sigma, b/a) = \pi \frac{\beta-1}{\beta^{3/2}} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\frac{N(\beta, \sigma)}{3} \right]^{1/2} \left[\frac{30M(\beta, \sigma)}{3+20N(\beta, \sigma)} \right]^{1/4} + \frac{\pi}{\beta^{3/2}} \left(\frac{b}{a} \right)^4.$$

Zważywszy jeszcze, że $\beta = \beta(s/a)$, $\sigma = \sigma(s/a)$, można napisać

$$W(\beta, \sigma, b/a) = S(s/a, b/a).$$

Intensywność oporu charakteryzuje się bezwymiarowym współczynnikiem

$$c_M = \frac{M_z}{\rho \Omega^2 a^5}.$$

Podstawienie (5.4) oraz liczby Reynoldsa, zdefiniowanej wzorem (4.6), dają

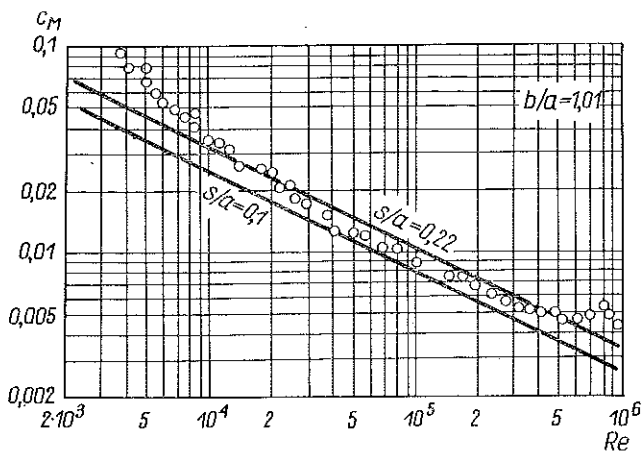
$$(5.5) \quad c_M = \frac{S(s/a, b/a)}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

Na przykład dla $b/a=1,01$, $s/a=0,1$ lub $s/a=0,22$ obliczenia dają odpowiednio

$$c_M \sqrt{\text{Re}} = S(0,1; 1,01) = W(2,27; 3,72; 1,01) = 2,33,$$

$$c_M \sqrt{\text{Re}} = S(0,22; 1,01) = W(2,82; 1,57; 1,01) = 3,14.$$

Na rys. 4 w układzie podwójnie logarytmicznym wkreślono proste obrazujące zależność (5.5) na tle wyników pomiarowych. Te ostatnie uzyskane zostały przez



Rys. 4

rozmaitych badaczy [2, 3, 4 i 5] przy zastosowaniu komór o parametrze $s/a = 0,05$ do $0,22$. Widoczna jest dość dobra zgodność w przedziale $10^4 < \text{Re} < 5 \cdot 10^5$. Przy mniejszych wartościach Re w komórce nie tworzy się jeszcze rdzeń, lecz występuje przepływ Couette'a, charakteryzujący się brakiem przepływu promieniowego. Natomiast dla $\text{Re} > 5 \cdot 10^5$ przepływy wtórne mają charakter turbulentny. Zarówno w pierwszym jak i w drugim przypadku warunki przepływu są odmienne od tych, jakie założono na wstępie niniejszego opracowania.

Jak widać z rysunku, prosta dla $s/a=0,22$ na ogół lepiej aproksymuje krzywą doświadczalną niż prosta dla $s/a=0,1$. Wobec pominięcia oporu tarcia na walcowej ścianie osłony fakt ten zdaje się sugerować następujący wniosek: udział tarcia na

walcowej ścianie osłony w całkowitym oporze tarcia jest niewielki, warunki zaś przepływu określone w założeniach (w szczególności rdzeń wirujący) występują tym wyraźniej, im większa jest względna szerokość komory.

6. UWAGI KOŃCOWE

Autorzy dotychczasowych opracowań teoretycznych zagadnienia sformułowanego w tytule [1, 2 i 5] korzystali wyłącznie z uśrednionych równań Naviera-Stokes'a oraz z jednego równania zasady krętu. Jednakże pominięcie pozostałych dwóch równań zasady krętu powoduje m.in. brak równania niezbędego dla wyznaczenia stosunku prędkości kątowych $\Omega/\omega = \beta$. Brak ten uzupełniano przyjęciem warunku $M_z^{(t)} = M_z^{(0)}$ (2).

Należy wyraźnie stwierdzić, iż równość ta nie ma uzasadnienia teoretycznego, nie wiadomo bowiem dlaczego momenty tarcia przy osłonie i przy tarczy miałyby posiadać tę samą wartość (nawet przy założeniu jednakowej gładkości obu powierzchni). Wręcz przeciwnie, obliczenia oparte na wzorach (5.2) i (5.3) wskazują, że zawsze $M_z^{(t)}/M_z^{(0)} > 1$, przy czym wartość tego ilorazu zależy od parametru s/a . Tak np. dla $s/a = 0,1$ z obliczeń wynika, że $M_z^{(t)}/M_z^{(0)} = 1,44$.

A zatem założenie $M_z^{(t)} = M_z^{(0)}$ prowadzi do przesadnej oceny momentu tarcia na płaskich ścianach osłony, co w pewnych przypadkach kompensuje błąd spowodowany pominięciem tarcia na ścianie walcowej. Tym chyba tłumaczy się względnie dobra zgodność wyników obliczeń współczynnika c_M , uzyskanych w pracy [1], z wynikami pomiarów. Jednakże obliczona tam wartość $\beta = 1,84$ (dla $b/a = 1$ i niezależnie od s/a) okazuje się już zbyt mała w konfrontacji ze znanymi [3, 4 i 5] wynikami pomiarów tego stosunku (por. p. 3) (3).

Autor pracy [5], mimo uprzednio przeprowadzonych rozważań teoretycznych, ostatecznie poleca stosowanie wzoru empirycznego w postaci $c_M = 3,7 (s/a)^{1/10} \text{Re}^{-1/2}$.

Drugim istotnym mankamentem omawianych opracowań teoretycznych było pomijanie prędkości osiowej $v_z(r, \varphi)$, co prowadzi do oczywistej sprzeczności z warunkiem ciągłości przepływu w warstwie przyściennej. W pracy [5] warunek ten jest traktowany jako równanie «nadliczbowe» (redundant equation).

Celem niniejszego opracowania jest wskazanie możliwości teoretycznego (aczkolwiek w pewnej mierze przybliżonego) rozwiązania omawianego zagadnienia z uwzględnieniem zarówno zasady krętu, jak i warunku ciągłości bez potrzeby uciekania się do nieuzasadnionego założenia $M_z^{(t)} = M_z^{(0)}$. Jedyne zależność $\beta = f(s/a)$ wymyka się spod możliwości wyprowadzenia teoretycznego, przynajmniej na gruncie przyjętych tu założeń.

Opierając się na podstawowych równaniach przytoczonych w p. 2 i 3 można by rozwiązać również zagadnienie oporu tarczy w warunkach turbulentnych przepływów wtórnych przy tarczy i przy osłonie.

Szczegółowego opracowania domaga się też zagadnienie momentu tarcia, powstającego na walcowej ścianie osłony.

(2) W przypadku pracy [5] pod symbolem $M_z^{(0)}$ należy rozumieć moment tarcia zarówno na płaskich, jak i na walcowych ścianach osłony.

(3) Tym niemniej praca [1] wykorzystana została bezkrytycznie w książce L. A. DORFMANA [4].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. OKAYA, M. HASEGAWA, *On the friction to the disc rotating in a cylinder*, Jap. J. Phys., **13**, 1, 1939.
2. F. SCHULTZ-GRUNOW, *Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen*, ZAMM, **15**, 4, 1935.
3. В. С. Седач, *Кинематика воздушного потока охлаждающего газотурбинный диск*, Труды ХПИ, **24**, 6, 1957.
4. Л. А. Дорфман, *Гидродинамическое сопротивление и теплодача вращающихся тел*, ГИФМЛ, Москва 1960.
5. J. W. DAILY, R. E. NESSE, *Chamber dimension effects on induced flow and frictional resistance of enclosed rotating disks*, J. Basic Eng., March 1960.
6. A. T. IRPEN, *Influence of viscosity on centrifugal-pump performance*, Trans. ASME, **68**, 1946.
7. K. PANTELL, *Versuche über Scheibenreibung*, Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, **16**, 1950.
8. S. L. SOO, *Laminar flow over an enclosed rotating disk*, Trans. ASME, **80**, 1958.

Резюме

МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЮ ТОНКОГО ДИСКА В ЗАМКНУТОЙ КАМЕРЕ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ (ЛАМИНАРНОЕ ВТОРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ)

Исследуется вращение тонкого гладкого диска в камере, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Предполагается ламинарное пространственное течение в пограничных слоях и существование „жидкого ядра”, вращающегося между этими слоями. Исходя из уравнений Навье-Стокса, условия непрерывности и принципа сохранения момента количества движения выведена формула для момента сопротивления вращению диска и плоских стенок камеры, а также рассчитана угловая скорость вращения ядра. Формула (5.5) для коэффициента момента сопротивления дает результаты совпадающие с опытными данными в диапазоне чисел Рейнольдса от 10^4 до $5 \cdot 10^5$.

В заключение дается критический анализ известных в литературе теоретических разработок рассматриваемого вопроса.

SUMMARY

FRICTIONAL TORQUE OF A THIN DISK ROTATING IN A COVER (LAMINAR SECONDARY FLOWS)

The considerations concern a thin, smooth disk rotating in a cover which is filled by a viscous, incompressible fluid. Laminar, three-dimensional flow in the boundary layers is assumed, and also the existence of a "fluid core" rotating between these layers. On the basis of the Navier-Stokes equations, the continuity condition and the angular momentum principle, the formula is derived for the frictional torque of the disk and of the plane walls of the cover, the angular velocity of the core being also determined. Equation (5.5) for the frictional torque coefficient yields the results which comply with the measurements within the interval $10^4 < Re < 5 \cdot 10^5$. The paper is concluded by a critical analysis of the existing theoretical solutions of the problem.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1972 r.