ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 21, 1, 67–74, 1973, Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

WPŁYW POŁĄCZENIA STRUKTUR MECHANICZNYCH NA WŁASNOŚCI DYNAMICZNE AGREGATU

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. Wstęp

Podczas pomiarów własności dynamicznych obrabiarki [1] zauważono, że podatność stołu wzrasta bardzo silnie na skutek jego połączenia za pomocą narzędzia z układem jednostki posuwowej i stojaka. Przed połączeniem układ obrabiarki stanowił szeregowe połączenie struktur (1) (stół, stojak, jednostka posuwowa i obróbcza), podłączenie zaś narzędzia zamyka układ szeregowy tworząc agregat zamknięty. Należy zatem zbadać, czy tworzenie agregatu czyli dołączanie dodatkowych struktur oraz jego zamknięcie może być przyczyną wzrostu podatności.

2. Charakterystyka dynamiczna struktury mechanicznej

Każda struktura mechaniczna ze względu na ciągły rozkład mas i sztywności ma nieskończoną ilość postaci drgań. Jednak amplitudy drgań począwszy od pewnej częstości są na tyle małe, że nie mają wpływu na interesujący nas proces. Stąd też dla celów obliczeniowych każdą strukturę można zastąpić modelem dyskretnym o skończonej ilości stopni swobody $n<\infty$.

Niech siła wymuszająca drgania działa w n-tej współrzędnej fizycznej (lub uogólnionej) x_n struktury. Wtedy równanie ruchu struktury przy założeniu liniowości można napisać w postaci

$$U(s)\,X=F(t), \qquad X=\mathrm{col}\,[x_1(t), \ldots, x_n(t)], \qquad F(t)=\mathrm{col}\,[0, \ldots, f_n(t)], \tag{2.1}$$

gdzie s oznacza operator różniczkowania ($s=d/dt$), $U(s)$ macierz dynamiczną struktury złożoną z macierzy bezwładności, tłumienia i sztywności.

Jak wiadomo, przy założeniu wymuszenia zespolonego w postaci $f_n(t)=f_n e^{ipt}$, ($\mathrm{Im} f_n=0$) możemy, analizując stan ustalony ruchu, zastąpić operator s wielkością urojoną ip. Wtedy uwzględniając, że $X=X_0 e^{ipt}$, $F(t)=F_0 e^{ipt}$, $X_0=\mathrm{col}\,[x_1, \ldots, x_n]$ $F_0=\mathrm{col}\,[0, \ldots, f_n]$, mamy

$$U(ip)\,X_0=F_0. \tag{2.2}$$

(1) Przez strukturę mechaniczną będziemy rozumieli obiekt, którego ruch można opisać za pomocą układu równań różniczkowych o podobnych własnościach. Prócz tego będziemy używali terminu agregat w znaczeniu złączonego w całość układu różnych struktur mechanicznych.

Załóżmy, że interesuje nas amplituda drgań w r-tej współrzędnej struktury, wtedy po odpowiednich przekształceniach powyższego równania uzyskamy

$$(2.3)\qquad x_r = \frac{(-1)^{r+n} N_{rn}(ip)}{\det U(ip)} f_n = \frac{\Delta_{rn}}{\Delta} f_n, \qquad \Delta = \det U(ip)$$

gdzie $N_{rn}(ip)$ jest minorem macierzy dynamicznej, powstałym przez wykreślenie r-tej kolumny i n-tego wiersza.

Łatwo zauważyć, iż funkcja wymierna argumentu ip, stojąca przy sile f_n we wzorze (2.3) jest zespoloną podatnością lub prościej receptancją [2], liczoną we współrzędnej r przy wzbudzeniu siłą we współrzędnej n. Oznaczając zdefiniowaną wyżej receptancję struktury przez β_{rn}, otrzymujemy na podstawie (2.3)

$$(2.4)\qquad x_r = \beta_{rn} f_n \quad \text{lub} \quad x_r = |\beta_{rn}|\, e^{-i\varphi} f_n,$$

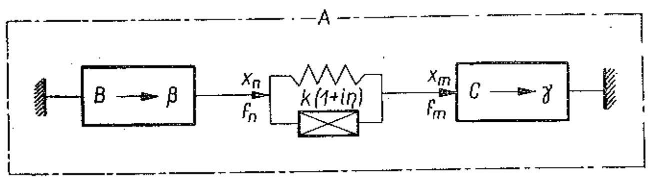
gdzie $\varphi = \varphi(p)$ jest przesunięciem fazowym między przemieszczeniem we współrzędnej x_r i siłą wymuszającą f_n $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Pełną charakterystykę dynamiczną struktury można podać znając jej macierz receptancji β, która jak wiadomo jest odwrotnością macierzy dynamicznej

$$(2.5)\qquad \beta = U^{-1}(ip) = [\beta_{ij}], \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

3. Agregat łańcuchowy

Weźmy obecnie pod uwagę dwie struktury B i C, pierwszą o n i drugą o m stopniach swobody i połączmy je między współrzędnymi x_{nB}, x_{mC} elementem sprzęgającym tak jak na rys. 1.



Rys. 1

Element ten w ogólnym przypadku dysypatywny może mieć tłumienie wiskotyczne o współczynniku C lub wewnętrzne materiałowe o współczynniku η, tak że zespolona sztywność elementu wyniesie odpowiednio $\hat{k} = k + ipc$ lub $\hat{k} = k(1+i\eta)$. Naszym zadaniem jest określenie receptancji agregatu A we współrzędnej $y_n = x_n$ przy pobudzeniu siłą działającą w tej współrzędnej, czyli wyznaczenie α_{nn}. Zakładamy, że znane są macierze dynamiczne struktur $B(ip)$, $C(ip)$ lub wynikające z nich a bezpośrednio potrzebne receptancje β_{nn}, γ_{mm}. Rozcinając myślowo agregat w miejscu szukanej receptancji, tak jak na rys. 2, mamy

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &x_{nB} = \beta_{nn} f_{nB}, \qquad x_{mC} = \gamma_{mm} f_{mC}, \\ &x'_{mC} = \left[\frac{1}{k(1+i\eta)} + \gamma_{mm}\right] f'_{mC}, \qquad f_{mC} = f'_{mC}. \end{aligned}$$

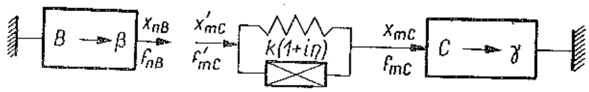
Warunki połączenia struktur w agregat są następujące:

$$x_{nB} = x_{mC} = y_n, \qquad f_{nB} + f'_{mC} = f_n. \tag{3.2}$$

Korzystając z nich i uwzględniając (3.1) mamy

$$y_n = \frac{\beta_{nn}\left[\dfrac{1}{k(1+i\eta)} + \gamma_{mm}\right]}{\beta_{nn} + \gamma_{mm} + \dfrac{1}{k(1+i\eta)}} f_n = \alpha_{nn} f_n. \tag{3.3}$$

Otrzymana zależność wyznacza szukaną receptancję agregatu w funkcji receptancji struktur wyjściowych β_{nn}, γ_{mm} oraz parametrów złącza k, η.



Rys. 2

Przyjmijmy obecnie, że struktura B jest mniej podatna niż C, czyli $|\beta_{nn}| < |\gamma_{mm}|$ i poszukajmy warunków, dla których receptancja agregatu $|\alpha_{nn}|$ będzie większa co do modułu, niż receptancja struktury wyjściowej B, a więc gdy $|\alpha_{nn}| > |\beta_{nn}|$. Podstawiając (3.3) mamy

$$\frac{\left|\beta_{nn}\left[\dfrac{1}{k(1+i\eta)} + \gamma_{mm}\right]\right|}{\left|\beta_{nn} + \gamma_{mm} + \dfrac{1}{k(1+i\eta)}\right|} > |\beta_{nn}|. \tag{3.4}$$

Po pewnych uproszczeniach tego warunku uzyskamy

$$\left|1 + \frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm} + \dfrac{1}{k(1+i\eta)}}\right| < 1, \tag{3.5}$$

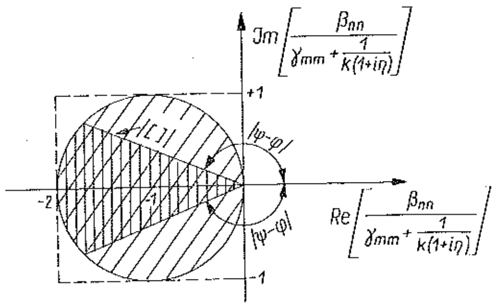
co oznacza, że moduł powyższego wyrażenia nie może przekroczyć koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej. Rozdzielając wyrażenie (3.5) na część rzeczywistą i urojoną otrzymamy warunek konieczny i dostateczny wzrostu receptancji agregatu szeregowego

$$\left|\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm} + \dfrac{1}{k(1+i\eta)}}\right|^2 < -2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm} + \dfrac{1}{k(1+i\eta)}}\right]. \tag{3.6}$$

Jednak do celów analizy jakościowej dogodnie jest zamienić powyższy warunek dostateczny dwoma warunkami koniecznymi wynikającymi z (3.6), co jest efektem zastąpienia koła kwadratem jednostkowym. Nierówności te mają postać

$$(3.7)\qquad -2<\mathrm{Re}\left[\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}+\dfrac{1}{k\,(1+i\eta)}}\right]<0,\qquad -1<\mathrm{Im}\left[\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}+\dfrac{1}{k\,(1+i\eta)}}\right]<1.$$

Warunki (3.7) i (3.6) pokazano graficznie na rys. 3, gdzie zakreślono obszar wzrostu receptancji agregatu.



Rys. 3

Przejdźmy z kolei do analizy uzyskanych rezultatów. Zakładając przypadek najprostszy sztywnego połączenia struktur $\left(\dfrac{1}{k\,(1+i\eta)}\to 0\right)$ z zależności (3.7) otrzymujemy

$$(3.8)\qquad -2<\mathrm{Re}\left[\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}}\right]<0,\qquad -1<\mathrm{Im}\left[\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}}\right]<1.$$

Stąd wynika, że dla struktur identycznych $\beta_{nn}=\gamma_{mm}$, $(0<p<\infty)$, tzn. $B(ip)=C(ip)$, wzrost podatności agregatu jest niemożliwy, gdyż pierwsza nierówność (3.8) nie jest spełniona. Ponadto jeśli nawet struktury tworzące agregat nie są identyczne $[B\,(ip)\neq C\,(ip)]$, lecz dla pewnych częstości $p=\omega_i$ mają równe receptancje $\beta_{nn}\,(\omega_i)=\gamma_{mm}\,(\omega_i)$, to wzrost receptancji dla tych częstości jest również niemożliwy.

Do celów dalszej analizy przejdźmy do wykładniczego zapisu receptancji (2.4), $\beta_{nn}=|\beta_{nn}|\,e^{-i\varphi}$, $\gamma_{mm}=|\gamma_{mm}|\,e^{-i\psi}$. Uwzględniając to w warunku dostatecznym (3.6) dla połączenia sztywnego otrzymamy

$$(3.8)\qquad -\cos\,(\varphi-\psi)>\frac{1}{2}\left|\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}}\right|,$$

czyli

$$\left|\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}}\right|<2,\qquad |\varphi-\psi|>\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}}\right|\right).$$

Powyższe nierówności dają znacznie dokładniejsze kryterium wzrostu podatności agregatu co zaznaczono podwójnym kreskowaniem na rys. 3. Tak więc jeśli moduły receptancji struktur spełniają warunek $|\beta_{nn}/\gamma_{mm}|<2$, a przesunięcia fazowe wynikające z tych receptancji spełniają warunek (3.8), czyli leżą w obszarze podwójnie zakreskowanym na rys. 3, to sztywne połączenie tych struktur spowoduje wzrost receptancji powstałego w ten sposób agregatu szeregowego. Dla oceny ilościowej weźmy pod uwagę przypadek szczególny $|\beta_{nn}|=|\gamma_{mm}|$ i na podstawie (3.3) obliczmy receptancję agregatu przy połączeniu sztywnym. Posługując się zapisem wykładniczym receptancji i przyjmując zgodnie z (3.8) $\psi=\pi-\varphi$ mamy

$$\alpha_{nn}=\frac{i}{2\sin\varphi}|\beta_{nn}|. \tag{3.9}$$

Jak łatwo zauważyć wzrost receptancji agregatu w tym przypadku nastąpi dla $\varphi<\pi/6$ i będzie maksymalny, gdy $\varphi\sim0$, $\psi\sim\pi$, tzn. wtedy, gdy fazy receptancji struktur będą przeciwne.

Przechodząc do analizy połączenia podatnego struktur $(1/k\,(1+i\eta)\neq0)$, weźmy pod uwagę nierówność podstawową (3.6). Posługując się wykładniczym zapisem receptancji po przekształceniach uzyskamy warunki analogiczne do (3.8)

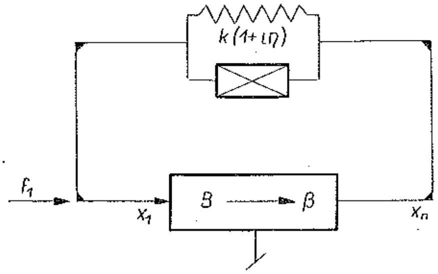
$$\begin{gathered}
|\varphi-\delta|>\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{2}\left|\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}+\dfrac{1}{k\,(1+i\eta)}}\right|,\\
\left|\frac{\beta_{nn}}{\gamma_{mm}+\dfrac{1}{k\,(1+i\eta)}}\right|<2,\qquad \delta=\operatorname{arc\,tg}\frac{|\gamma_{mm}|\sin\psi+\dfrac{\beta}{k\,(1+\eta^2)}}{|\gamma_{mm}|\cos\psi+\dfrac{1}{k\,(1+\eta^2)}}.
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Załóżmy dla prostoty, iż nierówność dotycząca modułu jest spełniona i fazy receptancji struktur są takie, że dają wzrost receptancji agregatu w połączeniu sztywnym, $\varphi\sim0$, $\psi\sim\pi$. Jak łatwo zauważyć analizując wzory (3.10), można zawsze tak dobrać parametry złącza k, η, że faza $\delta<\pi/2$, tzn. nierówność warunkująca wzrost receptancji agregatu nie będzie spełniona. Z drugiej strony jeśli weźmiemy fazy $\pi>\varphi\sim\pi$, $\psi\sim\pi/2$, które w myśl (3.8) uniemożliwiają wzrost podatności w połączeniu sztywnym, to jak łatwo stwierdzić na podstawie (3.10) odpowiedni dobór parametrów k,η może spowodować, że $\delta<\pi/2$ i tym samym warunek wzrostu podatności może być spełniony. Tak więc dobór parametrów złącza podatnego $1/k\,(1+i\eta)\neq0$ jest bardzo istotny, gdyż może spowodować lub uniemożliwić wzrost receptancji agregatu.

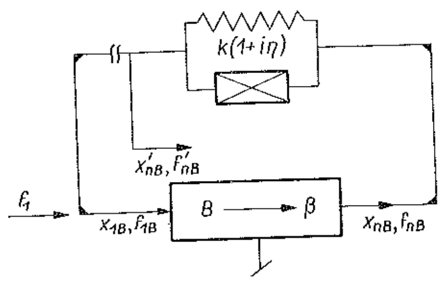
4. Agregat łańcuchowy zamknięty

Interesujący jest wpływ połączenia zamykającego układ łańcuchowy struktur na własności dynamiczne powstałego w ten sposób agregatu zamkniętego. Weźmy więc pod uwagę układ łańcuchowy struktur oznaczony umownie jako B o znanych receptancjach β_{ij} i połączmy współrzędne x_1 i x_n elementem podatnym z dysypacją $1/[k\,(1+i\eta)]\neq0$, tak jak na rys. 4.

W celu obliczenia receptancji α_{11} agregatu zamkniętego rozetniemy go myślowo dodając fikcyjne siły przy każdej współrzędnej układu otwartego zgodnie z rys. 5.



Rys. 4



Rys. 5

Przemieszczenia w interesujących nas współrzędnych agregatu otwartego są funkcją receptancji β_{ij} i sił w układzie otwartym. Tak więc

$$x_{1B} = \beta_{11} f_{1B} + \beta_{1n} f_{nB}, \tag{4.1}$$
$$x_{nB} = \beta_{n1} f_{1B} + \beta_{nn} f_{nB}, \qquad \beta_{n1} = \beta_{1n},$$

równanie zaś elementu łączącego ma postać

$$x'_{nB} = \frac{f'_{nB}}{k(1+i\eta)} + x_{nB}, \qquad f'_{nB} = f_{nB}. \tag{4.2}$$

Jak łatwo zauważyć (rys. 5) warunki zamknięcia agregatu są następujące:

$$x_{1B} = x'_{nB} = x_1, \qquad f_{1B} + f'_{nB} = f_1. \tag{4.3}$$

Uwzględniając powyższe i zależności (4.1) i (4.2) po przekształceniach znajdziemy

$$x_1 = \frac{\beta_{11}\beta_{nn} - \beta_{n1}^2 + \dfrac{\beta_{11}}{k(1+i\eta)}}{\beta_{11} + \beta_{nn} - 2\beta_{n1} + \dfrac{1}{k(1+i\eta)}} f_1 = \alpha_{11} f_1. \tag{4.4}$$

Tak więc poszukiwana receptancja agregatu zamkniętego ma postać

$$\alpha_{11} = \frac{\beta_{11}\beta_{nn} - \beta_{n1}^2 + \dfrac{\beta_{11}}{k(1+i\eta)}}{\beta_{11} + \beta_{nn} - 2\beta_{n1} + \dfrac{1}{k(1+i\eta)}}. \tag{4.5}$$

Przed przystąpieniem do analizy uzyskanego rezultatu zauważmy, że receptancje agregatu otwartego β_{ij} mają te same bieguny i wobec tego dla każdej częstości rezonansowej mamy jednocześnie $\mathrm{Re}(\beta_{ij}) = 0$, $|\mathrm{Im}\,\beta_{ij}| = \max$. Poprzednio przy łączeniu szeregowym struktur jednym z warunków wzrostu receptancji agregatu były drgania w przeciwfazie struktur składowych. Obecnie jak wynika z postaci mianownika we wzorze (4.5), zmiana fazy spowodowana jest samym połączeniem zamykającym, tak iż można wnioskować, że wzrost receptancji będzie częstszy i silniejszy. Zauważmy jeszcze, że dla agregatu symetrycznego $\beta_{11}=\beta_{nn}$ jego zamknięcie połączeniem sztywnym może być przyczyną tak wzrostu jak i zmniejszenia receptancji zależnie od receptancji wzajemnej β_{n1}, gdyż na podstawie (4.5) otrzymujemy

$$|\alpha_{11}|=\left|\frac{\beta_{11}+\beta_{n1}}{2}\right| \gtrless |\beta_{11}|. \tag{4.6}$$

Analizując warunek $|\alpha_{11}|>|\beta_{11}|$ wybierzmy spośród kilku możliwości przypadek najprostszy, mianowicie gdy

$$\beta_{11}+\beta_{nn}-2\beta_{n1}\approx 0, \tag{4.7}$$

wtedy receptancja agregatu zamkniętego na podstawie (4.5) będzie miała postać

$$\alpha_{11}=\beta_{11}+k\,(1+i\eta)\,[\beta_{11}\,\beta_{nn}-\beta_{n1}^2]. \tag{4.8}$$

Ponieważ w rezonansie mamy $\beta_{jj}=-i\,|\beta_{jj}|$, $\beta_{ij}=\pm i\,|\beta_{ij}|$ [3], to ostatnie wyrażenie przyjmie postać

$$\alpha_{11}=i\left\{|\beta_{11}|-k\eta\,[|\beta_{n1}|^2-|\beta_{11}|\,|\beta_{nn}|]\right\}+k\,[|\beta_{n1}|^2-|\beta_{11}|\,|\beta_{nn}|]. \tag{4.9}$$

Z powyższego wynika, że jeśli tylko współczynnik strat elementu łączącego jest zerowy $\eta=0$ (element niedysypatywny), to zawsze $|\alpha_{11}|>|\beta_{11}|$ i w przypadku granicznym mamy $|\alpha_{11}|\to\infty$, gdy $k\to\infty$. Wypływa stąd również wniosek, że połączenie zamykające sztywne $(1/[k\,(1+i\eta)]=0)$, przy spełnieniu związku (4.7) jest zawsze przyczyną wzrostu receptancji rezonansowej agregatu.

W przypadku przeciwnym połączenia dysypatywnego $\eta\neq 0$ wzrost receptancji agregatu nastąpi zawsze gdy $|\beta_{n1}|^2-|\beta_{11}|\,|\beta_{nn}|<0$, natomiast jeśli $|\beta_{n1}|^2-|\beta_{11}|\,|\beta_{nn}|>>0$, wzrost lub zmniejszenie receptancji zależny jest od wartości parametrów złącza k, η.

Z zależności (4.5) wynika, że ogólny przypadek wzrostu receptancji agregatu $|\alpha_{11}|\gg|\beta_{11}|$ wystąpi, gdy mianownik tego wyrażenia będzie bliski zera [z przesłanek fizycznych wynika, że równość zeru nigdy nie może wystąpić, gdyż receptancja każdego układu dysypatywnego jest skończona; podobny wniosek odnosi się do relacji (4.7)], a więc gdy będzie

$$\beta_{11}+\beta_{nn}-2\beta_{n1}+\frac{1-i\eta}{k\,(1+\eta^2)}\approx 0. \tag{4.10}$$

Jeśli wzrost receptancji z tytułu spełnienia relacji (4.7) może wystąpić na ogół dla częstości rezonansowych β_{ij}, to w tym przypadku jest to niemożliwe, gdyż $\operatorname{Re}\beta_{ij}\,(i\omega_r)=0$, natomiast $1/k\,(1+\eta^2)\neq 0$. Teoretycznie można jednak znaleźć przeliczalny zbiór częstości ω_j, dla których relacja (4.10) będzie spełniona tak w części rzeczywistej jak i urojonej, a co za tym idzie możliwy będzie wzrost receptancji agregatu.

Z punktu widzenia zastosowań istotny jest tutaj wniosek, że odpowiednim doborem parametrów złącza k, η można zawsze sprawić, aby efekt wzrostu receptancji wystąpił lub nie w interesującym nas pasmie częstości.

5. Wnioski

Podsumowując wyniki przedstawionych wyżej rozważań można powiedzieć, że połączenie struktur w agregat szeregowy, lub łańcuchowy zamknięty stwarza możliwości wzrostu receptancji agregatu. Możliwy on jest dla przeliczalnego zbioru częstości wymuszenia p. Warunki tego wzrostu są mniej krytyczne dla układów łańcuchowych zamkniętych i w tym przypadku należy się liczyć z największym wzrostem receptancji z tytułu zamknięcia agregatu. Z rozważań wynika także istotna rola podatnego elementu sprzęgającego struktury, doborem którego można spowodować lub uniemożliwić wzrost receptancji. Wypada zauważyć, że poruszone zagadnienie może mieć duże znaczenie w dynamice konstrukcji oraz wibroizolacji drgających obiektów.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. Cempel, R. Gapski, J. Komosiński, S. Przygórzewski, *Badania statyczne i dynamiczne obrabiarek zespołowych*, Materiały Konferencji Naukowej Wydziału Mechaniczno-Technologicznego Politechniki Poznańskiej, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 1972 [w druku].
2. R. E. D. Bishop, D. C. Johnson, *The mechanics of vibration*, Cambridge University Press, s. 17, 1960.
3. R. E. D. Bishop, *Receptance techniques in linear vibration analysis*, Strojnicky Casopis, **17**, 4, 353 - 363, 1966.

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ СОЕДИНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АГРЕГАТА

Работа является попыткой решения задачи о влиянии соединения подсистем на изменение динамической податливости полученного агрегата. Рассуждения показывают, что в случае замыкающего соединения цепной системы увеличение податливости является наибольшим. Показано также, что увеличение податливости можно регулировать путем подбора жесткости соединений.

S u m m a r y

INFLUENCE OF LINKINGS OF MECHANICAL STRUCTURES ON THE DYNAMIC PROPERTIES OF THE SYSTEM

The paper examines the receptance of the system composed of elastic elements joined together by means of certain links. It is shown that the links may increase the receptance of the system, especially if the chain system is closed. The important role of flexible links is demonstrated by showing that it may be used to increase, decrease or stop the growth of the receptance.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1972 r.