

## DRGANIA SWOBODNE LEPKOSPĘŻYSTEJ BELKI TIMOSHENKI I TARCZY

WACŁAW SZCZEŚNIAK (WARSZAWA)

W pracy przeanalizowano drgania swobodne belki lepkospężystej, której materiał odpowiada reologicznemu modelowi ciała lepkospężystego typu standardowego Voigta i Maxwella. Uwzględniono wpływ bezwładności obrotowej i wpływ siły poprzecznej na przemieszczenia. Dla belki typu Voigta i Maxwella równania opisujące drgania doprowadzają się do jednego równania, które różni się jednak od równania bifalowego. Wyznaczono częstości drgań swobodnych dla belki Voigta i przeprowadzono jej analizę. W drugiej części pracy wyznaczono częstość drgań lepkospężystej tarczy swobodnie podpartej. Zastosowano funkcję przemieszczeń, tzw. funkcję rozwiązującą. Okazało się, że równanie dynamicznej równowagi doprowadza się w tym przypadku dokładnie do równania bifalowego. Ma ono jednak czynnik dysypujący, powodujący zanikanie amplitud fal dylatacyjnej, dystorsyjnej i powierzchniowej.

### 1. WSTĘP I SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

W pracy rozpatruje się belki i tarcze z materiału lepkospężystego typu standardowego Voigta lub Maxwella. W przypadku drgań swobodnych pręta uwzględnia się bezwładność obrotową przekroju i wpływ sił poprzecznych na ugięcia. Równanie różniczkowe drgającego pręta wyprowadzono zakładając model reologiczny materiału w postaci standardowej. Pokazano przejścia graniczne na modelu Voigta i Maxwella. W przypadku drgań swobodnych tarczy zastosowano dynamiczną funkcję przemieszczeń Galerkiną wzorując się na pracach [1 i 2]. Wykazano, że w tym przypadku równanie drgań jest równaniem bifalowym. Znalaziono częstość drgań własnych dla tarczy swobodnie podpartej. Wpływ sił poprzecznych i bezwładności obrotowej przekroju dla belek sprężystych był rozpatrywany w szeregu prac [3 – 21]. Mniej znane są jednak prace, w których wpływ ten występowałby jednocześnie z tłumieniem wewnętrznym materiału. Jeszcze mniej prac istnieje z zakresu drgań tarcz lepkospężystych.

W opracowaniu nie korzysta się z analogii sprężysto-lepkospężystej [24 – 29], która w przypadku drgań swobodnych ze względu na podawanie tzw. uzupełniających warunków początkowych jest niecelowa [34].

### 2. DRGANIA LEPKOSPĘŻYSTEJ BELKI Z UWZGLĘDNIENIEM BEZWŁADNOŚCI OBROTOWEJ I WPLYWEM SIŁ POPRZECZNYCH NA PRZEMIESZCZENIA

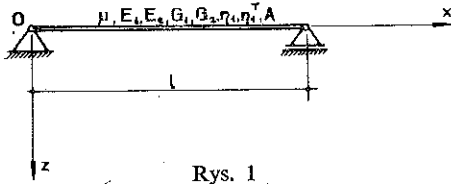
Rozpatrzmy drgania belki swobodnie podpartej (rys. 1) o przekroju prostokątnym, której materiał odpowiada modelowi ciała fizycznego typu standardowego (rys. 2a).

Jak wiadomo [8 i 20] dla tego modelu mamy zależność

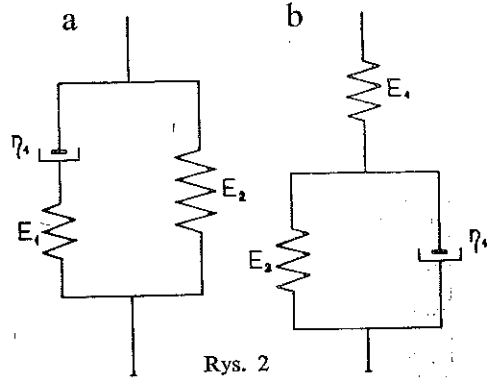
$$(2.1) \quad L_1 \sigma_x + L_2 \dot{\sigma}_x = L_3 \varepsilon_x + L_4 \dot{\varepsilon}_x, \quad \bar{L}_1 \tau_{xz} + \bar{L}_2 \dot{\tau}_{xz} = \bar{L}_3 \gamma_{xz} + \bar{L}_4 \dot{\gamma}_{xz}. \quad (1)$$

W równaniach (2.1) zastosowano oznaczenia:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} L_1 &= E_1, & L_3 &= E_1 E_2, & \bar{L}_1 &= G_1, & \bar{L}_3 &= G_1 G_2, \\ L_2 &= \eta_1, & L_4 &= \eta_1 (E_1 + E_2), & \bar{L}_2 &= \eta_1^T, & \bar{L}_4 &= \eta_1^T (G_1 + G_2). \end{aligned}$$



Rys. 1



Rys. 2

Do przypadku modelu pokazanego na rys. 2b również odnoszą się równania konstytutywne (2.1), jednak odpowiednie stałe materiałowe są inne:

$$(2.2') \quad \begin{aligned} L_1 &= \eta_2, & L_3 &= E_1 \eta_2, & \bar{L}_1 &= \eta_2^T, & \bar{L}_3 &= G_1 \eta_2^T, \\ L_2 &= (E_1 + E_2) \eta_2, & L_4 &= E_1 E_2, & \bar{L}_2 &= (G_1 + G_2) \eta_2^T, & \bar{L}_4 &= G_1 G_2. \end{aligned}$$

«W ustrojach prętowych i płytowych pomija się z reguły wpływ sił poprzecznych na ugięcia. Jedynie w przypadku krępych prętów lub płyt grubych wpływ ten jest większy i należy go uwzględnić w obliczeniach».

Wykaz literatury do r. 1964, poświęconej drganiom takich belek, można znaleźć w [10]. «Podstawą klasycznej teorii prętów cienkich jest założenie Bernoulliego-Naviera, natury geometrycznej o płaskich przekrojach. Punktem wyjścia niniejszych rozważań będzie również założenie geometryczne. Założenie to dotyczy będzie kształtu przekroju poprzecznego belki po odkształceniu. Kształt ten dobierzemy w ten sposób, aby znaleziony na podstawie założonego pola przemieszczeń stan naprężenia spełniał określone warunki statyczne». (2) Ta droga postępowania jest znana [23, 8 i 22].

Rzuty przemieszczenia dowolnego punktu pręta o współrzędnych  $x, z$  określone są (rys. 2) następująco:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} w &= w(x, t), \\ u &= -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \psi(x, t) f(z), \end{aligned}$$

(1) Zastosowanie związków konstytutywnych (2.1) wymaga komentarza. W opracowaniu nie stosuje się rozdziału tensorów naprężenia i odkształcenia na część skośnosymetryczną i kulistą. Równania równowagi są tu spełnione w sposób całkowity przy założeniu jednoosiowego stanu naprężenia. Podejście takie stosuje się w technicznej teorii drgań [30 - 33].

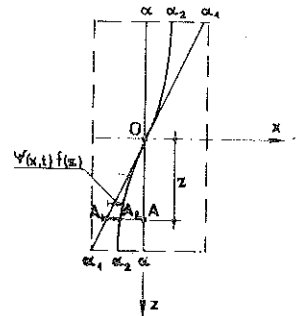
(2) Cytaty pochodzą z monografii Z. KĄCZKOWSKIEGO [23] s. 73.

gdzie  $\psi(x, t)$  oznacza średni kąt odkształcenia postaciowego w przekroju oraz  $f(z)$  zmienność kąta odkształcenia postaciowego po wysokości przekroju poprzecznego pręta.

W przypadku ciała sprężystego naprężenie normalne  $\sigma_x$  i styczne  $\tau_{xz}$  w przekroju pręta określone są następująco:

$$(2.4) \quad \sigma_x = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = E \left( -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} f(z) \right),$$

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) = G \psi(x, t) f'(z).$$



Rys. 3

Z drugiej strony naprężenie  $\tau_{xz}$  wyraża się znanym wzorem

$$(2.5) \quad \tau_{xz} = \frac{T(x) S_x(z)}{I(x) b},$$

gdzie  $T(x)$  oznacza siłę poprzeczną,  $I(x)$  moment bezwładności przekroju pręta,  $S_x(z)$  moment statyczny,  $A(x)$  pole przekroju poprzecznego pręta oraz  $b$  szerokość przekroju.

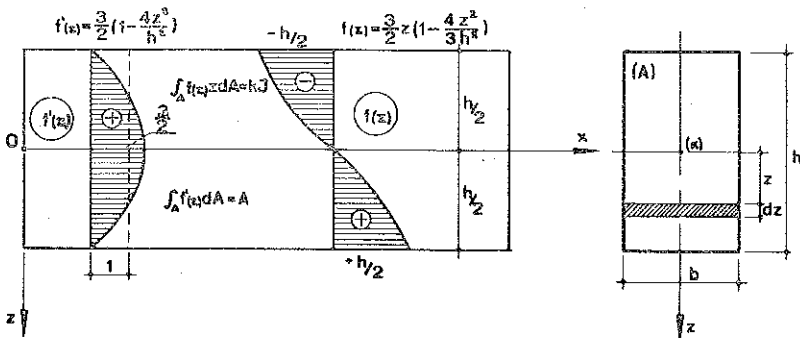
Wzory (2.4) i (2.5) określają jednoznacznie naprężenia styczne, jeżeli

$$(2.6) \quad f'(z) = \frac{A(x) S_x(z)}{I(x) b}.$$

Dla przekroju prostokątnego funkcje  $f'(z)$  i  $f(z)$  są określone wzorami

$$(2.7) \quad f'(z) = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right),$$

$$f(z) = \frac{3}{2} z \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right).$$



Rys. 4

Wykres tych funkcji pokazano na rys. 4. Jak łatwo sprawdzić, mają one ciekawe własności:

$$(2.8) \quad \int_A f'(z) dA = A, \quad \int_A f(z) z dA = kI_x, \quad k = \frac{6}{5}.$$

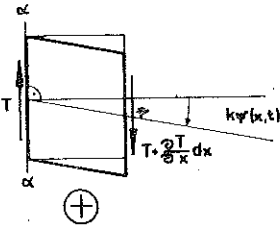
Moment zginający i siłę poprzeczną w przekroju belki sprężystej określają wzory:

$$(2.9) \quad M_x = \int_A \sigma_x z dA, \quad T_x = \int_A \tau_{xz} dA;$$

$$M_x = EI_x \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -EI_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$

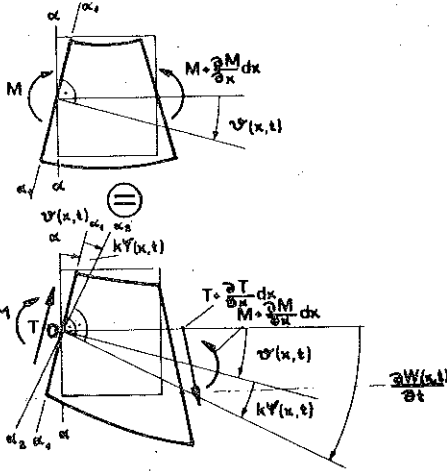
$$T_x = GA\psi.$$

W przypadku belki lepkosprężystej wzory (2.9)<sub>3,4</sub> są następujące:



$$(2.10) \quad L_1 M_x + L_2 \frac{\partial M_x}{\partial t} = -L_3 I_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - L_4 I_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial t},$$

$$L_1 T_x + L_2 \frac{\partial T_x}{\partial t} = L_3 A \psi + L_4 A \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$



W równaniach (2.9) i (2.10) wprowadzono kąt  $\vartheta_x$  obrotu przekroju belki od samego momentu zginającego. Zgodnie z rys. 5 można zapisać prostą zależność geometryczną:

$$(2.11) \quad \vartheta(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - k\psi(x, t).$$

Z kolei zgodnie z rys. 6, rozpatrując równowagę dynamiczną nieskończenie małego elementu pręta o polu przekroju  $A$ , długości  $dx$ , wysokości  $h$ , drgającego poprzecznie — możemy napisać równania zachowania pędu i momentu pędu:

$$(2.12) \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} dx - \rho A \ddot{w} dx = -p(x, t) dx,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx - T_x dx - \rho dx \int_A \ddot{u} z dA = 0.$$

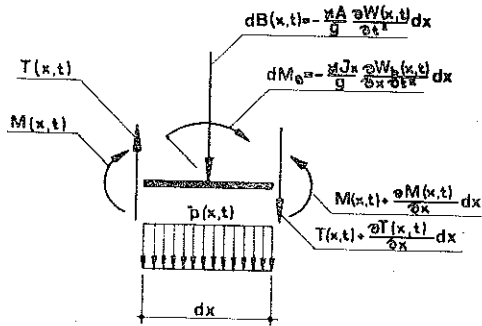
gdzie  $M_B = \rho I_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} dx = -\rho dx \int_A \ddot{u} z dA.$

Ostatecznie otrzymaliśmy pięć równań (2.10), (2.11) i (2.12). W równaniach tych występuje pięć niewiadomych:  $w(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$ ,  $\vartheta(x, t)$ ,  $M_x$ ,  $T_x$ . Układ (2.10),

(2.11) i (2.12) daję się doprowadzić do dwu równań z dwiema niewiadomymi  $w(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$  lub  $w(x, t)$  i  $\vartheta(x, t)$ . Oto te równania:

$$(2.13) \quad \left( L_1 + \frac{\partial}{\partial t} L_2 \right) \left[ p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \rho I_x \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho k I_x \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x \partial t^2} \right] - \left( L_3 + \frac{\partial}{\partial t} L_4 \right) I_x \left( \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - k \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0$$

$$\left( \bar{L}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_2 \right) \left[ p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right] + \left( \bar{L}_3 + \frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_4 \right) A \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = 0$$



Rys. 6

lub

$$(2.13') \quad \left( L_1 + \frac{\partial}{\partial t} L_2 \right) \left[ p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \rho I_x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} \right) \right] - I_x \left( L_3 + \frac{\partial}{\partial t} L_4 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} \right) = 0$$

$$\left( \bar{L}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_2 \right) \left( p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right) + A \left( \bar{L}_3 + \frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_4 \right) \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} \right) \frac{1}{k} = 0$$

W przypadku drgań swobodnych dla układu (2.13) należy przyjąć

$$(2.14) \quad p(x, t) \equiv 0, \quad w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-i\omega_m t} \sin \alpha_m x,$$

$$\psi(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-i\omega_m t} \cos \alpha_m x, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{l}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Po podstawieniu (2.14) do (2.13) otrzymamy równanie dla układu równań jednorodnych:

$$(2.15) \quad \begin{bmatrix} (L_1 - i\omega_m L_2) \omega_m^2 \rho (A + I_x \alpha_m^2) - (L_3 - i\omega_m L_4) I_x \alpha_m^4 & \\ & (L_1 - i\omega_m L_2) (-\rho k I_x \omega_m^2) + (L_3 - i\omega_m L_4) k I_x \alpha_m^2 \\ (\bar{L}_1 - \omega_m \bar{L}_2) \rho \omega_m^2 & -(\bar{L}_3 - i\omega_m \bar{L}_4) \end{bmatrix} = 0,$$

Równanie częstości drgań swobodnych ma postać

$$(2.16) \quad \bar{A}\omega_m^6 + i\bar{B}\omega_m^5 + \bar{C}\omega_m^4 + i\bar{D}\omega_m^3 + \bar{E}\omega_m^2 + i\bar{F}\omega_m + \bar{G} = 0.$$

W równaniu (2.16) wprowadzono oznaczenia:

$$\bar{A} = \rho^2 k I_x L_2 \bar{L}_2,$$

$$\bar{B} = \rho^2 k I_x (L_1 \bar{L}_2 + \bar{L}_1 L_2),$$

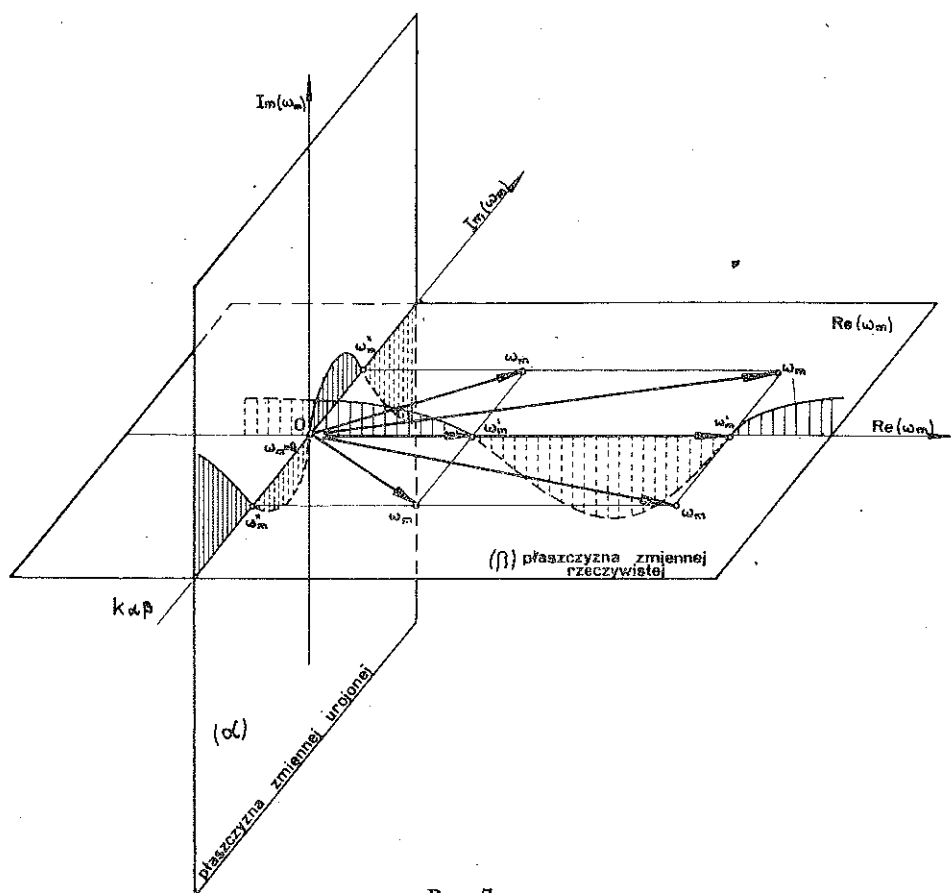
$$\bar{C} = -L_2 \bar{L}_4 (A + I_x \alpha_m) \rho - \rho^2 k I_x L_1 \bar{L}_1 - \bar{L}_2 L_4 \rho k I_x \alpha_m^2,$$

$$\bar{D} = -(L_1 \bar{L}_4 + \bar{L}_3 L_2) \rho (A + I_x \alpha_m) - (\bar{L}_1 L_3 + \bar{L}_2 L_3) k I_x \alpha_m^2,$$

$$\bar{E} = L_1 \bar{L}_3 \rho (A + I_x \alpha_m^2) + L_4 \bar{L}_4 I_x \alpha_m^4 + \bar{L}_1 L_3 \rho k I_x \alpha_m^2,$$

$$\bar{F} = I_x \alpha_m^4 (L_3 \bar{L}_4 + L_3 L_4),$$

$$\bar{G} = -L_3 \bar{L}_3 I_x \alpha_m^4.$$



Rys. 7

Równanie (2.16) daje się rozwiązać w każdym konkretnym przypadku; stałe  $\bar{A}-\bar{G}$  są liczbami rzeczywistymi.

Na rys. 7 podano interpretację geometryczną rozwiązania równania tego typu. Pierwiastki równania (2.16) powinny być zespolone, sprzężone  $\omega_m = \omega'_m \pm i\omega''_m$  lub rzeczywiste  $\omega_m = \omega'_m$ . Ogólne rozwiązanie równania częstości dla modelu Voigta podamy w następnym punkcie.

### 3. DRGANIA PRĘTA IDEALNIE SPRĘŻYSTEGO

Wykonamy przejście graniczne na równaniach (2.13) do równania opisującego drgania swobodne pręta o modelu idealnie sprężystym. W tym celu układ równań (2.13) podzielimy odpowiednio przez  $L_2$  i  $\bar{L}_2$ , a następnie założymy, że  $\eta_1 \rightarrow \infty$  i  $\eta_1^T \rightarrow \infty$  oraz  $E_1 + E_2 = E$  i  $G_1 + G_2 = G$ . W wyniku otrzymamy układ dwu równań, które sprowadzają się do jednego równania

$$(3.1) \quad EI_x \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \rho I_x \left( 1 + \frac{kE}{G} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{kI_x \rho^2}{G} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} = \\ = p(x, t) + \frac{I_x k \rho}{AG} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{EI_x k}{AG} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}.$$

Jeżeli wprowadzić oznaczenia  $v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  i  $v_2 = \sqrt{\frac{G}{k\rho}}$ , to równanie (3.1) można napisać w postaci

$$(3.2) \quad \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{v_1^2 v_2^2} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} + \frac{A}{v_1^2 I_x} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{p(x, t)}{EI_x} + \frac{1}{A \rho v_1^2 v_2^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{k}{GA} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}.$$

Równanie to można również przedstawić inaczej:

$$(3.3) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w(x, t) + \frac{A}{v_1^2 I_x} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{p(x, t)}{EI_x} + \\ + \frac{1}{A \rho v_1^2 v_2^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{k}{GA} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}.$$

Równanie (3.3) nosi nazwę tzw. «równania falowego» belki idealnie sprężystej.

### 4. DRGANIA SWOBODNE BELKI Z MATERIAŁU LEPKOSPĘRZYSTEJ VOIGTA

Jeżeli założymy, że  $E_1 \rightarrow \infty$  i  $G \rightarrow \infty$ , to układ równań (2.13) przedstawia się następująco:

$$(4.1) \quad -\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \rho I_x \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} - k I_x \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x \partial t^2} + \\ + p(x, t) - E_2 I_x \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - k \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x^3} = 0, \\ p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + G_2 \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) A \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Wprowadzimy oznaczenia  $G_2 = G$ ,  $E_2 = E$  oraz założymy, że

$$(4.2) \quad \frac{\eta_1^T}{G} = \frac{\eta_1}{E} = \tau.$$

Odpowiednie wzory na naprężenie i siły wewnętrzne dla tego modelu reologicznego są następujące:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= E \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_x, \\ \tau_{xz} &= G \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma_{xz}, \\ M_x &= -EI_x \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x}, \\ T_x &= GA \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(x, t), \end{aligned}$$

gdzie  $\tau$  oznacza czas opóźnienia.

Ostatecznie po doprowadzeniu układu (4.1) do jednego równania i uporządkowaniu go otrzymamy równanie równowagi dynamicznej pręta z materiału reologicznego wg Voigta:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} EI_x \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \\ - \rho I_x \left( 1 + \frac{kE}{G} \right) \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 k I_x}{G} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} = \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) p(x, t) - \\ - \frac{EI_x k}{GA} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\rho k I_x}{GA} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Pomińmy w równaniu (4.4) wpływ ścinania na odkształcenia belki; w tym celu założymy, że  $G \rightarrow \infty$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} EI_x \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \\ - I_x \rho \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) p(x, t). \end{aligned}$$

Po obniżeniu rzędu równania różniczkowego otrzymamy

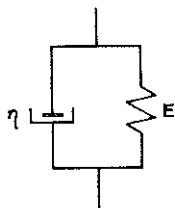
$$(4.6) \quad EI_x \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - I_x \rho \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} = p(x, t).$$

Równanie (4.6) jest rozszerzonym na lepkosprężystość równaniem Rayleigha.

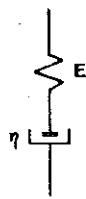


Po pominięciu bezwładności obrotowej w równaniu (4.6) otrzymamy zwykłe równanie drgań poprzecznych belki Voigta:

$$(4.7) \quad EI_x \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t).$$



Rys. 8



Rys. 9

Równanie (4.4) można napisać inaczej po uwzględnieniu wzorów na prędkości fali podłużnej i poprzecznej:

$$(4.8) \quad \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{v_1^2 v_2^2} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} + \frac{A}{v_1^2 I_x} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) p(x, t) + \frac{1}{A \rho v_1^2 v_2^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{k}{GA} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}.$$

Równanie (4.8) po zwinięciu części falowej ma postać

$$(4.9) \quad \left[ \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[ \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w(x, t) + \frac{A}{v_1^2 I_x} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{p(x, t)}{EI_x} + \frac{1}{A \rho v_1^2 v_2^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{k}{GA} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}.$$

Rozpatrzmy teraz drgania swobodne belki Voigta. Założenie, że rozwiązanie ma postać

$$(4.10) \quad w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-i\omega_m t} \sin \frac{m\pi x}{l},$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{l}, \quad m=1, 2, 3, \dots, \quad p(x, t) \equiv 0,$$

doprowadza do równania częstości drgań swobodnych:

$$(4.11) \quad \bar{A}\omega_m^4 + \bar{B}i\omega_m^3 + \bar{C}\omega_m^2 + \bar{D}i\omega_m + \bar{E} = 0.$$

W równaniu (4.11) stałe  $A-E$  są liczbami rzeczywistymi:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\rho^2 k I_x}{G}, & \bar{D} &= -2EI_x \alpha_m^4 \tau, & \bar{B} &= \rho A \tau + I_x \rho \alpha_m^2 \tau \left(1 + \frac{kE}{G}\right), \\ \bar{E} &= \alpha_m^4 EI_x, & \bar{C} &= -\rho A - \rho I_x \alpha_m^2 \left(1 + \frac{kE}{G}\right) - EI_x \alpha_m^4 \tau^2. \end{aligned}$$

Założymy, że rozwiązanie równania (4.11) można przedstawić w postaci liczby zespolonej:

$$(4.13) \quad \omega_m = \omega_1 + i\omega_2.$$

Dla górnego znaku w wyniku podstawienia (4.13) do (4.11) otrzymuje się układ dwu równań:

$$(4.13') \quad \begin{aligned} \bar{A}(\omega_1^4 - 6\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^4) + \bar{B}(3\omega_1^2 \omega_2 - \omega_2^3) + \bar{C}(\omega_1^2 - \omega_2^2) + \bar{D}\omega_2 + \bar{E} &= 0, \\ 4\bar{A}(\omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_2^4) + \bar{B}(-\omega_1^2 \omega_2 + 3\omega_2^3) + 2\bar{C}_1 \omega_2^2 - \bar{D}\omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem drugiego równania jest  $\omega_2 = 0$ . Zatem równanie częstości drgań swobodnych jest następujące:

$$(4.14) \quad \bar{A}\omega_m^4 + \bar{C}\omega_m^2 + \bar{E} = 0^{(3)}.$$

Rozwiązanie równania (4.14) doprowadza do wzoru na częstość drgań swobodnych lepkosprężystej belki Voigta. Zauważmy, że po wprowadzeniu prędkości fali podłużnej i poprzecznej równanie drgań swobodnych ma postać:

$$(4.15) \quad \frac{\omega_m^4}{v_1^2 v_2^2} - \left[ K + \alpha_m^2 \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) + \alpha_m^4 \tau^2 \right] \omega_m^4 + \alpha_m^4 = 0,$$

gdzie  $K = \rho A / EI_x$ .

Częstości drgań są następujące:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \omega_{m1/2} &= \\ &= \frac{v_1 v_2 \alpha_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{K}{\alpha_m^2} + \alpha_m^2 \tau^2 \right) \pm \sqrt{\left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{K}{\alpha_m^2} + \alpha_m^2 \tau^2 \right)^2 - \frac{4}{v_1^2 v_2^2}}}. \end{aligned}$$

W przypadku pominięcia tłumienia należy we wzorze (4.16) przyjąć  $\tau = 0$ . Wówczas równanie (4.16) przechodzi w rozwiązanie równania jednorodnego (3.3).

Zauważmy dodatkowo, że jeżeli przyjąć w równaniu (4.15)  $v_1 \rightarrow \infty$  i  $v_2 \rightarrow \infty$  to otrzymamy

$$(4.17) \quad \omega_m^2 (K + \alpha_m^4 \tau^2) = \alpha_m^4.$$

Z równania (4.17) wynika, że

$$(4.18) \quad \omega_m^2 = \frac{EI}{\bar{m}} \alpha_m^4 \frac{1}{1 + \tau^2 \omega_m^2}.$$

<sup>(3)</sup> Równanie (4.14) jest pierwszym przybliżeniem równania (4.11). W związku z powyższym wzór (4.16) jest rozwiązaniem przybliżonym.

Wzór (4.18) różni się od klasycznego wzoru dla częstości swobodnej pręta lepkospřżystego

$$(4.19) \quad \omega_m^2 = \frac{EI_x}{\bar{m}} \alpha_m^4 \left( 1 - \frac{\omega_m^2 \tau^2}{4} \right).$$

Dla  $\tau=0$  oba wzory (4.18) i (4.19) są identyczne.

## 5. DRGANIA SWOBODNE BELKI Z MATERIAŁU LEPKOSPŘŻYSTEGO MAXWELLA

Z układu równań (2.13) można otrzymać równanie drgań poprzecznych belki z materiału reologicznego Maxwella. Należy w tym celu wykonać odpowiednie przejście graniczne, mianowicie założyć, że  $E_2=0$ ,  $G_2=0$ . Układ równań (2.13) przedstawi się wtedy następująco:

$$(5.1) \quad \left( E_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( -\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \rho I_x \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho k I_x \frac{\partial^3 \psi(x,t)}{\partial x \partial t^2} + p(x,t) \right) - \\ - \eta_1 EI_x \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - k \frac{\partial^3 \psi(x,t)}{\partial x^3} \right) = 0, \\ \left( G_1 + \eta_1^T \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( p(x,t) - \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \right) + \eta_1^T G_1 A \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) = 0.$$

Wprowadzimy oznaczenia  $G_1=G$ ,  $E_1=E$  oraz  $\tau=\eta_1/E=\eta_1^T/G$ . Symbol  $\tau$  oznacza teraz czas relaksacji. Po doprowadzeniu układu (5.1) do jednego równania i uporządkowaniu go otrzymamy równanie drgań poprzecznych pręta wg Maxwella:

$$(5.2) \quad \eta I_x \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\rho^2 k I_x}{\eta^T} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^3} + \rho A \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \\ - I_x \left( \rho + \frac{\eta k}{\eta^T A} \right) \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ p(x,t) + \right. \\ \left. + \frac{\rho k I_x}{A \eta^T} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{\eta k I_x}{A \eta^T} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \right].$$

Pominiemy w równaniu (5.2) wpływ lepkości; w tym celu założymy, że  $\eta \rightarrow \infty$  i  $\eta^T \rightarrow \infty$ . W ten sposób otrzymamy równanie

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ EI_x \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - I_x \rho \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = \frac{\partial}{\partial t} p(x,t),$$

które po obniżeniu rzędu jest znanym równaniem Rayleigha (4.6).

Rozpatrzmy drgania swobodne belki Maxwella. Założymy, że rozwiązanie równania jednorodnego (5.2) ma następującą postać:

$$(5.4) \quad w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-t\omega_m} \sin \alpha_m x.$$

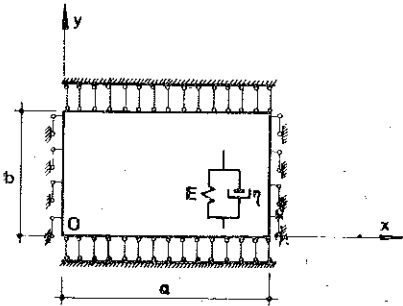


Równania geometryczne są takie same, jak w teorii sprężystości:

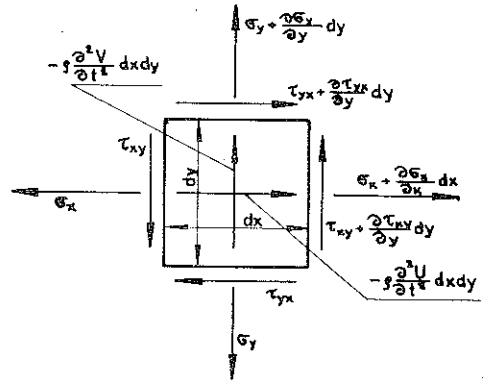
$$(6.3) \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Dynamiczne równania równowagi nieskończenie małego elementu tarczy (rys. 11) są również takie same, jak w teorii sprężystości:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + p_y(x, y, t) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}. \end{aligned}$$



Rys. 10



Rys. 11

Równania (6.4) po uwzględnieniu (6.2) i (6.3) wyrażamy przez przemieszczenia:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} L_{11} u(x, y, t) + L_{12} v(x, y, t) &= 0, \\ L_{21} u(x, y, t) + L_{22} v(x, y, t) &= \frac{p_y(x, y, t) h}{S}. \end{aligned}$$

W układzie równań (6.5) wprowadzamy następujące oznaczenia operatorów  $L_{ij}$ :

$$(6.6) \quad \begin{aligned} L_{11} &= \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \frac{\rho h}{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ L_{12} = L_{21} &= \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ L_{22} &= \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{\rho h}{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad S = \frac{Eh}{1-\nu^2}. \end{aligned}$$

Przemieszczenia  $u(x, y, t)$  i  $v(x, y, t)$  dobieramy tak, aby tożsamościowo spełniały pierwsze z równań (6.5) oraz aby spełniały równanie zgodności geometrycznej odkształceń:

$$(6.7) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Po wprowadzeniu funkcji rozwiązującej  $F(x, y, t)$  przemieszczenia  $u(x, y, t)$  i  $v(x, y, t)$  mają postać

$$(6.8) \quad \begin{aligned} u(x, y, t) &= - \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial x \partial y}, \\ v(x, y, t) &= \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \frac{\rho h}{S} \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Funkcja przemieszczeń  $F(x, y, t)$  spełnia układ równania (6.5)

$$(6.9) \quad \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} F(x, y, t) = \frac{p_y(x, y, t) h}{S}.$$

Równanie (6.9) po rozwinięciu i podstawieniu operatorów (6.6) jest następujące:

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \nabla^2 (\nabla^2 F(x, y, t)) - \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\rho h (3 - \nu)}{S(1 - \nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 F(x, y, t)) + \\ + \frac{2\rho^2 h^2}{(1 - \nu) S^2} \frac{\partial^4 F(x, y, t)}{\partial t^4} = \frac{2p_y(x, y, t) h}{S(1 - \nu)}. \end{aligned}$$

Dla  $\tau = 0$  równania (6.10) i (6.8) opisują drgania dla tarczy idealnie sprężystej.

Siły wewnętrzne w tarczy są następujące:

$$(6.11) \quad \begin{aligned} N_x = \sigma_x h &= \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \frac{S\nu(1 - \nu)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{2\rho h}{S(1 - \nu)} \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial t^2} \right] \right\}, \\ N_y = \sigma_y h &= \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \frac{S\nu(1 - \nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{2\rho h}{S(1 - \nu)} \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial t^2} \right] \right\}, \\ N_{xy} = \tau_{xy} h &= \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{S(1 - \nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial y^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\rho h}{S} \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial t^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Wprowadzimy prędkości fali dylatacyjnej:

$$(6.12) \quad v_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}},$$

gdzie  $\lambda$  oznacza stałą Lamégo, oraz prędkości fali dystorsyjnej

$$(6.13) \quad v_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}.$$

Zauważymy dodatkowo, że

$$(6.14) \quad \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} = \frac{\rho(1+\nu)(3-4\nu)}{E(1-\nu)},$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}.$$

Równanie (6.10) stanie się ściśle równaniem bifalowym, jeżeli w wyrażeniu  $\frac{\rho(3-4\nu+\nu^2)(1+\nu)}{E(1-\nu)}$  pominąć wyraz  $\nu^2$  oraz jeżeli przyjmąc  $\frac{(1-\nu)^3}{1-2\nu} \approx 1$ ; uproszczenia te wydają się uzasadnione dla  $\nu \leq 1/3$ .

Równanie (6.10) można teraz napisać w postaci

$$(6.15) \quad \left[ \nabla^2 \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[ \nabla^2 \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] F(x, y, t) = \frac{2p_y(x, y, t)h}{S(1-\nu)}.$$

W przypadku pominięcia tłumienia wewnętrznego w materiale tarczy  $\tau=0$  otrzymamy

$$(6.16) \quad \left( \nabla^2 - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \nabla^2 - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F(x, y, t) = \frac{2p_y(x, y, t)h}{S(1-\nu)}.$$

Równanie (6.10) dla przypadku pominięcia tłumienia ma postać

$$(6.17) \quad \nabla^2 \left( \nabla^2 F(x, y, t) \right) - \frac{\rho h(3-\nu)}{S(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \nabla^2 F(x, y, t) \right) +$$

$$+ \frac{2\rho^2 h^2}{(1-\nu)S^2} \frac{\partial^4 F(x, y, t)}{\partial t^4} = \frac{2p_y(x, y, t)h}{S(1-\nu)}.$$

Rozpatrzmy teraz drgania swobodne tarczy. Przeanalizujemy najprzód przypadek tarczy sprężystej. W tym celu założymy ruch harmoniczny nietłumiony:

$$(6.18) \quad \begin{aligned} u(x, y, t) &= u(x, y) \cos \omega_{m,n} t, \\ v(x, y, t) &= v(x, y) \cos \omega_{m,n} t, \quad p_y(x, y, t) \equiv 0, \\ F(x, y, t) &= F(x, y) \cos \omega_{m,n} t. \end{aligned}$$

Aby spełnić warunki brzegowe (6.1) dla tarczy swobodnie podpartej (rys. 10) należy przyjąć funkcję przemieszczeń w postaci szeregu

$$(6.19) \quad F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Podstawienie (6.18) i (6.19) do (6.17) doprowadza do równania częstości drgań swobodnych:

$$(6.20) \quad \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \pi^2 \frac{\rho h \omega_{m,n}^2 (3-\nu)}{S(1-\nu)} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + \frac{2\rho^2 h^2 \omega_{m,n}^4}{(1-\nu)S^2} = 0.$$

Pierwiastkami równania (6.20) jest częstość drgań swobodnych tarczy sprężystej:

$$\begin{aligned}
 \omega_{m,n1/2} &= \pi \sqrt{\frac{S}{\rho} \frac{(3-\nu) \pm (1+\nu)}{4} \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{h}{b}\right)^2 \right]}, \\
 \omega_{m,n1} &= \pi \sqrt{\frac{S}{\rho} \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}, \\
 \omega_{m,n2} &= \pi \sqrt{\frac{S}{\rho} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{6.21}$$

Częstości te różnią się nieznacznie między sobą, np. dla  $\nu=1/3$ ,  $\omega_1=0,577\omega_2$ .

Dla drgań tłumionych, opisanych równaniem (6.10), przewidzieć należy rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 F(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-t\omega_{m,n}}, \\
 \alpha_m &= \frac{m\pi}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{b}.
 \end{aligned}
 \tag{6.22}$$

Równanie drgań swobodnych jest następujące:

$$\bar{A}\omega_{m,n}^4 + \bar{B}i\omega_{m,n}^3 + \bar{C}\omega_{m,n}^2 + \bar{D}i\omega_{m,n} + \bar{E} = 0.
 \tag{6.23}$$

Stałe (5.6) równe są odpowiednio:

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= \frac{2\rho^2 h^2}{(1-\nu) S^2}, \\
 \bar{B} &= \frac{-\rho h (3-\nu)}{S(1-\nu)} \tau (\alpha_m^2 + \alpha_n^2), \\
 \bar{C} &= -(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \tau^2 - (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \frac{\rho h (3-\nu)}{S(1-\nu)}, \\
 \bar{D} &= -2\tau (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2, \\
 \bar{E} &= (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2.
 \end{aligned}
 \tag{6.24}$$

Częstość drgań swobodnych tłumionych

$$\bar{\omega}_{m,n1/2} = \frac{\sqrt{S^2(1-\nu) \left\{ \left[ \frac{\rho h (3-\nu)}{S(1-\nu)} + \tau^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \right] \pm \sqrt{\left[ \frac{\rho h (3-\nu)}{S(1-\nu)} + \tau^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \right]^2 - \frac{8\rho^2 h^2}{(1-\nu) S^2}} \right\}}{4\rho^2 h^2}.
 \tag{6.25}$$

Dla  $\tau=0$  wzór (6.25) przechodzi we wzór (6.21).



Podstawienie (6.22) do jednorodnego równania bifalowego (6.15) doprowadza do równania (6.23), jednak stałe (5.6) określają inne wzory:

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= \frac{1}{v_1^2 v_2^2}, \\
 \bar{B} &= \tau \left[ \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \right], \\
 \bar{C} &= - \left[ \left( \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) + \tau^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 \right], \\
 \bar{D} &= -2\tau (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2, \\
 \bar{E} &= (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2.
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

Częstość drgań swobodnych wyrazi się przez prędkość fal  $v_1$  i  $v_2$ :

$$\bar{\omega}_{m,n1,2} = \frac{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) + v_1^2 v_2^2 \tau^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 \pm \sqrt{[(v_1^2 + v_2^2)(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) + v_1^2 v_2^2 \tau^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2]^2 - 4v_1^2 v_2^2 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2}}}{2}
 \tag{6.27}$$

Dla przypadku  $\tau=0$ , równanie (6.27) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 \omega_{m,n1} &= v_1 \sqrt{\alpha_m^2 + \alpha_n^2}, \\
 \omega_{m,n2} &= v_2 \sqrt{\alpha_m^2 + \alpha_n^2}.
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

Wzór (6.28)<sub>2</sub> jest ściśle taki sam, jak wzór (6.21)<sub>3</sub>.

Wzór (6.28)<sub>1</sub> po podstawieniu (6.12) jest następujący:

$$\omega_{m,n1} = \sqrt{\frac{S(1-2\nu+\nu^2)}{\rho(1-2\nu)} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}.
 \tag{6.29}$$

Aby wzór (6.29) był identyczny ze wzorem (6.21)<sub>2</sub>, należy pominąć w (6.29) czynnik  $\nu^2$ , tj. przyjmując  $\nu^2=0$ .

## 7. WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W pracy przeanalizowano drgania swobodne belki lepkospłężystej, której materiał odpowiada reologicznemu modelowi ciała lepkospłężystego typu standardowego Voigta i Maxwella. Uwzględniono wpływ bezwładności obrotowej i wpływ siły poprzecznej na przemieszczenia. Dla belki typu Voigta i Maxwella równania opisujące drgania doprowadzają się do jednego równania, które różni się jednak od równania bifalowego. Wyznaczono część drgań swobodnych dla belki Voigta i przeprowadzono jej analizę.

W drugiej części pracy wyznaczono częstość drgań lepkosprężystej tarczy swobodnie podparte. Zastosowano funkcję przemieszczeń, tzw. funkcję rozwiązującą. Okazało się, że równanie dynamicznej równowagi doprowadza się w tym przypadku dokładnie do równania bifalowego. Ma ono jednak czynnik dysypujący, powodujący zanikanie amplitud fal: dylatacyjnej, dystorsyjnej i powierzchniowej.

## WYKAZ LITERATURY

1. Z. KĄCZKOWSKI, *Rectangular orthotropic thin plates with arbitrary boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **10**, 4, 525, 1959.
2. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, Warszawa 1957.
3. C. R. STEELE, *The finite beam with a moving load*, J. Appl. Mech., p. 111, March 1967.
4. C. R. STEELE, *The Timoshenko beam with a moving load*, J. Appl. Mech., p. 481, September 1968.
5. G. HERMANN, *Forced motions of Timoshenko beams*, J. Appl. Mech., **22**, 1, 1955.
6. R. D. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear of flexural motions of isotropic, elastic plates*, J. Appl. Mech., **18**, 1, March 1951.
7. B. BOLEY, C. C. CHAO, *Some solutions of the Timoshenko beam equations*, J. Appl. Mech., **22**, 4, December 1955.
8. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1972.
9. Z. KĄCZKOWSKI, *Vibration of a beam under a moving load*, Proc. Vibr. Probl., **4**, 4, 1963.
10. K. WILMAŃSKI, *Obciążenie dynamiczne belek. Belka Timoshenki*, Mech. Teoret. i Stos., **2**, 2, 1964.
11. Z. STOJEK, *O zastosowaniu zasady Hamiltona do wyprowadzania równań drgań giętych belki z uwzględnieniem ścinania*, Rozpr. Inżyn., **8**, 2, 1960.
12. J. LEWANDOWSKI, *Drgania tłumione pręta o zmiennej sztywności zginania*, Arch. Inż. Łądow., **17**, 2, 1971.
13. S. J. KOWALSKI, *Nieskończona belka Timoshenki uderzana prętem sprężystym*, Rozpr. Inżyn., **21**, 4, 1973.
14. W. SZCZEŚNIAK, S. BOROWIK, *Drgania belki lepkosprężystej o skończonej długości i swobodnych końcach na podłożu sprężystym wymuszone przesuującą się siłą*, Rozpr. Inżyn., **17**, 4, 1969.
15. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania wymuszone belki i płyty na podłożu odkształcalnym w zakresie lepkosprężystym pod obciążeniem ruchomym*, Rozpr. Inżyn., **20**, 3, 1972.
16. J. A. L. FLORENC, *Traveling force on a Timoshenko beam*, J. Appl. Mech., 351–358, 1965.
17. I. R. LLOYD and J. MIKLOVITZ, *Wave propagation in an elastic beam or plate on an elastic foundation*, J. Appl. Mech., 459–464, 1962.
18. L. FRYBA, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Noordhoff, Groningen, Academia, Prague 1972.
19. V. CHYBA, *Príspevek k reseni vlasniho kmitani proste uložencho prutu konstatniho prurezu*, Sbornik prací VSD, **20**, Žilina 1969.
20. A. R. RZANICYN, *Teorija potzučestí*, ILS, Moskva 1968.
21. D. RASKOČIĆ, *Własności funkcji własnych dla drgań poprzecznych belek jednorodnych z uwzględnieniem wpływu ścinania i bezwładności obrotowej*, Rozpr. Inżyn., **4**, 2, 1958.
22. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
23. S. D. PONOMARIEV, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, PWN, Warszawa 1957.
24. T. ALFREY, *Non homogeneous stresses in visco-elastic media*, Quart. Appl. Mech., **2**, 1944.
25. E. H. LEE, *Stress analysis in visco-elastic bodies*, Quart. Appl. Mech., **8**, 2, 1955.
26. *Rheology* pod red. F. R. EIRICHA, praca T. ALFREY'Ą, E. F. GURNI — tłumaczenie rosyjskie, 1961.

27. D. R. BLAND, *The theory of linear visco-elasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.
28. Z. OLESIAK, *Dynamiczne zagadnienia ciał o własnościach lepkospřeżystych*, Rozpr. Inżyn., 9, 4, 1961.
29. W. NOWACKI, *Teoria pełźnia*, Arkady, Warszawa 1963.
30. S. ZIEMBA, *Najprostsze przypadki zachowania się ciał z uwzględnieniem tarcia wewnętrzneho*, Księga Jubil. prof. W. Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959.
31. S. ZIEMBA, W. DERSKI, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, Warszawa 1968.
32. M. ŻÓRAWSKI, *Pewne zagadnienia z zakresu zginania, drgań oraz jednoczesnego zginania i ściskania pełźów lepkospřeżystych*, AIL, 7, 1, 1961.
33. S. KALISKI, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
34. E. MACIĄG, *Drgania poprzeczne belek lepkospřeżystych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Podstawowe Nauki Techniczne, z. 4, Kraków 1968.

### Резюме

#### SWOBODNE KOLEBANIA WIAZKOUPRUGOJ BALKI TIMOSHENKI I DISKA

В работе проанализированы свободные колебания вязкоупругой балки, материал которой отвечает реологической модели вязкоупругого тела стандартного типа Фойхта и Максвелла. Учтены влияние вращательной инерции и влияние поперечной силы на перемещения. Для балки типа Фойхта и Максвелла уравнения описывающие колебания приводятся к одному уравнению, которое отличается однако от биволнового уравнения. Определены частоты свободных колебаний для балки Фойхта и проведен ее анализ. Во второй части работы определена частота колебаний вязкоупругого, свободно подпертого диска. Применена функция перемещений, т. наз. разрешающая функция. Оказалось, что уравнение динамического равновесия приводится в этом случае точно к биволновому уравнению. Имеет оно однако диссипативный фактор, вызывающий затухание амплитуд дилатационной, дисторсионной и поверхностной волны.

### SUMMARY

#### FREE VIBRATIONS OF VISCOELASTIC TIMOSHENKO BEAM AND SHIELD

Free vibrations of viscoelastic beam the material of which is described by standard rheological viscoelastic model of Voigt and Maxwell type are analyzed. The effects of shear and rotational inertia are taken into account. For Voigt and Maxwell type of beam the vibrations equations are reduced to one equation different, however, than biwave equation. Frequences of free vibrations for Voigt beam are evaluated and analyzed.

In a second part of paper the vibrations frequency for viscoelastic free supported shield is determined. The displacement function, so called solving function, was introduced. It has appeared that in this case a dynamic equilibrium equation leads exactly to biwave equation. It contains, however, a dissipative coefficient which causes amplitude attenuation of dilatational, distorsional and surface waves.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 marca 1974 r.*