

WYBOCZENIE I POZAKRYTYCZNE UGIĘCIA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ TRÓJWARSTWOWEJ PŁYTY PIERŚCIENIOWEJ

MARIA RADWAŃSKA I ZENON WASZCZYŚYŃ (KRAKÓW)

W pracy podano ogólną metodę numerycznego obliczania obciążeń krytycznych sprężysto-plastycznych płyt pierścieniowych oraz analizę pozakrytycznego stanu. Przyjęto, że płyta ma przekrój typu *sandwich* i jest wykonana z materiału z liniowym izotropowym i kinematycznym wzmocnieniem. W proponowanej metodzie wykorzystano pamięć komputera do zanotowania rozkładu naprężeń i odkształceń stanu tarczowego. W pracy wyznacza się obciążenia krytyczne według koncepcji Shanleya wzrastającego obciążenia oraz Kármána ustalonego obciążenia. Warunki brzegowe w stanie tarczowym i giętym spełnione są iteracyjnie, zamieniając zadanie brzegowe na początkowe i stosując wzory Newtona-Raphsona. Dla realizacji stanu giętnego zakładano małe zakłócenie ze stanu tarczowego. Rozważania ograniczono do symetrycznych form wybooczenia, a w przykładzie przyjęto płytę z takimi warunkami brzegowymi, przy których obliczone obciążenie jest najniższym (podstawowym) ciśnieniem krytycznym, niezależnie od stosunku promieni b/a . W analizie pozakrytycznych stanów uwzględnienie nieliniowości geometrycznych spowodowało, że zamiast linii poziomych wychodzących z punktu bifurkacyjnego dla koncepcji ustalonego obciążenia otrzymujemy krzywe na płyszczyźnie (p_{kr}, Z) zależne od wielkości wzmocnienia. Typ wzmocnienia (izotropowe czy kinematyczne) ma wpływ na wyniki dopiero przy znacznych ugięciach w momencie występowania wtórnych uplastycznień.

1. UWAGI WSTĘPNE, ZAŁOŻENIA I OZNACZENIA

Wyznaczenie obciążenia krytycznego oraz pozakrytycznych ugięć płyty pierścieniowej w zakresie pozasprężystym jest znacznie utrudnione w porównaniu z tym samym zadaniem w zakresie sprężystym. Przy obliczaniu obciążeń krytycznych można korzystać z bifurkacyjnego kryterium utraty stateczności, zakładając możliwość występowania dwu bliskich form równowagi: tarczowej i giętnej. Zamiast punktu określonego pierwszą siłą krytyczną w obszarze sprężystym — otrzymuje się przy wyjściu poza zakres proporcjonalności cały przedział zawarty pomiędzy siłą odpowiadającą koncepcji ustalonego obciążenia Kármána i wzrastającego obciążenia Shanleya.

Koncepcja ustalonego obciążenia Kármána zakłada, że po wybooczeniu obciążenie nie ulega zmianie, a w chwili utraty stateczności powstają natychmiast strefy lokalnych odciążań. Według koncepcji wzrastającego obciążenia Shanleya rozwijają się strefy procesów biernych dopiero w wyniku powstawania pozakrytycznych ugięć. Koncepcje te zostały opracowane dla ustrojów prętowych, a następnie przeniesione na ustroje powierzchniowe. W porównaniu z prętami znaczną komplikacją w zagadnieniu stateczności płyt jest konieczność uwzględnienia złożonego stanu naprężenia.

W pracach [8 i 11] zestawiono najważniejsze pozycje w literaturze poświęcone sprężysto-plastycznemu wyobczeniu płyt. Utratą stateczności płyt kołowych poza zakresem sprężystym zajmowali się J. R. LEPIK [3], S. M. POPOW [5], Ł. A. TOŁOKONNIKOW [7]. Obie koncepcje Kármána i Shanleya zostały zastosowane w pracy Z. WASZCZYŹYŹYNA [8] do wyznaczenia obciążenia krytycznego trójwarstwowej sprężysto-plastycznej płyty kołowej.

Dodatkowo w analizie stateczności sprężystych płyt pierścieniowych obciążonych symetrycznie rozłożonym ciśnieniem radialnym powstają trudności obliczeniowe związane z niejednorodnym stanem tarczowym. W tym przypadku poszukiwane obciążenie krytyczne występuje nie tylko w argumencie, ale wpływa także na rząd funkcji Bessela [6].

W przypadku pierścieniowych płyt sprężysto-plastycznych dodatkową trudność stanowi brak jawnych rozwiązań stanu tarczowego. W płytach pierścieniowych zwiększa się ponadto liczba niezależnych warunków brzegowych i nie można wykorzystać warunku wynikającego z kołowej symetrii dla punktu na osi symetrii.

W niniejszej pracy zajmiemy się wyznaczeniem obciążenia krytycznego według koncepcji Kármána i Shanleya oraz pozakrytycznych ugięć sprężysto-plastycznej płyty pierścieniowej. Zakładamy, że pod działaniem kołowo-symetrycznego obciążenia powstaje w płycie symetryczny stan naprężeń i odkształceń. Oprzemy się na teorii małych odkształceń i dużych przemieszczeń dla opisanego pozakrytycznych ugięć. Rozpatrywać będziemy płytę o przekroju *sandwich* o stałej grubości, wykonaną z jednorodnego i izotropowego materiału sprężysto-plastycznego, o liniowym kinematyczno-izotropowym wzmocnieniu. Możemy rozpatrywać dowolne warunki brzegowe na konturze zewnętrznym i wewnętrznym, nie zakładając jednak ograniczeń na wzajemne pionowe przemieszczenia obu konturów.

Stosujemy związki fizyczne teorii płynięcia plastycznego, wykorzystując sposób odwracania związków fizycznych omówiony szczegółowo w pracy [9].

Problem początkowo-brzegowy opisany podstawowym układem nieliniowych równań różniczkowych zostanie rozwiązany metodą półodwrotną bezpośredniego całkowania.

Wszystkie wzory i równania przedstawimy w wielkościach bezwymiarowych stosując następujące oznaczenia:

- $j=1, 2$ indeksy odpowiednich kierunków: promieniowego i obwodowego,
- a_j współrzędne środka krzywej granicznej F warunku plastyczności,
- A współczynnik liniowego wzmocnienia izotropowego,
- c współczynnik liniowego wzmocnienia kinematycznego,
- E_{ij} macierz sztywności w związkach fizycznych,
- ε_p, σ_p odkształcenie i naprężenie na granicy plastyczności,
- $e_j = \varepsilon_j / \varepsilon_p, s_j = \sigma_j / \sigma_p$ względne odkształcenia i bezwymiarowe naprężenia wzdłuż kierunków głównych,
- \bar{e}_p parametr Odqvista,
- ϑ_j, k_j uogólnione odkształcenia powierzchni środkowej,

- φ kąt nachylenia normalnej po odkształceniu płyty,
 \bar{d}, \bar{h} grubość warstwy w przekroju *sandwich*, grubość płyty,
 $p = P/\sigma_p$ intensywność obciążenia zewnętrznego,
 p_K, p_{SH} obciążenie krytyczne wg koncepcji Kármána i Shanleya,
 $n_j = N_j/2\bar{d}\sigma_p$ siły podłużne,
 $m_j = M_j/\bar{d}\bar{h}\sigma_p, t = T/2\bar{d}\sigma_p$ momenty zginające i siła poprzeczna,
 $s_j^0 = s_j - a_j$ względne naprężenia,
 s_j^0 część dewiatorowa względnych naprężeń,
 s_i intensywność naprężeń,
 τ parametr umownego czasu teorii plastyczności,
 τ_t, τ_g umowny czas w stanie tarczowym i giętym,
 $\tau_*, s_j^*, e_j^*, a_j^*, \bar{e}_p^*$ bezwymiarowe wielkości zachowywane dla poprzedniego czasu $\tau_* = \tau_{n-1}$,
 $u = \bar{u}/\bar{h}, v = \bar{v}/\bar{h}$ bezwymiarowe składowe wektora przemieszczenia powierzchni środkowej,
 $\xi = \bar{\xi}/\bar{h}, x = \bar{x}/\bar{h}$ promień koła równoleżnikowego przed i po odkształceniu płyty,
 $\{X\}, \{Y\}$ wektory wierszowe swobodnych wartości początkowych i warunków brzegowych,
 $(\)' = \partial/\partial\xi$ pochodna przestrzenna,
 $(\)^\cdot = \partial/\partial\tau$ pochodna względem czasu,
 Z parametr charakteryzujący stan giętny.

2. METODA WYZNACZANIA OBCIĄŻEŃ KRYTYCZNYCH

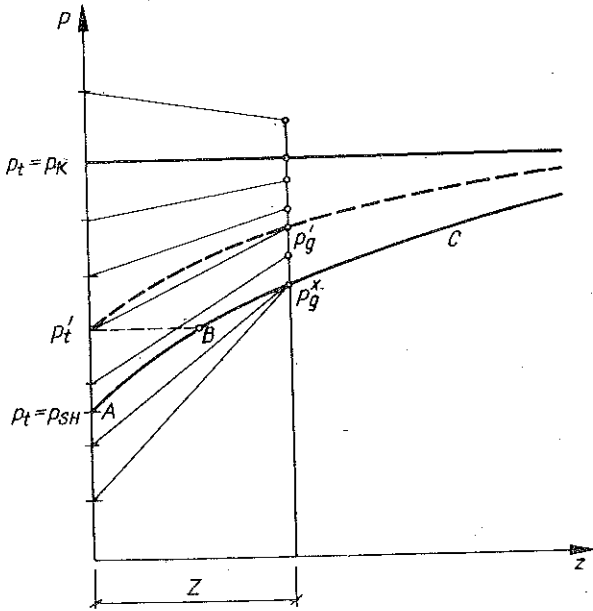
Opierając się na koncepcjach Kármána i Shanleya, należy rozpatrywać na płaszczyźnie p, Z obszar giętnych sprężysto-plastycznych stanów równowagi zawarty między prostą $p = p_K$ i krzywą ABC , wychodzącą z punktu A o współrzędnych $(0, p_{SH})$ (rys. 1).

Jeśli do płyty przyłożymy więzy uniemożliwiające powstawanie giętnych stanów równowagi i będziemy podwyższali ciśnienie do wartości $p > p_{SH}$, to okazuje się, że po odjęciu więzów nie nastąpi przeskok do punktu B , na krzywej ABC , lecz proces będzie się rozwijał według linii przerywanej (rys. 1). W ten sposób każdy punkt zaznaczonego obszaru przedstawia możliwy stan równowagi giętej.

Aby wyznaczyć przedział $\langle p_{SH}, p_K \rangle$ oraz obszar pozakrytycznych stanów równowagi, postępujemy w następujący sposób. Wychodząc od nieobciążonej płyty, przyjmujemy jako umowny czas $\tau_i^{(n)}$, np. obciążenie płyty $p_i^{(n)}$. Dla ustalonego czasu rozwiązujemy stan tarczowy, a następnie sprawdzamy, czy istnieje sąsiedni stan równowagi giętej. W tym celu zakłócamy stan tarczowy, wymuszając giętny stan odkształceń. Przyjmujemy mianowicie jako parametr Z w zależności od warunków brzegowych, różny od zera kąt φ lub moment m_1 dla $\xi = a$ (rys. 2).

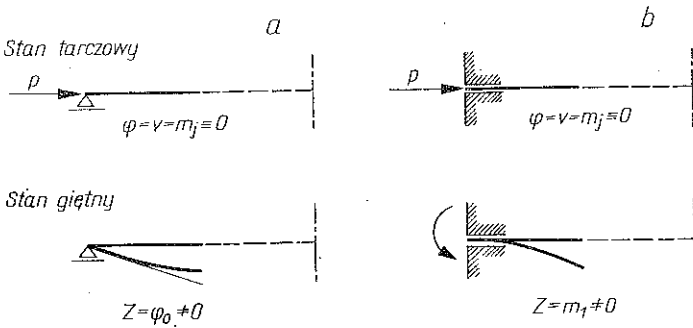
Badamy różnicę pomiędzy obciążeniem ze stanu tarczowego p_t , a obciążeniem wyznaczonym z iteracyjnego rozwiązania stanu giętnego p_g . W wyniku rozwiązania

stanu giętnego otrzymujemy dla coraz wyższego ciśnienia p_t stale tę samą wartość p_θ (w granicach dokładności obliczeń), co oznacza, że $p_t < p_{SH}$, a punkt p_g^* leży na dolnej granicy obszaru możliwych stanów równowagi.



Rys. 1

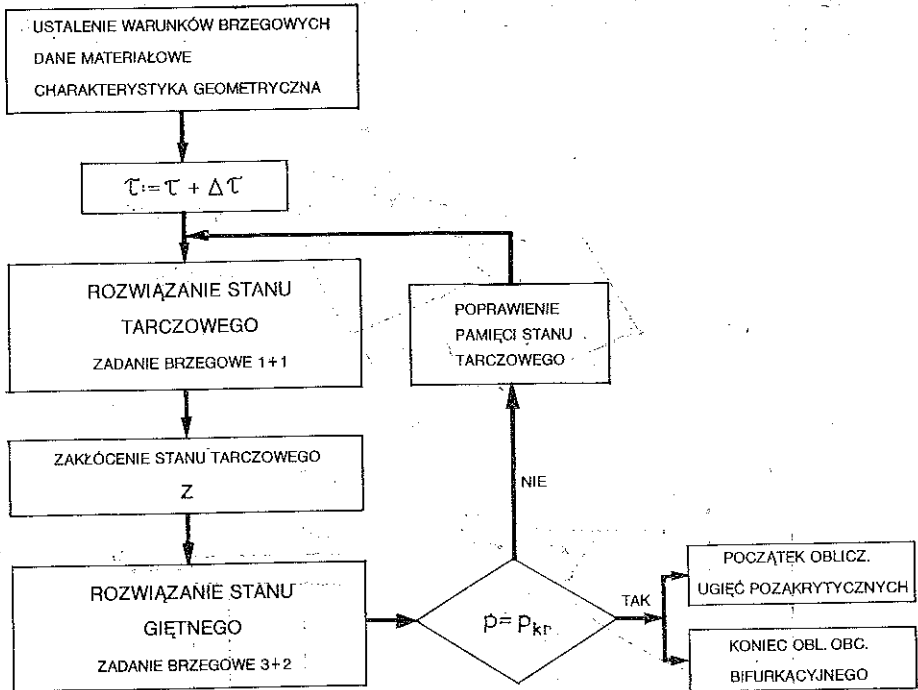
Najniższe obciążenie p_t , dla którego otrzymane z rozwiązania stanu giętnego ciśnienie p_θ jest wyższe od p_g^* , należy uważać za krytyczne obciążenie wg Shanleya. Dla wzrastającego obciążenia p_t ponad p_{SH} maleje coraz bardziej różnica pomiędzy



Rys. 2

p_t a p_g , a ciśnienie p_t , które ma tę samą wartość co p_θ , wyznacza krytyczne obciążenie wg Kármána: $p_\theta = p_K$. Po wyjściu z przedziału $\langle p_{SH}, p_K \rangle$ otrzymujemy mniejszą wartość obciążenia ze stanu giętnego niż tarczowego, co odpowiada stanom niestabilnym.

Na podstawie przedstawionej koncepcji wyznaczania obciążeń krytycznych został opracowany program, którego bardzo uproszczoną sieć działań przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3

3. PODSTAWOWY UKŁAD RÓWNAŃ

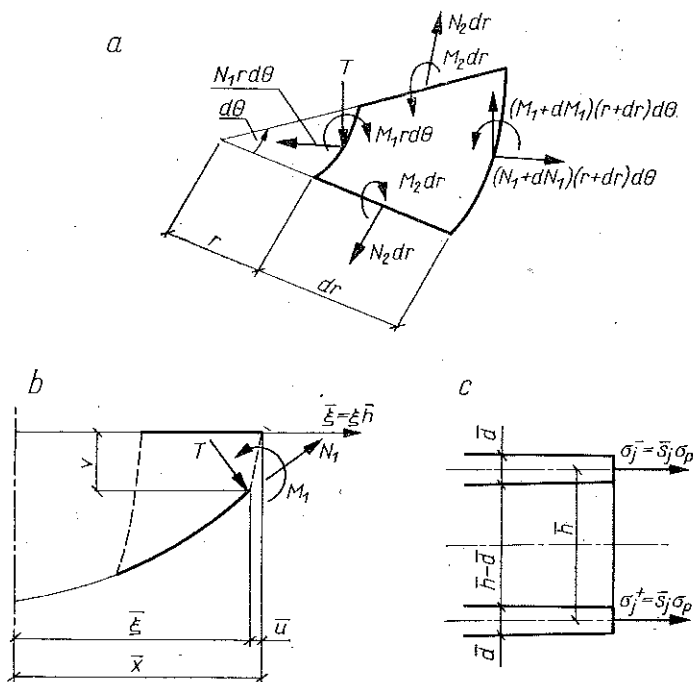
Do wyznaczania obciążeń krytycznych oraz pozakrytycznych ugięć posłużymy się podstawowym układem równań różniczkowych, które ze względu na proponowaną metodę numerycznego całkowania przedstawimy w postaci quasi-liniowej. Równania te zostały wyprowadzone szczegółowo w pracy [9] na podstawie związków geometrycznych hipotezy odcinka normalnego, związków fizycznych i równań równowagi:

$$\begin{aligned}
 u' &= l' \cos \varphi - 1, & v' &= l' \sin \varphi, & \varphi' &= \varepsilon_p k_1, \\
 n_1' &= (n_2 - n_1) \frac{l'}{x} \cos \varphi - n_1 \varphi' \operatorname{tg} \varphi, \\
 m_1' &= (m_2 - m_1) \frac{l'}{x} \cos \varphi + 2n_1 l' \operatorname{tg} \varphi, \\
 \dot{n}_j &= \frac{1}{2} (\dot{s}_j^+ + \dot{s}_j^-), & \dot{m}_j &= \frac{1}{2} (\dot{s}_j^+ - \dot{s}_j^-), \\
 \dot{s}_j^\pm &= E_{jk} \dot{e}_k^\pm, & \dot{e}_j^\pm &= \dot{s}_j \pm \frac{1}{2} k_j,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

gdzie

$$(3.2) \quad l' = 1 + \varepsilon_p \varepsilon_1, \quad x = u + \xi.$$

Zmiennymi niezależnymi w podstawowym układzie równań są współrzędne Lagrange'a: geometryczna ξ i czasowa τ . Uogólnione siły wewnętrzne i przemieszczenia są zaznaczone na rys. 4.



Rys. 4

Związki fizyczne teorii płynięcia plastycznego napiszemy w postaci przyrostowej [9]:

$$(3.3) \quad ds_j = E_{jk} de_k, \quad j, k = 1, 2,$$

gdzie elementy macierzy E_{jk} zależą od typu procesu:

a) dla procesu aktywnego $ds_i \geq 0$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{M} (\bar{s}_2^{\circ 2} + B), & E_{12} &= E_{21} = \frac{1}{M} (-\bar{s}_1^{\circ} \bar{s}_2^{\circ} + \nu B), \\ E_{22} &= \frac{1}{M} (\bar{s}_1^{\circ 2} + B), \\ M &= \bar{s}_1^{\circ 2} + 2\nu \bar{s}_1^{\circ} \bar{s}_2^{\circ} + \bar{s}_2^{\circ 2} + (1 - \nu^2) B, \\ B &= \frac{2}{3} \left(c + \frac{2}{3} A \right) f^2; \end{aligned}$$

b) dla procesu biernego, $ds_i < 0$

$$(3.4') \quad E_{11} = E_{22} = \frac{1}{1-\nu^2}, \quad E_{12} = E_{21} = \frac{\nu}{1-\nu^2}.$$

Wzory (3.3) pozwalają przedstawić liniowe kinematyczne i izotropowe wzmocnienie (rys. 5), przy którym chwilowy ruch środka powierzchni plastyczności (krzywej granicznej F) jest opisany prawem Zieglera

$$(3.5) \quad da_j = c(de_1^p + de_2^p + de_j^p),$$

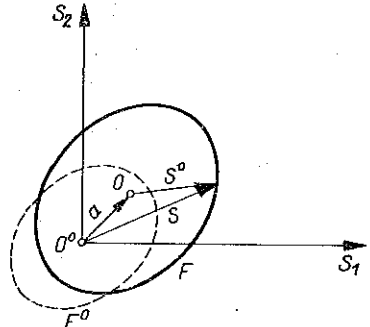
a rozszerzenie się powierzchni granicznej ujęto funkcją $f(\bar{e}_p)$:

$$(3.6) \quad s_i^2 \equiv \bar{s}_1^{o2} - \bar{s}_1^o \bar{s}_2^o + \bar{s}_2^{o2} = f^2, \quad f = 1 + A\bar{e}_p,$$

gdzie

$$(3.7) \quad \bar{e}_p = \int_{e_j} d\bar{e}_p, \quad d\bar{e}_p = \frac{2}{\sqrt{3}} [(de_1^p)^2 + de_1^p de_2^p + (de_2^p)^2]^{1/2},$$

$$de_j^p = de_j - ds_j + \nu(ds_1 + ds_2 - ds_j).$$



Rys. 5

4. ROZWIĄZANIE STANU TARCZOWEGO I GIĘTNEGO

Podstawowy układ równań, zawierający dwie zmienne niezależne ξ , τ , można rozdzielić względem pochodnych geometrycznych i czasowych. Tak więc dla każdego ustalonego czasu $\tau = \tau_n$ będziemy rozwiązywali zadanie brzegowe. Posługując się przyrostowymi związkami fizycznymi teorii płynięcia plastycznego oraz uwzględniając historię procesu musimy posługiwać się pamięcią maszyny. Zastępujemy bowiem pochodne czasowe różnicami wstecz liczonymi na podstawie wartości zachowywanych w pamięci dla $\tau_{n-1} = \tau_*$.

Układ pięciu równań służy do rozwiązania sprężysto-plastycznego stanu giętnego, a po przyjęciu $\nu = \varphi = m_1 = 0$ redukuje się do dwóch równań opisujących sprężysto-plastyczny stan tarczowy.

Zadanie brzegowe rozwiązujemy metodą półodwrotną numerycznego całkowania, zamieniając je na zadanie początkowe i spełniając iteracyjnie warunki brzegowe.

4.1. Sprężysto-plastyczny stan tarczowy

Jak już zaznaczyliśmy w schemacie blokowym (rys. 3) programu głównego, początkowo rozwiązujemy stan tarczowy. Mamy wówczas do czynienia z dwupunktowym zagadnieniem typu 1+1. Wektor swobodnych wielkości początkowych stanu tarczowego ma więc jedną współrzędną X_1 , którą dobierzemy iteracyjnie spełniając tylko jeden warunek brzegowy Y_1 dla ξ_L .

W programie istnieje możliwość przyjęcia różnych wielkości w charakterze swobodnych wielkości początkowych jak i umownego czasu przez ustalenie współczynnika t_a . Zgodnie ze wzorami

$$(4.1) \quad u = t_a \tau_i + (1 - t_a) X_1, \quad n_1 = (1 - t_a) \tau_i + t_a X_1$$

możemy, przyjmując $t_a=1$, ustalić jako umowny czas stanu tarczowego przemieszczenie radialne $\tau_t=u$, a jako swobodną wielkość początkową siłę promieniową $X_1=n_1$ lub dla $t_a=0$ odpowiednio $\tau_t=n_1$ i $X_1=u$.

Warunek brzegowy dla ξ_L zależy od sposobu podparcia:

$$(4.2) \quad Y_1 = t_b u + (1 - t_b) n_1 = 0.$$

Warunek niepodatnego konturu wewnętrznego uzyskamy przyjmując $t_b=1$ (wówczas $Y_1=u=0$), natomiast swobodny nieobciążony kontur wewnętrzny przyjmując $t_b=0$, a więc $Y_1=n_1=0$. Przyjmując wartości $0 < t_b < 1$ uzyskujemy możliwość modelowania sprężystego podparcia konturu wewnętrznego.

Jeśli przyjmiemy $b > a$, to rozpoczynamy całkowanie od obciążonego brzegu wewnętrznego, a wszystkie uwagi związane z wartością współczynnika t_b odnoszą się do konturu zewnętrznego.

4.2. Sprężysto-plastyczny stan giętny

W tym przypadku mamy do czynienia z rozwiązaniem zagadnienia dwupunktowego typu 3+2 o warunkach początkowych sformułowanych w zależności od parametrów z_a i t_a :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} v &= 0, & \varphi &= Z z_a, & m_1 &= (1 - z_a) Z, \\ u &= (1 - t_a) X_1 + t_a X_2, & n_1 &= t_a X_1 + (1 - t_a) X_2. \end{aligned}$$

Przez przyjęcie współczynnika $z_a=1$ lub 0 możemy zgodnie z rys. 2. przyjąć jako umowny czas stanu giętnego τ_g , a zarazem jako zakłócenie kąt obrotu normalnej do przekroju φ albo moment m_1 : $Z = \tau_g = (\varphi \vee m_1)$. Wektor swobodnych wielkości początkowych ma dwie współrzędne:

$$(4.4) \quad \{X\} = \{X_1, X_2\} = \{n_1, u\} \quad \text{lub} \quad \{u, n_1\},$$

z których druga jest zawsze umownym czasem stanu tarczowego.

Wektor warunków brzegowych ξ_L ma także dwie współrzędne:

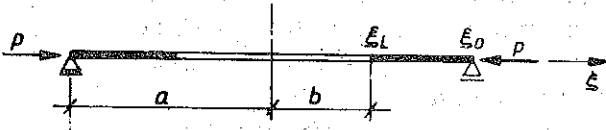
$$(4.5) \quad \begin{aligned} \{Y\} &= \{Y_1, Y_2\}, \\ Y_1 &= t_b u + (1 - t_b) n_1 = 0, \\ Y_2 &= z_b \varphi + (1 - z_b) m_1 = 0, \end{aligned}$$

przy czym Y_1 uwzględnia sposób podparcia w płaszczyźnie płyty — $Y_1=u$ lub n_1 , natomiast Y_2 sposób podparcia konturu wewnętrznego — $Y_2=\varphi=0$ w przypadku zamocowanego brzegu i $Y_2=m_1=0$ w przypadku swobodnego konturu.

Jeśli rozpoczynamy całkowanie od brzegu wewnętrznego, tzn. dla $b > a$, to parametr zakłócenia Z , utożsamiany z umownym czasem stanu giętnego, będzie odpowiadał wartościom φ lub m_1 na konturze wewnętrznej.

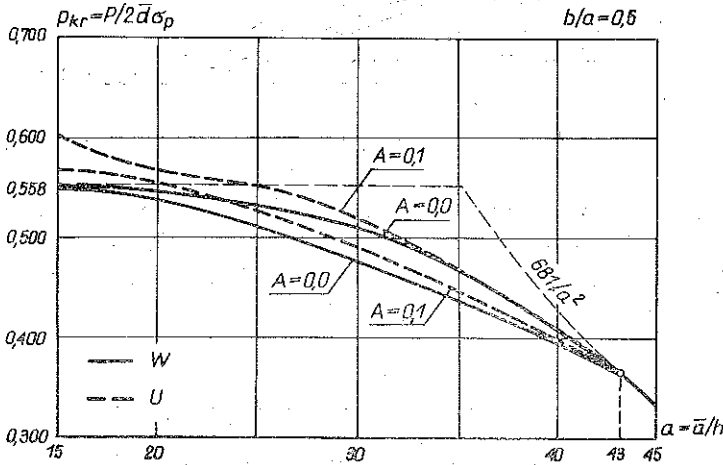
5. PŁYTA PRZEGUBOWO PODPARTA

Jako przykład numeryczny obliczymy obciążenie krytyczne i ugięcia pozakrytyczne płyty pierścieniowej o swobodnym wewnętrznym i przegubowo podpieranym zewnętrznym konturze (rys. 6). Jako parametr zakłócenia stanu tarczowego przyjmujemy kąt obrotu normalnej $Z = \varphi$. Równomiernie rozłożone ciśnienie radialne jest



Rys. 6

przyłożone tylko do konturu zewnętrznego. Przyjmujemy, że stosunek promieni konturu wewnętrznego i zewnętrznego wynosi $b/a = 0,5$. Stałe materiałowe płyty wynoszą: współczynnik Poissona $\nu = 0,3$, odkształcenie na granicy proporcjonalności $\epsilon_p = 0,001$. Do obliczeń przyjęto współczynniki liniowego wzmocnienia izotropowego A z przedziału $\langle 0,0; 0,5 \rangle$ oraz współczynnik wzmocnienia kinematycznego $c = 0,0$ i $c = 0,3333$.



Rys. 7

Na rys. 7 naniesiono wartości obciążeń krytycznych, odpowiadających koncepcji wzrastającego W oraz ustalonego U obciążenia, dla różnych wartości «smukłości» płyty $a = \bar{a}/h$. Do wartości $a > 43$ odnosi się rozwiązanie sprężyste opisane hiperbolą:

$$(5.1) \quad p_{kr} = \frac{K}{4(1-\nu^2)a^2 \epsilon_p},$$

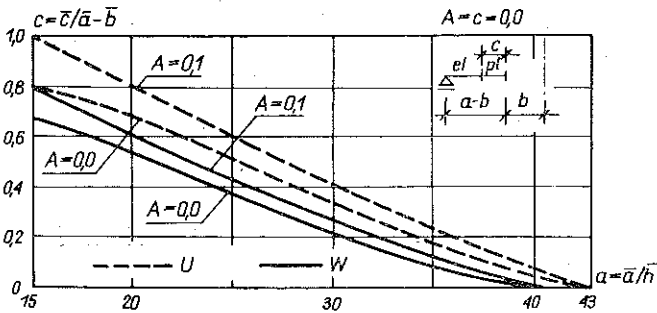
gdzie $K = 2,49$ zależy zarówno od stosunku b/a , jak też od wartości ν [6].

W przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego $A=c=0,0$ i krzywe $p_{kr}(a)$ zbliżają się asymptotycznie do prostej, odpowiadającej nośności granicznej tarczy. Nośność tę można obliczyć z równania przestępnego [4]:

$$(5.2) \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2}{-p_0 + \sqrt{4 - 3p_0^2}}} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{4}{3p_0^2} - 1} \right) \right],$$

z którego wynika, że dla $b/a=0,5$ obciążenie krytyczne wynosi $p_{gr}=0,558$.

Rozwiązanie uzyskane ze wzoru (5.2) odpowiada pełnemu uplastycznieniu płyty w stanie tarczowym, tj. $c = \bar{c}/(\bar{a} - \bar{b}) = 1$. Płyta może utracić stateczność przy zasięgu strefy plastycznej znacznie mniejszej od 1, zależnej od «smukłości» płyty $a = \bar{a}/\bar{h}$. Na rys. 8 pokazano zasięg strefy plastycznej $c(a)$ dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego oraz ze wzmocnieniem izotropowym o $A=0,1$ w zależności od koncepcji U lub W .



Rys. 8

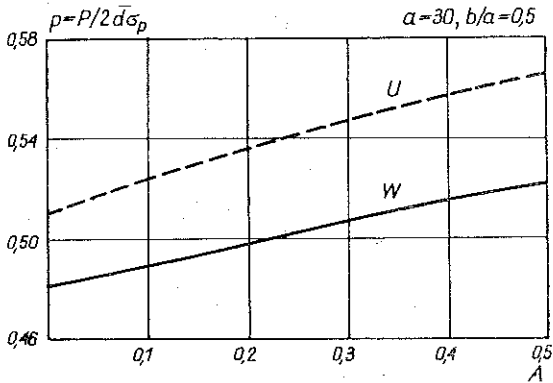
Obliczenia potwierdziły przewidywania, że w otoczeniu punktów bifurkacji stanów równowagi typ wzmocnienia (kinematyczne lub izotropowe) praktycznie nie ma wpływu na rozwiązanie. Z tego względu w tabelicy 1 przytoczono rozwiązanie tylko dla wzmocnienia izotropowego.

Tabela 1

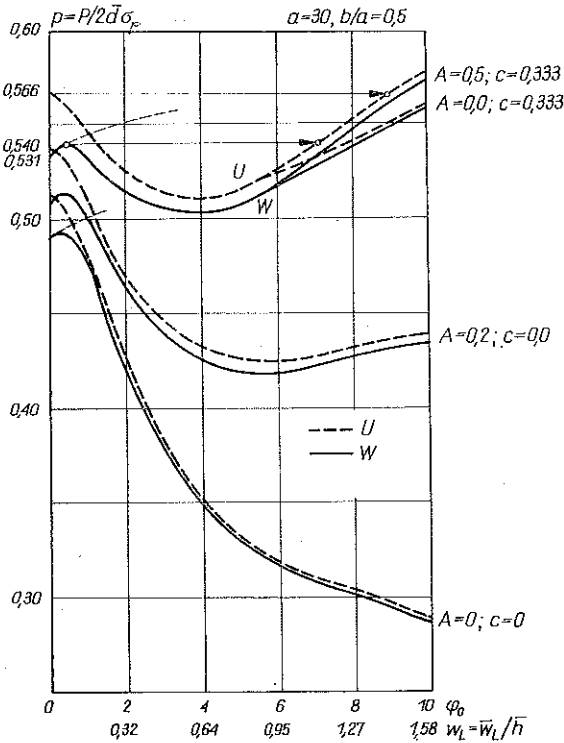
a	W		U	
	$A=0,0$	$A=0,1$	$A=0,0$	$A=0,1$
15	0,549	0,568	0,555	0,605
20	0,537	0,554	0,550	0,569
25	0,514	0,528	0,537	0,555
30	0,481	0,490	0,512	0,524
35	0,442	0,447	0,468	0,472
40	0,398	0,398	0,410	0,410

Na rys. 7 i w tabelicy 1 podano wyniki dla płyt o $a \geq 15$. Jak wynika z wykresu dla koncepcji U i materiału ze wzmocnieniem przy smukłościach $a < 20$ obciążenie krytyczne zaczyna szybko wzrastać. Płyty o takich smukłościach są już dość «grube»

[dla $a=20$ stosunek $(\bar{a}-b)/h=10$] i przyjęte na początku założenia przestają obowiązywać. Obok wpływu sił poprzecznych należy dla takich płyt uwzględnić dodatkowo efekty nieliniowe, wpływające na uplastycznienie, jak wykazano w pracy [7].



Rys. 9



Rys. 10

Na kolejnym rysunku 9 pokazano zależność obciążenia krytycznego od wartości współczynnika liniowego wzmocnienia izotropowego A dla płyty o $a=30$ i $b/a=0.5$. Zarówno dla koncepcji wzrastającego jak i ustalonego obciążenia zależności są zbliżone do liniowych.

Uwzględnienie nieliniowości geometrycznych powoduje, że zamiast linii poziomych, wychodzących z punktu bifurkacji dla koncepcji U , otrzymujemy krzywe na płaszczyźnie p_{kr} , Z (rys. 10).

Nieliniowości geometryczne powodują, że rozwiązanie otrzymane według koncepcji W nie zmierza asymptotycznie do prostej, uzyskanej według teorii małych ugięć dla koncepcji U (a więc do stycznej poprowadzonej w punkcie bifurkacji dla koncepcji U przy uwzględnieniu nieliniowości geometrycznej). Na rys. 10 zaznaczono linią przerywaną rozwiązanie według teorii małych ugięć dla różnych wartości współczynnika wzmocnienia izotropowego A .

Przy większym wzmocnieniu istnieje możliwość «przeskoku». Widać to wyraźnie na krzywych odpowiadających wzmocnieniu izotropowemu o $A=0,5$ lub kinematycznemu o $c=0,333$. Oba współczynniki wzmocnienia dobrano w ten sposób, aby nie było różnicy w stanie jednoosiowego rozciągania. Obliczenia wykazały, że dla dość dużych ugięć ($\bar{w} < 0,8 \bar{h}$) praktycznie nie ma żadnych różnic w wynikach uzyskanych dla wzmocnienia izotropowego ($A=0,5$, $c=0,0$) lub kinematycznego ($A=0,0$, $c=0,333$). Różnice pojawiają się w momencie występowania wtórnych uplastycznień warstw wcześniej odciążanych. Niezależnie od wartości współczynnika wzmocnienia wystąpiły te same ugięcia $w_L = \bar{w}/\bar{h}$ dla odpowiednich parametrów wymuszenia $Z = \varphi_0$, dzięki czemu można było nanieść je na osi odciętych.

Obliczenia wykonano w Ośrodku ETO Politechniki Krakowskiej według programu napisanego w języku ALGOL 1204.

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano dość ogólną metodę numeryczną, która zezwala na obliczanie nie tylko obciążeń bifurkacyjnych, ale także na analizę stanu pozakrytycznego. W tym ostatnim przypadku można ją uważać za pewną kontynuację pracy [9]. W literaturze brak jest opracowań dotyczących pozakrytycznych ugięć sprężystych płyt pierścieniowych. Stosowanie przybliżonych metod analitycznych, opracowanych dla płyt kołowych [1, 2 i 11], jest utrudnione ze względu na większą liczbę parametrów opisujących geometrię oraz warunki brzegowe płyty pierścieniowej.

Dodatkową trudnością przy obliczaniu obciążenia bifurkacyjnego jest niejednorodny stan tarczowy, który powoduje, że brak jest bezpośrednich rozwiązań nawet w zakresie sprężystym.

Wymienione trudności można stosunkowo łatwo pokonać w proponowanej metodzie przez wykorzystanie pamięci komputera dla zanotowania stanu tarczowego w przypadku obliczania obciążenia bifurkacyjnego lub historii odkształcenia w przypadku analizy stanu pozakrytycznego.

Metodę zweryfikowano na przykładzie płyty przegubowo opartej wzdłuż zewnętrznego konturu i o swobodnym wewnętrznym brzegu. Obliczenia ograniczono do przypadku ustalonego stosunku $b/a=0,5$, mając na względzie głównie weryfikację metody. Opracowany algorytm zezwala na realizację różnych warunków brzegowych.

Można również uwzględnić bardziej złożone własności materiału (np. wstępną ortotropię [10]).

Wprowadzenie parametru zakłócenia Z zależnego od wartości obciążenia umożliwia obliczanie płyt mimośrodowo ściskanych. Przez rozbudowanie prawych stron równań można również łatwo uwzględnić wstępne niedokładności.

Rozważania ograniczono do przypadku kołowej symetrii zarówno stanu tarczowego jak i giętnego. Jak wykazują obliczenia wykonane dla zakresu sprężystego, podstawowa (najniższa) siła krytyczna może wystąpić przy niesymetrycznych formach utraty stateczności — pomimo kołowo-symetrycznego stanu tarczowego. Istotną rolę odgrywają tutaj warunki brzegowe oraz stosunek promieni b/a .

W przypadku przegubowo podpartej płyty (o schemacie takim, jaki był podany w pkt. 5) podstawowym stanem w zakresie sprężystym jest stan kołowo symetryczny niezależnie od wartości b/a . Z tego względu w przykładzie numerycznym zajęliśmy się właśnie taką płytą mając na uwadze też zastosowania praktyczne.

Oczywiście należy zbadać, czy podane wnioski poprawne dla zakresu sprężystego mają zastosowanie poza tym zakresem. Będzie to możliwe dopiero po opracowaniu odpowiedniej metody i algorytmu dla obliczania niesymetrycznych stanów, kołowych i pierścieniowych płyt sprężysto-plastycznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. R. BODNER, *The post-buckling behaviour of a clamped circular plate*, Quart. Appl. Math., **12**, 4, 397 – 401, 1955.
2. K. O. FRIEDRICHS, J. J. STOKER, *Buckling of the circular plate beyond the critical thrust*, J. Appl. Mech., **9**, 1, 7 – 14, 1942.
3. J. P. LEPIK, *Odna wozmożnost rieszenija zadaczi ob ustojczivosti uprugoplastičeskich plastinok w tocznoj postanowkie*, Izw. AN SSSR, OTN, **8**, 13 – 19, 1957.
4. A. NÁDÁI, *Theory of flow and fracture of solids*, V. 1, Ed. 2, Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London 1950.
5. S. M. POPOW, *Ustojcziwost' krugłych plastinok za predielom uprugosti*, Inż. Sbornik, **27**, 92 – 100, 1960.
6. E. PYTEL, Z. WASZCZYSZYN, *Numeryczna analiza symetrycznego wyoboczenia sprężystego płyty pierścieniowej na tle istniejących rozwiązań*, Czasopisma Techniczne, 4-M (195), 32 – 36, 1972.
7. L. A. TOŁOKONNIKOW, *K woprosu ob ustojczivosti krugłych plastin, szatych raspriediełennym dawleniem po konturu*, Ucz. Zap. Rostowskiego Gos. Uniw., **18**, 3, 1953.
8. Z. WASZCZYSZYN, *Wyoboczenie trójwarstwowej płyty kołowej poza zakresem sprężystym*, Mech. Teoretyczna i Stosowana, **10**, 4, 577 – 597, 1972.
9. Z. WASZCZYSZYN, *Obliczanie pozakrytycznych ugięć sprężysto-plastycznych płyt kołowych*, Rozpr. Inż., **21**, 2, 347 – 360, 1973.
10. Z. WASZCZYSZYN, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok obrotowo-symetrycznych*, Zeszyty Nauk. Polif. Krak., **3**, 1970.
11. A. S. WOLMIR, *Ustojcziwost' deformirujemych sistem*, Izd. "Nauka", Moskwa 1967.

Резюме

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ И СВЕРХКРИТИЧЕСКИЕ ПРОГИБЫ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

В работе дается общий численный метод расчета критических нагрузок упруго-пластических кольцевых пластинок, а также анализ сверхкритического состояния.

Принято, что пластинка имеет сечение типа „sandwich” и изготовлена из материала с линейным изотропным и кинематическим упрочнением. В предлагаемом методе использована память вычислительной машины для записки распределения напряжений и деформаций плоского состояния. В работе определяются критические нагрузки согласно концепции возрастающей нагрузки Шанлея и установившейся нагрузки Кармана.

Граничные условия в плоском и изгибном состояниях удовлетворены итерационно, заменяя краевую задачу в задачу с начальными условиями и применяя формулы Ньютона-Рафсона.

Для реализации изгибного состояния предположено малое возмущение из плоского состояния.

Рассуждения ограничились симметричными формами продольного изгиба, а в примере принята пластинка с такими граничными условиями, при которых рассчитанная нагрузка является наименьшим (основным) критическим давлением независимо от отношения радиусов b/a .

В анализе сверхкритических состояний учет геометрических нелинейностей привел к тому, что вместо горизонтальных линий исходящих из точки бифуркации, для концепции установившейся нагрузки, получаем кривые на плоскости $(p_{кр}, Z)$ зависящие от величины упрочнения. Тип упрочнения (изотропный или кинематический) имеет влияние на результаты лишь при значительных прогибах в момент появления вторичных пластических течений.

SUMMARY

BUCKLING AND POST-CRITICAL DEFLECTION OF ELASTIC-PLASTIC SANDWICH ANNULAR PLATE

In a paper a general numerical method of calculations of critical loads for elastic-plastic circular plates and an analysis of post critical state is given. It is assumed that a plate has sandwich type section and is made of linear isotropic and kinematic strain-hardening material. In a method proposed the distributions of stresses and strains for the plane pre-buckling problem are stored in a coputer memory. The critical load is calculated according to the conception of Shanley increasing loading and Kármán stationary loading.

The boundary conditions in pre-buckling and membrane states are satisfied iteratively by replacing the boundary-value problem by the initial boundary-value problem and applying Newton-Raphson formulae. To reach a membrane state we assume the small disturbance from the plane pre-buckling state. The considerations are restricted to symmetric buckling. In a plate example such boundary conditions are assumed that calculated load is the lowest (fundamental) critical pressure independently of the ratio of radiuses b/a .

The influence of geometrical nonlinearities in the analysis of post critical states has caused that instead of horizontal lines issueing from the bifurcation point in a conception of stationary loading we obtain on the plane (p_{cr}, Z) the curves dependent on the value of strain-hardening. A type of strain-hardening (isotropic or kinematic) has influences until significant deflections occur in a moment of secondary yieldings.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI I OŚRODEK ETO

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1974 r.