

## PRZYCZYNEK DO SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO SKRĘCANIA PRĘTÓW DLA SKOŃCZONYCH ODKSZTAŁCEŃ

ANDRZEJ MIODUCHOWSKI (WARSZAWA)

Wyniki doświadczalne, otrzymane z prób skręcania prętów, nie są do tej pory w pełni opisane przez teorię. Dotyczy to w szczególności efektu drugiego rzędu zaobserwowanego przez Poyntinga, że skręcane pręty wykazują zmianę długości. Po raz pierwszy udało się to RIVLINOWI [1] w ramach teorii skończonych odkształceń dla nieściśliwego materiału sprężystego. WETZELL [2] uogólnił te wyniki dla materiałów sprężystych, ściśliwych. Badania teoretyczne w ramach teorii plastyczności dla skończonych odkształceń ograniczały się do modelu sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem liniowym lub wykładniczym [3, 4 i 5]. Uwzględnienie składowych sprężystych ma jednak szczególne znaczenie zwłaszcza dla określenia naprężeń resztkowych, które pozostają w pręcie po odciążeniu. THERMANN [6] rozpatrywał problem sprężysto-plastycznego skręcania pręta kołowego z materiału nieściśliwego, izotropowego i jednorodnego. Przyjęcie modelu geometrycznego odkształcenia, uwzględniającego zmianę długości i średnicy, daje jako efekt Poyntinga siłę osiową przy zahamowanym wydłużeniu.

W niniejszej pracy rozpatruje się również problem sprężysto-plastycznego skręcania pręta o przekroju kołowym, oparty na takim samym modelu geometrycznym, jak zaproponowano w pracy [6]. Tu jednak jako równania stanu przyjmujemy aproksymacyjny opis zaproponowany przez LEHMANN [7], który dając prosty układ równań z jednej strony potwierdza poprzednio uzyskane wyniki w przypadku materiału nieściśliwego (por. [6]), z drugiej natomiast daje możliwość próby opisu tego problemu dla materiału ściśliwego. Dla lepszego porównania przedstawiono w niniejszej pracy wyniki dla obu tych przypadków.

Przyjęto następujące założenia:

- a) materiał jest jednorodny, izotropowy i zachowuje te własności podczas procesu deformacji;
- b) materiał jest: A) nieściśliwy, B) ściśliwy;
- c) w zakresie plastycznym mamy izotropowe, liniowe wzmocnienie;
- d) podczas skręcania promienie pozostają proste, kołowa powierzchnia zewnętrzna pozostaje kołowa i płaskie przekroje pozostają płaskie;
- e) proces deformacyjny przebiega izotermicznie i dostatecznie wolno, aby pominąć wpływ sił masowych; ciężar własny pręta pominięto.

1. Wprowadźmy przestrzenny  $x^a = x^1, x^2, x^3$  oraz materialny, cylindryczny

układ współrzędnych  $\xi^i = \xi^1, \xi^2, \xi^3$ . Oznaczmy ponadto przez  $\psi = \varphi/z$  kąt skreślenia przypadający na jednostkę długości pręta. W chwili początkowej mamy:

$$\overset{\circ}{x}^1 = \xi^1, \quad \overset{\circ}{x}^2 = \xi^2, \quad \overset{\circ}{x}^3 = \xi^3.$$

Zgodnie z przyjętym modelem geometrycznym otrzymujemy następujące wzory transformacyjne (rys. 1):

$$(1) \quad \begin{aligned} x^1 = r(\xi^1), \quad r(\xi^1) = x^1, \quad x^2 = \xi^2 + \psi z(\xi^3), \quad \xi^2 = x^2 - \psi x^3, \\ x^3 = z(\xi^3), \quad z(\xi^3) = x^3, \end{aligned}$$

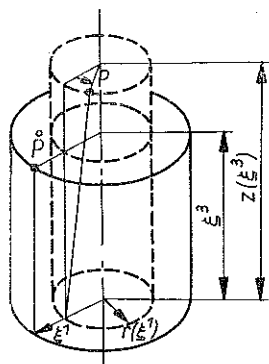
na podstawie których możemy obliczyć tensory metryczne  $g^{ir}$  i  $g^{\alpha\beta}$  w obu układach współrzędnych. Tensor prędkości deformacji, jako symetryczna część gradientu prędkości, może być teraz przedstawiony w postaci [8]

$$d_k^i = \frac{1}{2} g^{ir} (g_{rk})' = -\frac{1}{2} (g^{ir})' g_{rk},$$

gdzie ( )' oznacza pochodną cząstkową względem czasu. Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymujemy np. składowe fizyczne tego tensora w układzie przestrzennym:

$$(2) \quad d_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{r'^{\cdot}}{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^{\cdot}}{r} & \frac{1}{2} \psi r \left( \frac{\dot{\psi}}{\psi} + \frac{z^{+\cdot}}{z^+} \right) \\ 0 & \frac{1}{2} \psi r \left( \frac{\dot{\psi}}{\psi} + \frac{z^{+\cdot}}{z^+} \right) & \frac{z^{+\cdot}}{z^+} \end{bmatrix},$$

gdzie  $( )' \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^1} ( )$ ,  $( )^+ \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^3} ( )$ .



Rys. 1

Ponieważ przy danym modelu geometrycznym zmiany postaciowe w kierunkach (1,2) i (1,3) są wykluczone, przeto liczyć się musimy z następującymi składowymi fizycznymi dewiatora naprężeń:

$$(3) \quad \tau_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & \tau \\ 0 & \tau & \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 + p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 + p & \tau \\ 0 & \tau & \sigma_3 + p \end{bmatrix},$$

gdzie  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  są składowymi w kierunku promieniowym, obwodowym i podłużnym. Jak widać, mamy do czynienia tylko z trzema niezależnymi wielkościami ( $\tau_r^r = 0$ ), np.  $\tau_1, \tau_3, \tau$ .

2. Przyjmijmy aproksymacyjny opis skończonych deformacji sprężysto-plastycznych zaproponowany w pracy [7]:

$$d_k^i = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_i^k} + \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_k^i|_0 - \frac{\nu}{1+\nu} (\dot{\sigma}_r^r) \delta_k^i \right\}.$$

Równania te po uwzględnieniu warunku plastyczności

$$(4) \quad \left( \sigma_k^i - \frac{1}{3} \sigma_r^r \delta_k^i \right) \left( \sigma_k^i - \frac{1}{3} \sigma_r^r \delta_k^i \right) - (k_0^2 + 2Bw) = 0$$

możemy przedstawić w postaci

$$(5) \quad d_\beta^\alpha = \frac{1}{B} \frac{\tau_\delta^\gamma \tau_\nu^\delta|_0}{\tau_\delta^\gamma \tau_\nu^\delta} \tau_\beta^\alpha + \frac{1}{2G} \tau_\beta^\alpha|_0 + \frac{1}{3K} \sigma_\nu^\gamma|_0 \delta_\beta^\alpha,$$

gdzie  $K$  jest modułem ściśliwości:

$$K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu},$$

$G$  modułem ścinania,  $\nu$  współczynnikiem Poissona,  $B$  modułem wzmocnienia plastycznego, a  $( )|_0$  oznacza kowariantne różniczkowanie względem czasu. Po przeprowadzeniu prostych rachunków (które tu pominiemy ze względu na ich rozmiary) dla poszczególnych wyrazów równań (5) otrzymujemy po uwzględnieniu (2) następujące wzory:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{r'}{r'} &= \frac{1}{B} \frac{\dot{I}}{I} \tau_1 + \frac{1}{2G} \dot{\tau}_1 - \frac{\dot{p}}{K}, \\ \frac{r}{r} &= \frac{1}{B} \frac{\dot{I}}{I} \tau_2 + \frac{1}{2G} \left( \dot{\tau}_2 - r\tau \frac{(\psi z^+)'}{z^+} \right) - \frac{\dot{p}}{K}, \\ \frac{1}{2} r \frac{(\psi z^+)' }{z^+} &= \frac{1}{B} \frac{\dot{I}}{I} \tau + \frac{1}{2G} \left( \dot{\tau} + \frac{1}{2} r \frac{(\psi z^+)' }{z^+} (\tau_2 - \tau_3) \right), \\ \frac{z^+}{z^+} &= \frac{1}{B} \frac{\dot{I}}{I} \tau_3 + \frac{1}{2G} \left( \dot{\tau}_3 + r\tau \frac{(\psi z^+)' }{z^+} \right) - \frac{\dot{p}}{K}, \\ p' &= \tau_1' + (\tau_1 - \tau_2) \frac{r'}{r}, \\ \frac{\dot{I}}{I} &= \frac{\tau_1 \dot{\tau}_1 + \tau_3 \dot{\tau}_3 + \tau \dot{\tau} + \frac{1}{2} (\tau_1 \dot{\tau}_3 + \tau_3 \dot{\tau}_1)}{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 + \tau^2}. \end{aligned}$$

Równanie (6)<sub>5</sub> jest oczywiście równaniem równowagi. Ten układ równań może być zastosowany do problemu skręcania, rozciągania, obciążania ciśnieniem zewnętrznym lub wewnętrznym, lub do kombinacji tych wszystkich obciążeń.

3. Jako przykład rozpatrzmy pręt skręcany o długości  $l$  i średnicy  $2a$  wykonany z materiału nieściśliwego; założymy ponadto, że pręt ten nie może zwiększyć swej długości. Jako efekt Poyntinga otrzymujemy równoważne mu zjawisko występowania siły podłużnej. Z warunku nieściśliwości  $d_z^z=0$ , po uwzględnieniu faktu, że  $x^3 = z = \xi^3 = z = \text{const}$ , mamy oczywiście  $r = \xi$ . Tak więc z równań (6) otrzymujemy układ czterech równań różniczkowych:

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{1}{B} \frac{\tau_1 \dot{\tau}_1 + \tau_3 \dot{\tau}_3 + \tau \dot{\tau} + \frac{1}{2} (\tau_1 \dot{\tau}_3 + \tau_3 \dot{\tau}_1)}{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 + \tau^2} \tau_1 + \frac{\dot{\tau}_1}{2G} &= 0, \\ \frac{1}{B} \frac{\tau_1 \dot{\tau}_1 + \tau_3 \dot{\tau}_3 + \tau \dot{\tau} + \frac{1}{2} (\tau_1 \dot{\tau}_3 + \tau_3 \dot{\tau}_1)}{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 + \tau^2} \tau + \frac{\dot{\tau} - \frac{1}{2} (\tau_1 + 2\tau_3)r}{2G} - \frac{1}{2} r &= 0, \\ \frac{1}{B} \frac{\tau_1 \dot{\tau}_1 + \tau_3 \dot{\tau}_3 + \tau \dot{\tau} + \frac{1}{2} (\tau_1 \dot{\tau}_3 + \tau_3 \dot{\tau}_1)}{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 + \tau^2} \tau_3 + \frac{\dot{\tau}_3 + \tau r}{2G} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{2\tau_1 + \tau_3}{r}, \end{aligned}$$

dla niewiadomych  $\tau_1, \tau_3, \tau, p$ ; pochodna ( ) niech oznacza w tym przypadku  $d/d\psi$  ( ).

Jeżeli przyjąć  $B = \infty$ , to powyższe równania opisują proces czysto sprężystego skręcania. Tak otrzymany układ równań możemy scałkować i jeśli zauważymy, że  $\psi \xi \ll 1$ , to mamy następujące rozwiązania w formie zamkniętej:

$$(8) \quad p = \frac{G\psi^2}{4} (a^2 - \xi^2), \quad \tau = G\psi\xi, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_3 = -\frac{1}{2} G\psi^2 \xi^2.$$

Największe wartości naprężeń występują na brzegu przekroju pręta  $\xi = a$ . Zwiększanie kąta skręcenia  $\psi$  powoduje wzrost ich wartości. Przyrost ten opisany równaniami (8) odbywa się do momentu, w którym zostaje osiągnięta granica plastyczności. Graniczną wartość tego kąta otrzymujemy z warunku (4):

$$(9) \quad \psi_g = \frac{k_0}{\sqrt{2} G \xi} = \frac{\tau_f}{G \xi}.$$

Oczywiście min  $\psi_g$  mamy dla  $\xi = a$ . Jeżeli jako przykład weźmiemy pod uwagę pręt o wymiarach  $a = 1, l = 20$ , wykonany ze stali budowlanej o następujących parametrach:  $G = 8100 \text{ kG/mm}^2, B = 2270 \text{ kG/mm}^2, \tau_f = 16,55 \text{ kG/mm}^2, \nu = 0,5$ , to widać, że proces czysto sprężystego skręcania odbywa się tylko do wartości

$$(9') \quad [\psi_g]_{\xi=a=1} = 2,04 \cdot 10^{-3},$$

co odpowiada wzajemnemu skręcaniu końców pręta o  $\varphi = 2^\circ 20'$ . Rozkład naprężeń w tym stanie granicznym przedstawiony jest na rys. 2. Dalsze zwiększanie kąta skręcenia powoduje przesuwanie się granicy sprężysto-plastycznej w głąb pręta. Proces ten opisany wzorem (9) przedstawiony jest na rys. 3. Teraz w obszarze uplastycznionym obowiązują równania (7). Jak widać, pierwsze trzy z nich, to rów-

nania różniczkowe zwyczajne dla trzech składowych dewiatora naprężenia  $\tau_1, \tau_3, \tau$ . Jeżeli przyjmiemy, że w obszarze uplastycznionym mamy tak jak poprzednio  $\tau_1 = 0$ , a wartość momentu skręcającego

$$M = \int_0^{\xi_0} 2\pi\xi^2 \tau d\xi + \int_{\xi_0}^a 2\pi\xi^2 \tau d\xi$$

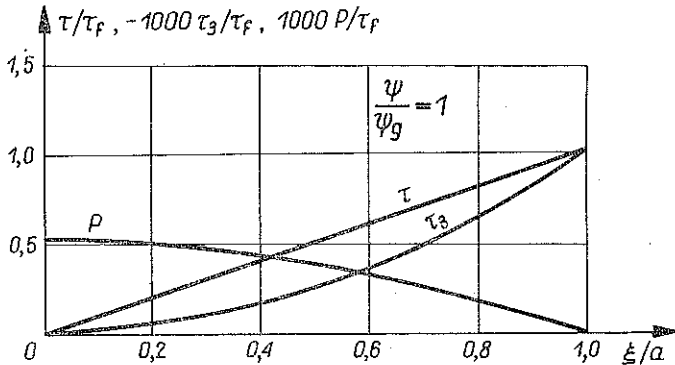
i siły podłużnej ściskającej

$$N = \int_0^{\xi_0} 2\pi\xi\sigma_3 d\xi + \int_{\xi_0}^a 2\pi\xi\sigma_3 d\xi$$

przedstawimy po odpowiednich przekształceniach w postaci równań różniczkowych zwyczajnych, to otrzymamy układ  $n=5$  równań różniczkowych w następującej postaci:

$$\frac{d}{dx} y_i = F_i(y_1, \dots, y_n), \quad i=1, \dots, 5,$$

które bez trudności możemy scałkować numerycznie<sup>(1)</sup>.



Rys. 2

Proces zwiększania kąta skręcenia kontynuowano aż do osiągnięcia wartości  $\psi = \psi^* = 10\psi_0$ , co odpowiada uplastycznieniu powierzchni poprzecznej pręta w 99%. Wartość zmieniającego się momentu skręcającego i siły normalnej przedstawiono na rys. 4, a rozkład naprężeń w stanie końcowym na rys. 5.

Jeżeli pręt skręcony do wartości  $\psi^*$  (i odpowiadającej mu wartości momentu  $\dot{M}$ ) zaczniemy skręcać teraz w przeciwnym kierunku, to nastąpi proces sprężystego odciążania, który możemy kontynuować do chwili, gdy  $M=0$ . Równania opisujące ten proces znajdujemy z tych samych równań różniczkowych co równania (8), tylko z innymi warunkami początkowymi [teraz mamy funkcje  $y_i = y_i(\xi, \psi, \psi^*)$ ]. I tak np. resztkowy kąt skręcenia jest równy

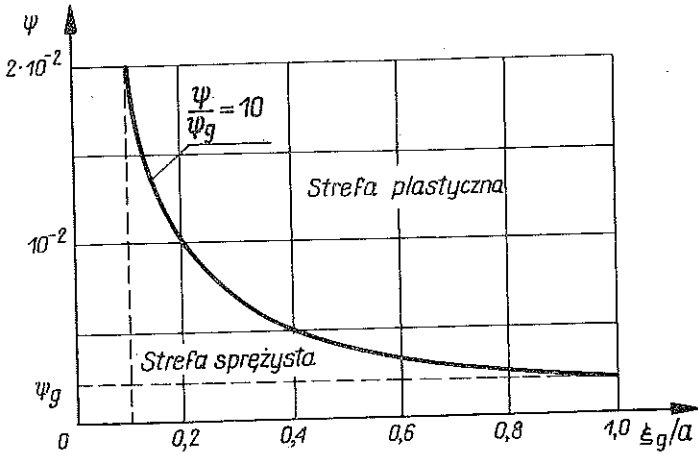
$$(10) \quad \psi_R = \psi^* - \frac{2\dot{M}}{\pi G a^4},$$

<sup>(1)</sup> Obliczenia numeryczne przeprowadzono na maszynie cyfrowej firmy Telefunken typu TR 440 na Uniwersytecie w Bochum (NRF) w Instytucie Mechaniki wg standardowej metody Rungego-Kutty z automatyczną kontrolą kroku.

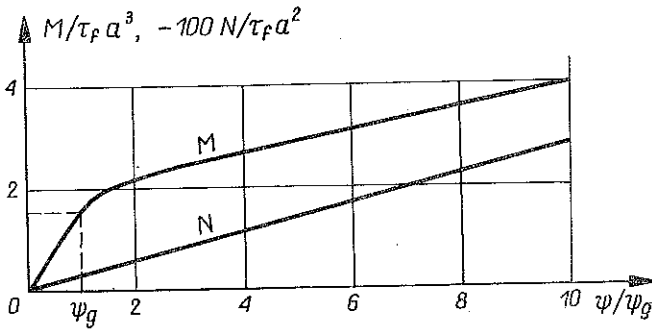
a składowa dewiatora

$$(11) \quad \tau_R = \tau^* - \frac{2M^*}{\pi} \frac{\xi}{a^4}.$$

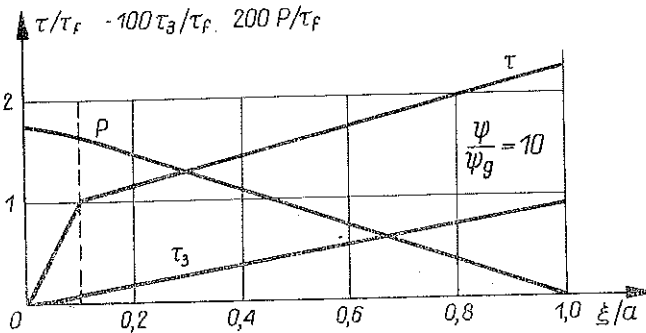
Na rys. 6 przedstawiony jest rozkład naprężeń resztkowych w przekroju poprzecznym pręta dla pełnego odciążenia ( $M=0$ ). Na rys. 7 krzywa dolna przedstawia



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

wartość kąta reszkowego w procesie odciążania w zależności od wartości końcowego kąta skręcania  $\psi^*$ .

4. Rozpatrzmy teraz skręcanie tego samego pręta, ale wykonanego z materiału ściśliwego (dla obliczeń przyjmijmy  $\nu=0,3$ ). Jak widać [por. (6)] dla tak postawionego problemu otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 \frac{r'}{r} &= \frac{1}{B} \frac{\tau_1 \dot{\tau}_1 + \tau_3 \dot{\tau}_3 + \tau \dot{\tau} + \frac{1}{2} (\tau_1 \dot{\tau}_3 + \tau_3 \dot{\tau}_1)}{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 + \tau^2} \tau_1 + \frac{\dot{\tau}_1}{2G} - \frac{p}{K}, \\
 \frac{r'}{r} &= \frac{1}{B} \frac{\tau_1 \dot{\tau}_1 + \tau_3 \dot{\tau}_3 + \tau \dot{\tau} + \frac{1}{2} (\tau_1 \dot{\tau}_3 + \tau_3 \dot{\tau}_1)}{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 + \tau^2} (-\tau_1 - \tau_3) - \frac{\dot{\tau}_1 + \tau_3 + \tau_r}{2G} - \frac{\dot{p}}{K}, \\
 (12) \quad \frac{1}{2} \frac{r'}{r} &= \frac{1}{B} \frac{\tau_1 \dot{\tau}_1 + \tau_3 \dot{\tau}_3 + \tau \dot{\tau} + \frac{1}{2} (\tau_1 \dot{\tau}_3 + \tau_3 \dot{\tau}_1)}{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 + \tau^2} \tau + \frac{\dot{\tau} + \frac{1}{2} (-\tau_1 - 2\tau_3)_r}{2G}, \\
 0 &= \frac{1}{B} \frac{\tau_1 \dot{\tau}_1 + \tau_3 \dot{\tau}_3 + \tau \dot{\tau} + \frac{1}{2} (\tau_1 \dot{\tau}_3 + \tau_3 \dot{\tau}_1)}{\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2 + \tau^2} \tau_3 + \frac{\dot{\tau}_3 + \tau_r}{2G} - \frac{\dot{p}}{K}, \\
 p' &= \tau_1' + \frac{2\tau_1 + \tau_3}{r}
 \end{aligned}$$

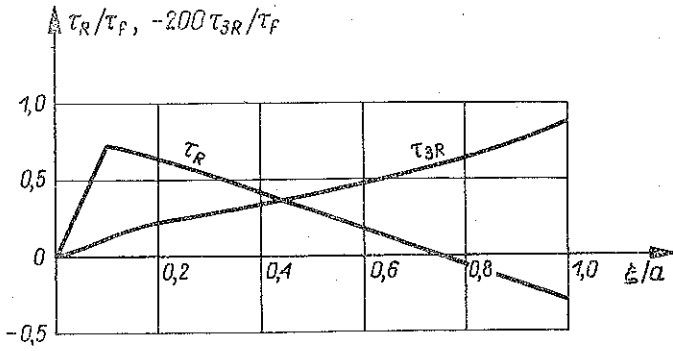
dla niewiadomych  $\tau_1, \tau_3, \tau, p, r$ .

Powyższe równania, opisujące proces sprężysto-plastycznego skręcania, nawet dla samego zakresu sprężystego nie dają się już rozdzielić na układy równań różniczkowych zwyczajnych. Nie możemy dla tego układu równań zastosować metody numerycznej, w szczególności takiej jak poprzednio. Dlatego zgodnie z intuicją, opartą zresztą na wynikach dla materiału nieściśliwego, przyjmijmy, że

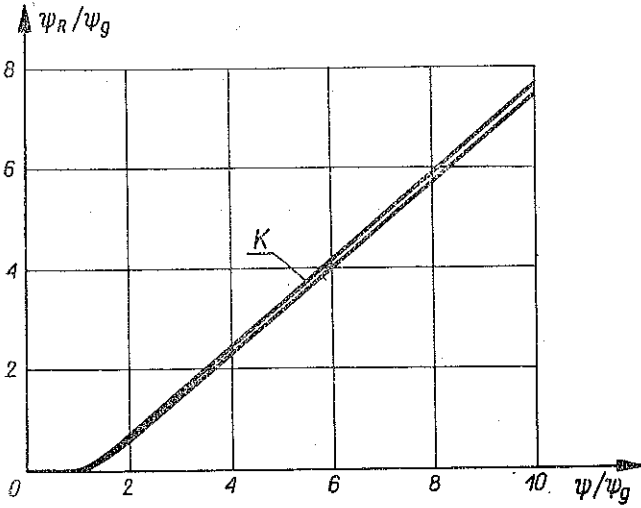
$$(13) \quad \tau_1, \tau_3 \ll \tau.$$

Przyjmując jednocześnie  $B = \infty$  możemy w sposób przybliżony dokonać całkowania układu równań (12). Otrzymujemy następujący rezultat [8]:

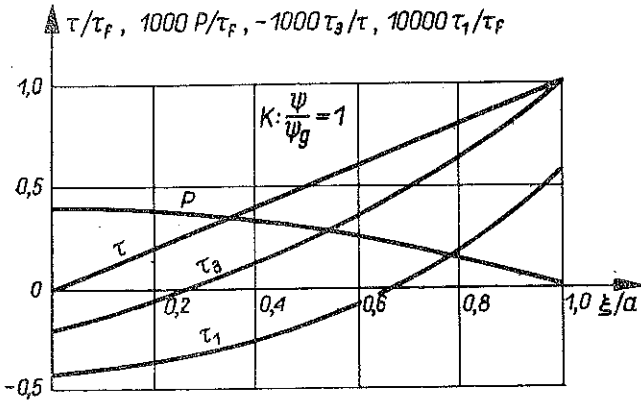
$$\begin{aligned}
 r &= \xi \left( 1 - \frac{\tau_1}{2G} - \frac{2p}{K} \right), \quad \tau = G\psi\xi, \\
 \tau_1 &= \frac{5}{8} \frac{G^2}{K+4G} \psi^2 \xi^2 - \frac{G(5G^2+2KG)}{8(K+G)(K+4G)} \psi^2 a^2, \\
 (14) \quad \tau_3 &= \frac{G(5G^2+2KG)}{4(K+G)(K+4G)} \psi^2 a^2 - \frac{5G^2+KG}{2(K+4G)} \psi^2 \xi^2, \\
 p &= \frac{K(5G^2+2KG)}{(K+G)(K+4G)8} \psi^2 a^2 - \frac{KG}{4(K+4G)} \psi^2 \xi^2.
 \end{aligned}$$



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Podobnie jak poprzednio zwiększanie kąta skręcania prowadzi do wzrostu wszystkich składowych tensora naprężenia i zmniejszania się średnicy pręta; stan ten trwa do momentu, w którym  $\psi = \psi_g$  [ta sama zależność (9) co i dla materiału nieściśliwego]. Dla tej wartości kąta skręcania stan naprężenia w przekroju poprzecznym pręta pokazany jest na rys. 8 (wyniki opisujące materiał ściśliwy oznaczone są na wszystkich rysunkach literą  $K$ ). Dalsze zwiększanie kąta skręcania powoduje przesuwanie się granicy sprężysto-plastycznej w głąb pręta, a zachowanie się materiału opisane jest teraz równaniami (12). Do ich rozwiązania nie wystarczy już tylko założenie, że  $\tau \gg \tau_1, \tau_3$ . Ponieważ rozpatrywany przez nas stan sprężysto-plastyczny odpowiada niewielkim wartościom kąta skręcania,  $\psi^* \ll 1$  [por. (9)], przeto przyjmiemy, że poszukiwane wielkości opisane są funkcjami typu  $y_i = \alpha_i \psi^2 \xi^2$ , z wyjątkiem  $r = \xi (1 + \alpha_1 \psi^2 \xi^2)$  oraz  $\tau = \alpha_2 \psi \xi$ . Otrzymujemy teraz z równań (12) rozwiązanie zamknięte, w następującej postaci:

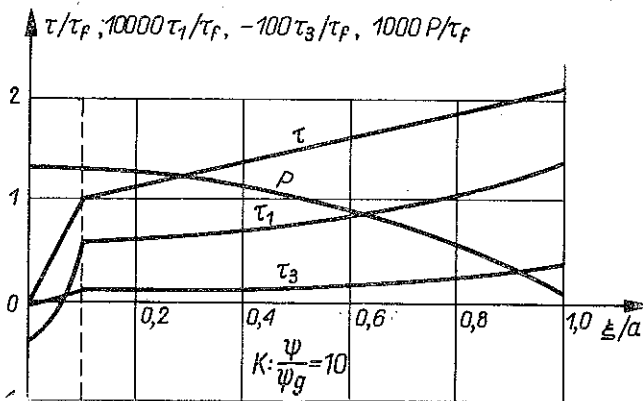
$$r = \xi \left( 1 - \frac{\tau_{1g}}{2G} - \frac{2p_g}{K} \right) \left[ 1 + \frac{G+B}{2GB} (\tau_{1g} - \tau_1) + \frac{2}{K} (p_g - p) \right],$$

$$\tau = \frac{BG}{2G+B} \psi \xi + K_2,$$

$$(15) \quad \tau_1 = \frac{5}{2} \frac{B^3 G^2}{(B+G)(2G+B)[16GB+4K(B+G)]} \psi^2 \xi^2 + K_3,$$

$$\tau_3 = - \left( \frac{10BG}{K(B+G)} + 2 \right) \frac{B^2 GK}{(2G+B)[16GB+4K(B+G)]} \psi^2 \xi^2 + K_4,$$

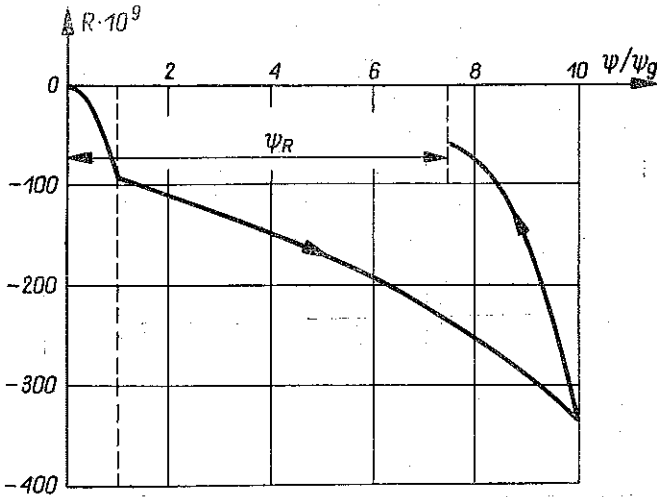
$$p = - \frac{B^2 GK}{(2G+B)[16GB+4K(B+G)]} \psi^2 \xi^2 + K_5,$$



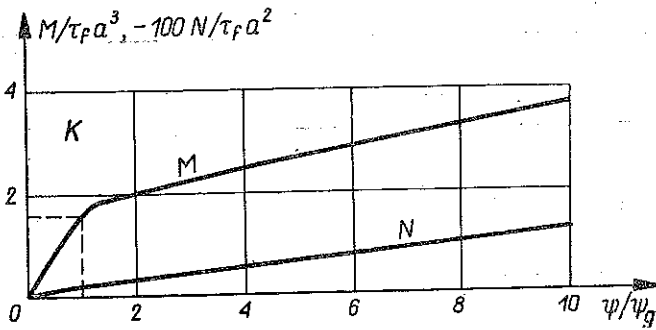
Rys. 9

gdzie  $K_2, \dots, K_5$  są stałymi wynikającymi z granicznego stanu sprężystego; np. dla kąta skręcania  $\psi^* = 10\psi_g$  otrzymujemy z (15) rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym pręta (rys. 9). Równanie (15)<sub>1</sub> opisuje zmianę wartości promienia kołowego

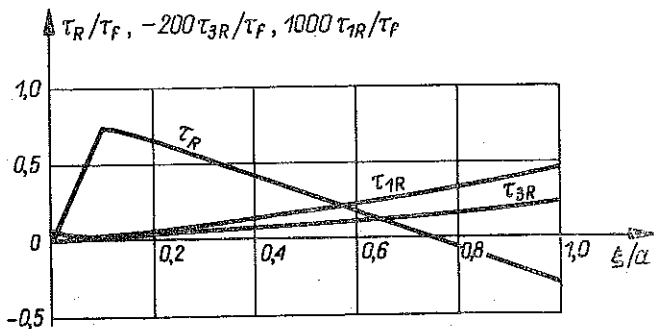
przekroju. I tak np. dla  $\xi = a$  mamy zmianę promienia zewnętrznego, która za pośrednictwem wartości  $R = r/a - 1$  przedstawiona jest na rys. 10. Całkując  $\tau$  i  $(\tau_3 - p)$  po obszarze przekroju poprzecznego pręta otrzymujemy odpowiednio moment skręcający  $M$  i siłę podłużną  $N$ ; ich wykres, w zależności od zmieniającego się kąta skręcania  $\psi$ , przedstawiony jest na rys. 11.



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Proces odciążania pręta skróconego uprzednio do wartości  $\psi^*$  opisujemy podobnie jak w poprzednim przypadku. W szczególności jeśli porównamy równania (14) i (8), to widać, że resztkowy kąt skręcania  $\psi_R$ , jak również naprężenia resztkowe  $\tau_R$  są dane odpowiednio wzorami (10) i (11). Na rys. 12 przedstawiony jest rozkład naprężeń resztkowych w przekroju poprzecznym pręta dla pełnego odciążenia ( $M=0$ ). Na rys. 7 górna krzywa przedstawia wartość kąta resztkowego w procesie odciążania w zależności od wartości  $\psi^*$ . Zmiana promienia w procesie odciążania jest następująca:

$$(16) \quad r_R = \xi \left[ 1 - \alpha^*(\xi, \psi) \right] \left[ 1 + \frac{1}{2G} (\tau_1 - \tau_1) + \frac{2}{K} (p^* - p) \right],$$

gdzie  $\alpha^*(\xi, \psi)$  obliczamy oczywiście z (15)<sub>1</sub>. Jeżeli w (16) przyjmiemy  $\xi = a$ , to otrzymamy zmianę promienia zewnętrznego pręta. Wykres tej funkcji w procesie odciążania przedstawiony jest na rys. 10.

5. Na zakończenie naszych rozważań należy jeszcze raz podkreślić następujące fakty. Przy ograniczeniu się tylko do sztywno-plastycznych materiałów, jak np. w pracy [3], otrzymuje się jako jedyne naprężenie — naprężenie ścinające  $\tau$ . Pozostałe składowe dewiatora są równe zeru. Znika przy tym również ciśnienie hydrostatyczne, czyli wszystkie składowe normalne tensora naprężeń. Wprowadzenie do rozważań modelu sprężysto-plastycznego dla materiału nieściśliwego, jak np. w pracy [6], pozwala na znalezienie następnych składowych dewiatora naprężeń  $\tau_3, \tau_2, \tau_1$  (przy czym  $\tau_1 \equiv 0$ ) i ciśnienia hydrostatycznego  $p$  oraz naprężeń resztkowych po odciążeniu. Przyjęcie natomiast modelu sprężysto-plastycznego dla materiału ściśliwego pozwala jak widać poza tym na obliczenie wartości składowej dewiatora naprężeń  $\tau_1$  i zmiany średnicy pręta.

Autor dziękuje KL. THERMANNOWI za wnikliwe uwagi, które pomogły w opracowaniu tego zagadnienia.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. S. RIVLIN, *Large elastic deformations of isotropic materials*, Phil. Trans., A 240/41, (1948), 379/491;
2. O. WETZEL, *Beitrag zur Theorie der elastischen Torsion des Vollzylinders bei endlichen Formänderungen*, Rozprawa doktorska (Dissertation), TH Hannover 1965.
3. W. PREUSS, *Beitrag zur Theorie der plastischen Torsion des Vollzylinders mit isotroper Werkstoffverfestigung bei endlichen Formänderungen*, Rozprawa doktorska (Dissertation), TH Hannover 1967.
4. CH. HARTUNG, *Vergleich zweier Formänderungsgesetze für plastische Werkstoffe mit isotroper Werkstoffverfestigung unter Zug- Druck- und Schubbeanspruchung bei endlichen Formänderungen*, Rozprawa doktorska (Dissertation), TH Hannover 1968.
5. CHR. CLAVOUT, *Welle und Rohr aus starrplastischen Material unter Zug und Torsion*, Rozprawa doktorska (Dissertation) TH Zürich 1959.
6. KL. THERMANN, *Zur elasto-plastischen Torsion kreiszylindrischer Körper bei endlichen Verzerungen*, Rozprawa doktorska (Dissertation) TH Hannover 1969.

7. TH. LEHMANN, *On large elastic-plastic deformations* (Referat na Międzynarodowym Sympozjum Teorii Plastyczności, Warszawa 30.VIII—2.IX.1972).
8. TH. LEHMANN, *Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik*, *Ingenieur-Archiv*, 29 (1960), 316/330.

## Резюме

**ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

В данной работе рассматривается задача об упруго-пластическом кручении стержня с изменением геометрических размеров: длины и диаметра. Исходя из приближенного определяющего уравнения изучены распределения напряжений в поперечном сечении стержня из несжимаемого и сжимаемого материалов при нагружении и разгрузке.

## SUMMARY

**A CONTRIBUTION TO THE PROBLEM OF ELASTIC-PLASTIC TORSION OF RODS IN THE DOMAIN OF FINITE DEFORMATIONS**

In the paper is considered the problem of elastic-plastic torsion of a rod on the basis of the geometry which takes into account the changes of the length and diameter of the rod. Using the approximate constitutive equations, the distribution of stresses in the cross-sectional area of the rod is shown, in the cases of compressible and incompressible materials and for loading and unloading processes.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 stycznia 1972 r.*