ROZPRAWY INŻYNIERSKIE, 21, 1, 55–65, 1973, Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

OSIOWO-SYMETRYCZNE ZAGADNIENIE KONTAKTOWE DLA POPRZECZNIE IZOTROPOWEJ WARSTWY Z UWZGLĘDNIENIEM NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH W OBSZARZE KONTAKTU (*)

J. M. KIZYMA (TARNOPOL) i W. B. RUDNICKI (LWÓW)

Wstęp

W pracach [1, 2 i 3] zostały rozwiązane osiowo-symetryczne zagadnienia kontaktowe w przypadku idealnej szczepności stempla z podłożem. Obliczenia numeryczne i analiza rozwiązania tych prac wykazały, że styczne naprężenia kontaktowe są w tym przypadku proporcjonalne do naprężeń normalnych oraz do odległości od środka powierzchni kontaktu.

W niniejszej pracy rozważane jest osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe o wciskaniu stempla w warstwę poprzecznie izotropową przy założeniu, że w obszarze kontaktu naprężenia styczne i normalne związane są zależnością $\tau_{rz}=kr\sigma_z$. W przypadku półprzestrzeni taki związek między naprężeniami kontaktowymi był przyjmowany w pracy [4].

1. Równania wyjściowe i warunki brzegowe

Niech w poprzecznie izotropową warstwę o skończonej grubości H wciskany będzie stempel obciążony osiowo-symetrycznie. Wybierzmy walcowy układ współrzędnych r, θ, z tak, aby oś Oz była prostopadła do płaszczyzny izotropii i skierowana wzdłuż geometrycznej osi stempla, a płaszczyzna $z=0$ pokrywała się z powierzchnią warstwy. Warstwa jest posadowiona na idealnie gładkim sztywnym podłożu. Poza stemplem powierzchnia warstwy jest wolna od obciążeń zewnętrznych, a w strefie kontaktu naprężenia normalne i styczne związane są zależnością $\tau_{rz}=fr\sigma_z$. Stempel ograniczony jest powierzchnią obrotową $z=F(r)$.

Jak wiadomo [5], w przypadku ciała poprzecznie-izotropowego i osiowej symetrii nie zerujące się składowe naprężeń i przemieszczeń są wyrażone przez dwie funkcje naprężeń spełniające równania

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}+\nu_i^2\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_i=0, \qquad i=1,2, \tag{1.1}$$

gdzie ν_i^2 są pierwiastkami równania

$$A_{11}A_{44}\nu^4+[(2A_{44}+A_{13})A_{13}-A_{11}A_{33}]\nu^2+A_{33}A_{44}=0, \tag{1.2}$$

a A_{ij} są modułami sprężystości.

(*) Z rosyjskiego przetłumaczył J. Bejda.

Dla interesujących nas składowych naprężeń i przemieszczeń otrzymujemy wzory

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} u_z &= \frac{\partial}{\partial z}(k_1 \Phi_1 + k_2 \Phi_2), \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}[(k_1 A_{33} - \nu_1^2 A_{13})\Phi_1 + (k_2 A_{33} - \nu_2^2 A_{13})\Phi_2], \\ \tau_{rz} &= A_{44}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}[(1+k_1)\Phi_1 + (1+k_2)\Phi_2], \end{aligned}$$

gdzie k_i $(i=1,2)$ określone są wzorami

$$(1.4)\qquad \frac{A_{44}+k(A_{33}+A_{44})}{A_{11}} = \frac{kA_{33}}{A_{13}-(1+k_1)A_{44}} = \nu^2.$$

Stosując do równań (1.1) transformacje Hankela zerowego rzędu łatwo wyznaczymy funkcje Φ_i, a po podstawieniu ich do wzorów (1.3) otrzymujemy

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} u_z &= H_0\left[\xi\left[\frac{k_1}{\nu_1}\left(-B_1 e^{-\frac{\xi z}{\nu_1}} + B_2 e^{\frac{\xi z}{\nu_1}}\right) + \frac{k_2}{\nu_2}\left(-B_3 e^{-\frac{\xi z}{\nu_2}} + B_4 e^{\frac{\xi z}{\nu_2}}\right)\right]; \quad \xi \to r\right], \\ \sigma_z &= H_0\left[\xi^2\left[\frac{k_1 A_{33} - \nu_1^2 A_{13}}{\nu_1^2}\left(B_1 e^{-\frac{\xi z}{\nu_1}} + B_2 e^{\frac{\xi z}{\nu_2}}\right) + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{k_2 A_{33} - \nu_2^2 A_{13}}{\nu_2^2}\left(B_3 e^{-\frac{\xi z}{\nu_2}} + B_4 e^{\frac{\xi z}{\nu_2}}\right)\right]; \quad \xi \to r\right], \\ \tau_{rz} &= -A_{44} H_1\left[\xi^2\left[\frac{1+k_1}{\nu_1}\left(-B_1 e^{-\frac{\xi z}{\nu_1}} + B_2 e^{\frac{\xi z}{\nu_1}}\right) + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{1+k_2}{\nu^2}\left(-B_3 e^{-\frac{\xi z}{\nu_2}} + B_4 e^{\frac{\xi z}{\nu_2}}\right)\right]; \quad \xi \to r\right]. \end{aligned}$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenie:

$$H_\nu[f(x); x \to r] = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(xr)\, dx.$$

Dla rozwiązania postawionego zagadnienia należy określić funkcje niewiadome, spełniające następujące warunki brzegowe:

przy $z=0$

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} &u_z = \varepsilon - F(r), && 0 \leqslant r \leqslant R, \\ &\tau_{rz} = fr\sigma_z, && 0 \leqslant r \leqslant R, \\ &\sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, && R \leqslant r \leqslant \infty; \end{aligned}$$

przy $z=H$

$$(1.7)\qquad u_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant \infty.$$

Symbol R oznacza tu promień powierzchni kontaktu, ε pionowe przemieszczenie stempla, a f współczynnik proporcjonalności.

2. Rozwiązanie zagadnienia

Po spełnieniu warunków brzegowych (1.6) i (1.7) i pewnych przekształceniach otrzymujemy układ dwóch dualnych równań całkowych dla funkcji $\varphi(\eta)$ i $\psi(\eta)$:

$$
\begin{gathered}
H_0[\eta^{-2}\varphi(\eta);\eta\to\rho]=A\big(\varepsilon-F(r)\big)+CH_0[\eta^{-2}\psi(\eta);\eta\to\rho]+\\
+H_0\left[\eta^{-2}G_1(\eta)\varphi\left(\frac{\eta}{2\delta}\right);\eta\to\frac{\rho}{2\delta}\right]-\\
-BH_0\left[\eta^{-2}G_2(\eta)\psi\left(\frac{\eta}{2\delta}\right);\eta\to\frac{\rho}{2\delta}\right],\quad \rho<1,\\
H_0[\varphi(\eta)\eta;\eta\to\rho]=0
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

oraz

$$
\begin{gathered}
H_1[\eta^{-1}\psi(\eta);\eta\to\rho]=\rho fH_0[\eta^{-1}\varphi(\eta);\eta\to\rho],\quad \rho<1,\\
H_1[\eta^{-1}\psi(\eta);\eta\to\rho]=0,
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

gdzie

$$
\begin{gathered}
G_1(\eta)=\frac{\operatorname{sh}(\eta\Omega_+)+\dfrac{\Omega_+}{\Omega_-}\operatorname{sh}(\eta\Omega_-)+\operatorname{ch}(\eta\Omega_-)-\operatorname{ch}(\eta\Omega_+)}{\operatorname{sh}(\eta\Omega_+)+\dfrac{\Omega_+}{\Omega_-}\operatorname{sh}(\eta\Omega_-)},\\
G_2=2\frac{\Omega_+}{(\nu_1+\nu_2)\Omega_-}\,\frac{\operatorname{sh}(\eta\Omega_-)}{\operatorname{sh}(\eta\Omega_+)+\dfrac{\Omega_+}{\Omega_-}\operatorname{sh}(\eta\Omega_-)},\\
A=\frac{A_{11}A_{33}-A_{13}^2}{A_{11}(\nu_1+\nu_2)},\quad C=\frac{\sqrt{A_{11}A_{33}}-A_{13}}{A_{11}(\nu_1+\nu_2)},\quad B=\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}},\\
\Omega\pm=\frac{\nu_1\pm\nu_2}{2\nu_1\nu_2},\quad \rho=\frac{r}{R},\quad \delta=\frac{H}{R},\quad f_1=fR.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Stosując do dualnych równań całkowych (2.1) i (2.2) wzór na obrót [6], otrzymujemy układ dwóch równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\eta)={}&-\frac{2}{\pi}A\varepsilon\sin\eta+\frac{2}{\pi}A\eta\left[\cos\eta\int_0^1\frac{xf(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\right.\\
&\left.+\eta\int_0^1\int_0^1\frac{uF(xu)\sin(\eta u)}{\sqrt{1-x^2}}\,du\,dx\right]+\frac{2}{\pi}C\eta\int_0^1\cos\eta y\,dy\int_0^\infty\cos uy\psi(u)\frac{du}{u}+\\
&+\frac{2}{\pi}\eta\int_0^1\cos\eta y\,dy\int_0^1 G_1(u)\varphi\left(\frac{u}{2\delta}\right)\cos\left(\frac{uy}{2\delta}\right)\frac{du}{u}-\\
&-\frac{2}{\pi}B\eta\int_0^1\cos\eta y\,dy\int_0^\infty G_2(u)\psi\left(\frac{u}{2\delta}\right)\cos\left(\frac{uy}{2\delta}\right)\frac{du}{u}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

oraz

$$\psi(\eta)=f_1\eta\int_0^1 y^2 J_1(\eta y)\,dy\int_0^\infty \varphi(u)J_0(uy)\,du. \tag{2.5}$$

Szczegółowo rozpatrzymy przypadki dla stempla parabolicznego i stożkowego, gdy $F(r)$ są odpowiednio równe

$$F(\eta)=\frac{r^2}{2R_1} \quad \text{i} \quad F(r)=r\operatorname{ctg}\alpha, \tag{2.6}$$

gdzie R_1 jest promieniem krzywizny stempla parabolicznego w jego wierzchołku, a 2α kątem rozwarcia stożka.

W rozważanych przypadkach naprężenia na granicy obszaru kontaktu są ograniczone. Dlatego też wygodnie jest na samym początku przekształcić równanie (2.4), wydzielając i przyrównując do zera wyrazy dające nieograniczone naprężenia. Układ (2.4) i (2.5) przyjmie zatem postać

$$\begin{aligned}\varphi(\eta)=-\varphi_0(\eta)\pm\int_0^1\frac{2}{\pi}C\int_0^1\sin\eta y\,dy\int_0^\infty\psi(u)\sin uy\,du+\\
+\frac{1}{\pi\delta}\int_0^1\sin\eta y\,dy\int_0^\infty G_1(u)\,\varphi\left(\frac{u}{2\delta}\right)\sin\left(\frac{uy}{2\delta}\right)du-\\
-\frac{B}{\pi\delta}\int_0^1\sin\eta y\,dy\int_0^\infty G_2(u)\psi\left(\frac{u}{2\delta}\right)\sin\left(\frac{uy}{2\delta}\right)du\end{aligned} \tag{2.7}$$

oraz

$$\psi(\eta)=f_1\eta\int_0^1 y^2 J_1(\eta y)\,dy\int_0^\infty\varphi(u)J_0(uy)\,du, \tag{2.8}$$

gdzie

$$\varphi_0(\eta)=\frac{4R^2A}{\pi R_1}\frac{1}{\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}-\cos\eta\right)$$

w przypadku stempla parabolicznego i

$$\varphi_0(\eta)=AR\operatorname{ctg}\alpha\frac{1-\cos\eta}{\eta}$$

w przypadku stempla stożkowego.

Warunek zerowania się nieregularnej części prowadzi do określenia zależności między R i ε:

$$\begin{aligned}D+C\int_0^\infty\psi(u)\cos u\frac{du}{u}+\int_0^\infty G_1(u)\,\varphi\left(\frac{u}{2\delta}\right)\cos\left(\frac{u}{2\delta}\right)\frac{du}{u}-\\
-\int_0^\infty G_2(u)\,\varphi\left(\frac{u}{2\delta}\right)\cos\left(\frac{u}{2\delta}\right)\frac{du}{u}=0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Wielkość D dla stempla parabolicznego i stożkowego jest równa odpowiednio

$$D=-A(\varepsilon-R^2/R_1), \qquad D=-A\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}R\operatorname{ctg}\alpha\right).$$

Tak więc rozwiązanie zagadnienia sprowadziło się do wyznaczenia funkcji $\varphi(\eta)$ i $\psi(\eta)$ z układu równań (2.7) i (2.8). Znając $\varphi(\eta)$ i $\psi(\eta)$ naprężenia kontaktowe σ_z i τ_{rz} określamy ze wzorów

$$\sigma_z=\frac{1}{R}H_0[\eta^{-1}\varphi(\eta);\eta\rightarrow\rho], \qquad \tau_{rz}=\frac{1}{R}H_1[\eta^{-1}\psi(\eta);\eta\rightarrow\rho]. \tag{2.10}$$

Układ równań całkowych rozwiązujemy w następujący sposób. Podstawiając do (2.7) wartość $\psi(\eta)$ otrzymaną ze wzoru (2.8) znajdziemy równanie już tylko dla funkcji $\varphi(\eta)$:

$$\begin{aligned}\varphi(\eta)=&-\varphi_0(\eta)+\frac{2}{\pi}f_1C\int_0^1\sin(\eta y)\,dy\int_0^\infty u\sin(uy)\,du\int_0^1 x^2J_1(ux)\,dx\,\times\\ &\times\int_0^\infty\varphi(v)J_0(vx)\,dx+\frac{1}{\pi\delta}\int_0^1\sin(\eta y)\,dy\int_0^\infty G_1(u)\varphi\left(\frac{u}{2\delta}\right)\sin\left(\frac{uy}{2\delta}\right)du-\\ &-\frac{Bf_1}{2\pi\delta^2}\int_0^1\sin(\eta y)dy\int_0^\infty G_2\left(\frac{u}{2\delta}\right)u\sin\left(\frac{uy}{2\delta}\right)du\int_0^1 x^2J_1\left(\frac{ux}{2\delta}\right)dx\int_0^\infty\varphi(v)J_0(vx)\,dv.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Znając $\varphi(\eta)$ funkcję $\psi(\eta)$ znajdujemy z równania (2.8) przez zwyczajne całkowanie.

Rozwiązania równania (2.11) poszukujemy metodą kolejnych przybliżeń przyjmując za przybliżenie zerowe $\varphi_0(\eta)$, tzn. rozwiązanie odpowiadające zagadnieniu dla półprzestrzeni bez uwzględnienia tarcia. Wtedy

$$\varphi_0(\eta)+\varphi_1(\eta)+\varphi_2(\eta)+\ldots=\varphi(\eta), \tag{2.12}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\varphi_k(\eta)=&\frac{2}{\pi}Cf_1\int_0^1\sin(\eta y)dy\int_0^\infty u\sin(uy)\,du\int_0^1 x^2J_1(ux)\,dx\int_0^\infty\varphi_{k-1}(v)J_0(vx)dv+\\ &+\frac{1}{\pi\delta}\int_0^1\sin(\eta y)dy\int_0^\infty G_1(u)\,\varphi_{k-1}\left(\frac{u}{2\delta}\right)\sin\left(\frac{uy}{2\delta}\right)du-\frac{Bf_1}{2\pi\delta^2}\int_0^1\sin(\eta y)\,dy\,\times\\ &\times\int_0^\infty G_2(u)u\sin\left(\frac{uy}{2\delta}\right)du\int_0^1 x^2J_1\left(\frac{ux}{2\delta}\right)dx\int_0^\infty\varphi_{k-1}(v)J_0(vx)\,dv, \qquad k=1,2,3,\ldots.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dla wygody podobnie jak w pracach [2 i 3] każdą z kolejnych iteracji rozkładamy w szereg asymptotyczny względem potęg trzech bezwymiarowych parametrów δ^{-1}, c i f_1. Nie zatrzymując się na dość skomplikowanych wyliczeniach przytoczymy przybliżone wzory na naprężenie normalne σ_z w strefie kontaktu oraz na siłę P działającą na stempel.

1. Stempel paraboliczny

$$(2.14)\qquad \sigma_z=-\frac{4RA\sqrt{1-\rho^2}}{\pi R_1}\{1+0{,}159Cf_1\,t_1+(0{,}106+0{,}0507Cf_1+$$
$$+0{,}0169Cf_1\,t_1)\,S_3\,\delta^{-3}-0{,}0381M_4\,Bf_1-[0{,}00707\,(7+5\rho^2)+$$
$$+0{,}0169Cf_1\,(1+\rho^2)+0{,}0000704\,Cf_1t_2]\,S_5\,\delta^{-5}+[S_3^2\,(0{,}0113+0{,}0108\,Cf_1+$$
$$+0{,}00179Cf_1\,t_1)+0{,}00253Bf_1\,M_6\,(8+7\rho^2)]\,\delta^{-6}+\ldots\},$$

$$(2.15)\qquad P=\frac{8R^3A}{R_1}\,[0{,}333+0{,}159Cf_1+(0{,}0353+0{,}0338Cf_1)\,S_3\,\delta^{-2}-$$
$$-0{,}0106M_4\,Bf_1\,\delta^{-4}-S_5\,(0{,}0212+0{,}0191Cf_1)\,\delta^{-5}+$$
$$+(0{,}00375S_3^2+0{,}00909Cf_1\,M_6+0{,}00538Cf_1\,S_3^2)\,\delta^{-6}+\ldots].$$

2. Stempel stożkowy

$$(2.16)\qquad \sigma_z=-A\operatorname{ctg}\alpha\left\{\ln\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}+\frac{2}{\pi}\,Cf_1\,t_3+\sqrt{1-\rho^2}\,[0{,}159+\right.$$
$$+(0{,}0599+0{,}0253t_1)\,Cf_1]\,S_3\,\delta^{-3}-0{,}0398f_1\,M_4\sqrt{1-\rho^2}\,\delta^{-4}-$$
$$-\sqrt{1-\rho^2}\,[0{,}0133\,(5+4\rho^2)+0{,}101\,(0{,}176+0{,}591\,\rho^2)\,Cf_1+$$
$$+0{,}000528Cf_1\,t_4]\,S_5\,\delta^{-5}+\sqrt{1-\rho^2}\,[0{,}00221Bf_1\,M_6\,(11+10\rho^2)+$$
$$\left.+S_3^2\,(0{,}0169+0{,}0144Cf_1+0{,}00269Cf_1\,t_1)]\,\delta^{-6}+\ldots\right\};$$

$$(2.17)\qquad P=2\pi R^2 A\operatorname{ctg}\alpha\,[0{,}5+0{,}189Cf_1+(0{,}0591+0{,}0454Cf_1)\,S_3\,\delta^{-3}-$$
$$-0{,}0133Bf_1\,M_4\,\delta^{-4}-(0{,}0291+0{,}0301Cf_1)\,S_5\,\delta^{-5}+$$
$$+(0{,}0111Bt_1\,M_6+0{,}00563S_3^2+0{,}00750Cf_1)\,\delta^{-6}+\ldots].$$

We wzorach (2.14)—(2.17) wprowadziliśmy oznaczenia:

$$t_1=3\,(1+\ln\sqrt{1-\rho^2}+(2-3\rho^2)\left[\frac{\pi^2}{8}+H(\rho)\right](1-\rho^2)^{-1/2},$$

$$t_2=3\,(122+75\rho^2\ln\sqrt{1-\rho^2}+(416+225\rho^2)+$$
$$+3\,(88-72\rho^2-75\rho^4)\left[\frac{\pi^2}{8}-H(\rho)\right](1-\rho^2)^{-1/2},$$

$$t_3=2\ln 2\sqrt{1-\rho^2}+\left[\rho\left(\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)+\frac{\pi^2}{2}-H(\rho)\right](1-\rho^2)^{-1/2},$$

$$t_4 = 3(22+15\rho^2)\ln\sqrt{1-\rho^2} + (76+45\rho^2) + \\ + 3(16-12\rho^2-15\rho^4)\left[\frac{\pi^2}{8} - H(\rho)\right](1-\rho^2)^{-1/2},$$

$$S_m = (\nu_1\nu_2)^m \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\nu_1-\nu_2}(\nu_1\beta^m_{n,n+1} - \nu_2\beta^m_{n+1,n}) - \beta^m_{n+1,n+1}\right] - \right. \\ - \frac{\Omega_+(1+n)}{2(\nu_1-\nu_2)\Omega_-}[\nu_1\beta^m_{n,n+2} + \nu_2\beta^m_{n+2,n} - (\nu_1+\nu_2)\beta^m_{n+1,n+1} - \\ - (\nu_1-\nu_2)(\beta^m_{n+1,n+2} - \beta^m_{n+2,n+1})] - \frac{0{,}14\omega\nu_1\nu_2}{(\nu_1-\nu_2)^2}[\nu_1\beta^{m+1}_{2n,2n+2} + \nu_2\beta^{m+1}_{2n+2,2n} - \\ \left. - (\nu_1+\nu_2)\beta^{m+1}_{2n+1,2n+1} - (\nu_1-\nu_2)(\beta^{m+1}_{2n+1,2n+2} - \beta^{m+1}_{2n+1,2n+1})]\right\}, \qquad m=1,3,5,$$

$$M_m = 2(\nu_1\nu_2)^m \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\nu_1-\nu_2}(\beta^m_{n,n+1} - \beta^m_{n+1,n}) - \right. \\ - \frac{n+1}{2(\nu_1-\nu_2)}\frac{\Omega_+}{\Omega_-}(\beta^m_{n,n+2} + \beta^m_{n+2,n} - 2\beta^m_{n+1,n+1}) - \\ \left. - 0{,}14\omega m\frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1-\nu_2)^2}(\beta^{m+1}_{2n,2n+2} + \beta^{m+1}_{2n+2,2n} - 2\beta^{m+1}_{2n+1})\right\}, \qquad m=4,6,$$

gdzie

$$H(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{4n+2}}{(1+2n)^2(1+\sqrt{1-\rho^2})^{4n+2}}, \qquad \omega = \frac{(2\nu_1+3\nu_2)(3\nu_1+2\nu_2)}{(\nu_1+4\nu_2)(\nu_2+4\nu_1)},$$

$$\beta_{np+i,np+j} = \frac{1}{(np+i)\nu_1 + (np+j)\nu_2}, \qquad i,j=0,1,2, \qquad p=1,2.$$

Należy zauważyć, że przy przejściu granicznym z powyższego rozwiązania można otrzymać znane przypadki szczególne.

Aby otrzymać rozwiązanie dla warstwy izotropowej, wystarczy w odpowiednich wzorach przejść do granicy $\nu_1 \to \nu_2 \to 1$. W danym przypadku po elementarnych obliczeniach otrzymujemy

$$S_1 = 1{,}170, \quad S_3 = 3{,}193, \quad S_5 = 5{,}525,$$

$$M_4 = 3{,}563, \quad M_6 = 5{,}771,$$

$$A = \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}, \qquad B = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)},$$

gdzie λ i μ są współczynnikami Lamégo, a σ współczynnikiem Poissona.

Jednocześnie przy $f_1 = 0$ otrzymujemy rozwiązania zarówno dla warstwy izotropowej jak i poprzecznie-izotropowej, rozważane w pracach [7 i 8]. Przypadek $\delta \to \infty$ odpowiada rozwiązaniu dla półprzestrzeni.

3. Analiza rozwiązania i obliczenia numeryczne

Jak wynika z powyższych rozważań, rozwiązanie zagadnienia otrzymane zostało metodą kolejnych przybliżeń przez rozwinięcie w szeregi względem potęg trzech parametrów: δ^{-1}, f_1 i C. Z powodu złożoności ostatecznych wyników wzory (2.14) - (2.17) przytoczone zostały z dokładnością do δ^{-6} i drugiej potęgi sumy parametrów C i f_1. Oczywiście rozwiązanie jest poprawne tylko dla tych wartości parametrów, dla których proces kolejnych przybliżeń jest zbieżny. Dokładność rozwiązania zależy zarówno od ilości uwzględnionych wyrazów rozkładu jak i od wielkości parametrów rozkładu.

Po dokonaniu odpowiednich oszacowań całek w klasie funkcji ograniczonych można wykazać, że operator całkowy równania (2.11) jest operatorem zwartym i zgodnie z twierdzeniem Banacha ma punkt stały, jeśli parametry δ, C i f_1 związane są zależnością

$$3{,}233Cf_1+\frac{1}{\pi\delta^2}\frac{\nu_1^2\nu_2}{(\nu_1+\nu_2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{(1+n^2)m_n}+\frac{f_1\nu_1^2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2)}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2n)}{m_n}<1, \tag{3.1}$$

gdzie

$$H_n=(2n^3+5n^2+4n+1)(\nu_1^4+\nu_2^4)+(8n^3+17n^2+12n+3)(\nu_1^2+\nu_2^2)\nu_1\nu_2+$$
$$+(12n^3+24n^2+16n+3)\nu_1^2\nu_2^2,$$

$$m_n=\{[n\nu_1+(1+n)\nu_2][n\nu_2+(1+n)\nu_1]\}^2.$$

Tablica 1

δ	f_1 \ ρ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1
∞	0	0,129	0,126	0,188	0,103	0,0775	0,0563	0
	0,05	0,131	0,128	0,120	0,104	0,0778	0,0562	0
	0,1	0,133	0,130	0,122	0,106	0,0782	0,0561	0
	0,2	0,137	0,135	0,125	0,108	0,0790	0,0558	0
	0,3	0,142	0,139	0,129	0,110	0,0798	0,0556	0
3	0	0,130	0,128	0,120	0,105	0,0784	0,0570	0
	0,05	0,133	0,130	0,121	0,106	0,0788	0,0569	0
	0,1	0,135	0,132	0,123	0,107	0,0792	0,0568	0
	0,2	0,139	0,136	0,127	0,109	0,0800	0,0565	0
	0,3	0,144	0,140	0,130	0,112	0,0808	0,0563	0
2	0	0,134	0,131	0,122	0,107	0,0800	0,0587	0
	0,05	0,136	0,133	0,124	0,108	0,0803	0,0586	0
	0,1	0,138	0,135	0,126	0,109	0,0807	0,0585	0
	0,2	0,143	0,139	0,130	0,111	0,0815	0,0583	0
	0,3	0,147	0,144	0,133	0,114	0,0823	0,0580	0
1,5	0	0,139	0,136	0,127	0,110	0,0820	0,0622	0
	0,05	0,141	0,138	0,128	0,111	0,0824	0,0621	0
	0,1	0,142	0,140	0,130	0,113	0,0828	0,0620	0
	0,2	0,148	0,145	0,134	0,115	0,0837	0,0618	0
	0,3	0,151	0,151	0,138	0,118	0,0845	0,0616	0

Z powyższego związku określamy wielkość δ w zależności od parametrów f_1 i C. Uwzględniając prawo tarcia Coulomba można wyciągnąć wniosek, że $f_1 < 1$. Praktycznie f_1 jest dosyć małe. Jak wykazują obliczenia liczbowe w przypadku idealnej szczepności $f_1 \approx 0{,}1$. Współczynnik C zależy od materiału. Na przykład dla piaskowca wynosi on 0,301, dla stali 0,286, żelaza 0,343 i betonu 0,391.

Na podstawie wzorów (2.16) – (2.19) przeprowadzono obliczenia numeryczne dla normalnego naprężenia kontaktowego σ_z oraz dla siły P w przypadku betonu ($\sigma = 0{,}18$; $E = 0{,}196 \cdot 10^{11}$ H/M^2) dla niektórych wartości δ i f_1. Wyniki obliczeń przedstawione zostały w tablicach 1 – 4.

W tablicach 1 i 2 są przytoczone wielkości

dla stempla parabolicznego

$$\beta_1 = \frac{R_1}{R} \sigma_z \cdot 10^{-11} \frac{M^2}{H}$$

i dla stempla stożkowego

$$\beta_2 = \sigma_z (\operatorname{ctg} \alpha)^{-1} \cdot 10^{-11} \frac{M^2}{H}.$$

Wielkości $\beta_3 = PR_1/R \cdot 10^{-11} \frac{M^2}{H}$ (stempel paraboliczny) i $\beta_4 = P (\operatorname{ctg} \alpha)^{-1} \times \times R^{-2} \cdot 10^{-11} \frac{M^2}{H}$ (stempel stożkowy) podane są odpowiednio w tablicach 3 i 4.

Tablica 2

δ	f_1 \ ρ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1
∞	0		0,232	0,159	0,111	0,0703	0,0470	0
	0,05		0,235	0,161	0,112	0,0706	0,0469	0
	0,1		0,237	0,162	0,113	0,0707	0,0467	0
	0,2		0,242	0,166	0,115	0,0710	0,0464	0
	0,3		0,248	0,172	0,117	0,0714	0,0461	0
3	0		0,234	0,160	0,113	0,0713	0,0477	0
	0,05		0,237	0,162	0,114	0,0715	0,0476	0
	0,1		0,239	0,164	0,115	0,0717	0,0475	0
	0,2		0,244	0,167	0,117	0,0721	0,0472	0
	0,3		0,249	0,171	0,119	0,0724	0,0469	0
2	0		0,238	0,164	0,116	0,0733	0,0491	0
	0,05		0,240	0,166	0,117	0,0735	0,0490	0
	0,1		0,243	0,167	0,118	0,0737	0,0488	0
	0,2		0,248	0,171	0,120	0,0741	0,0485	0
	0,3		0,253	0,175	0,122	0,0745	0,0482	0
1,5	0		0,244	0,169	0,120	0,0759	0,0509	0
	0,05		0,247	0,171	0,121	0,0762	0,0507	0
	0,1		0,249	0,173	0,122	0,0764	0,0505	0
	0,2		0,255	0,177	0,124	0,0768	0,0502	0
	0,3		0,260	0,181	0,126	0,0772	0,0499	0

Tablica 3

δ \ f_1	0	0,05	0,1	0,2	0,3
∞	0,270	0,273	0,275	0,280	0,286
3	0,273	0,276	0,279	0,283	0,289
2	0,279	0,282	0,285	0,290	0,295
1,5	0,288	0,291	0,295	0,299	0,305

Tablica 4

δ \ f_1	0	0,05	0,1	0,2	0,3
∞	0,319	0,321	0,323	0,328	0,333
3	0,322	0,325	0,327	0,332	0,337
2	0,329	0,332	0,334	0,340	0,344
1,5	0,340	0,343	0,345	0,351	0,356

Literatura cytowana w tekście

1. Я. М. Кізима, Д. В. Грилицкий, *До осесиметричної задачі про тиск плоского кругового штампа на пружний півпростір при наявності зчеплення*, Прикладна механіка, **10**, 2, 1964.
2. Я. М. Кизыма, *Контактные напряжения в случае сцепления кругового штампа с упригим слоем при осесимметричной нагрузке*, Инж. журнал, **4**, 2, 1964.
3. Я. М. Кизыма, *Напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропного слоя, подверженного осесимметричному давлению штампа*, Изв. АН СССР, Механика, **5**, 1965.
4. В. С. Губенко, Г. К. Крабко, Г. М. Накашидзе, *Контактная задача о круговом штампе для полупространства с учетом сил трения*, Прикладная механика, **7**, 3, 1971.
5. A. Singh, *Stress distributions within solids of revolution*, ZAMM, **39**, 12, 1959.
6. И. Снеддон, *Преобразования Фурье*, Москва, 1955.
7. И. И. Ворович, Ю. А. Устинов, *О давлении штампа на слой конечной толщины*, ПММ, **23**, 3, 1959.
8. Д. В. Грилицкий, Я. М. Кизыма, *Осесимметричная контактная задача для трансверсально-изотропного слоя, покаящегося на жестком основании*, Изв. АН СССР, ОГН, Механ. и машиностроение, 3, 1962.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛБНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ В ЗОНЕ КОНТАКТА КАСАТЕЛБНЫХ УСИЛИЙ

В статье рассматривается осесимметричная контактная задача о давлении штампа на трансверсально-изотропный слой в предположении что в области контакта касательные и нормальные напряжения связаны соотношением $\tau_{rz}=kr\sigma_z$. Задача сведена к системе двух уравнений Фредгольма второго рода. Решение проводится методом последовательных приближений. Дано оценки параметров, для которих метод последовательных приближений сходится к точному решению. Приведенны формулы для нормальных напряжений и силы действующей на штамп. Численные подсчёты представлены в виде таблиц.

Summary

AXI-SYMMETRIC PROBLEM OF A PUNCH ACTING ON A TRANSVERSALY ISOTROPIC LAYER WITH TANGENTIAL STRESSES AT THE CONTACT SURFACE

In a paper the axially-symmetric contact problem of indentation of a punch in a transversaly-isotropic layer is considered under assumption that the normal and tangent stresses are related by the formula: $\tau_{rz}=kr\sigma_z$. The problem is reduced to the system of two second order Fredholm equations. The solution of this system is obtained by the method of successive approximations. An estimation of the parameters, under which the method of successive approximations is convergent to the exact solution, is given. The formulae for normal stress and force acting on the punch are derived. Numerical results are presented in a form of tables.

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 19 kwietnia 1972 r.