

OCENA DOKŁADNOŚCI ROZWIĄZAŃ PROBLEMÓW BRZEGOWYCH SPRĘŻYSTYCH CIAŁ Dyskretyzowanych

WIESŁAW KUFEL i FELIKS PIETRAS (WARSZAWA)

Praca stanowi próbę przedstawienia koncepcji metody elementów skończonych (MES) jako szczególnego przypadku dyskretyzacji ciał sprężystych bazującej na teorii ośrodka ciągłego z więzami opracowanej przez Cz. Woźniaka. Pomyślna realizacja takiego zamierzenia pozwoliłaby nie tylko na przedstawienie MES jako teorii konsystentnej (dla ośrodka z więzami), ale także dałaby możliwość dokładnego oszacowania otrzymanych za jej pomocą przybliżonych wyników i to bez znajomości rozwiązań ścisłych dla ośrodka ciągłego.

WSTĘP

W niniejszej pracy rozważa się dyskretyzowane ciała sprężyste, których ruch opisany jest za pomocą skończonych układów niewiadomych funkcji zależnych tylko od czasu. Układ tych niewiadomych jest układem uogólnionych deformacji, pozwalającym aproksymować rzeczywisty ruch ośrodka ciągłego ruchem ciała dyskretyzowanego o skończonej liczbie stopni swobody. Podejście to, wywodzące się z mechaniki analitycznej, jest obecnie bardzo popularne jako metoda elementów skończonych.

Traktowanie jednak ciał dyskretyzowanych jako ciał z więzami prowadzi w konsekwencji do sformułowania teorii konsystentnej (mechanika ośrodków z więzami jest bowiem konsystentna), a więc w istotny sposób różniące się od znanych dotychczas metod. Ponadto więzy pozwalają na podanie podstawowego układu równań jako układu równań różniczkowych zwyczajnych oraz na przeprowadzenie, przez siły reakcji, oceny stopnia dokładności rozwiązań problemów brzegowych dla ośrodków ciągłych. Jeżeli siły reakcji stanowią układ sił pomijalnie małych w porównaniu z układem sił zewnętrznych (masowych i powierzchniowych), działających na ciało, to otrzymane rozwiązanie można uważać za dostatecznie bliskie rozwiązanie, jakie otrzymalibyśmy dla kontinuum bez więzów.

1. Dyskretyzowane ciała sprężyste jako ośrodki ciągłe z więzami

Rozpatrzmy ciało \mathcal{B} z cząstkami X i ustaloną konfigurację κ . Przyjmiemy, że ciało \mathcal{B} jest zdyskretyzowane i poddane więzom. Oznacza to, że podzielić je można na skończone obszary \mathcal{B}_a , zwane elementami skończonymi lub krótko elementami, $\mathcal{B}_a \subset \mathcal{B}$, $a=1, 2, \dots, l$ takimi, że

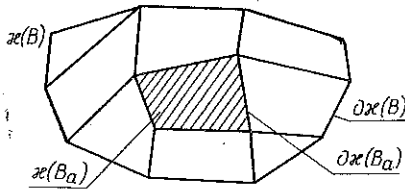
$$(1.1) \quad \bigwedge_{a \neq b} \kappa(\mathcal{B}_a) \cap \kappa(\mathcal{B}_b) = \emptyset, \quad \kappa(\mathcal{B}) \cup \partial\kappa(\mathcal{B}) = \bigcup_{a=1}^l [\partial\kappa(\mathcal{B}_a) \cup \kappa(\mathcal{B}_a)],$$

gdzie $\partial\mathcal{B}$ oraz $\partial\mathcal{B}_a$ są ograniczeniami odpowiednio ciała \mathcal{B} i jego części \mathcal{B}_a (rys. 1).

Oznacza to także, że ruch χ każdej cząstki $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_a$, $a=1, 2, \dots, l$ jest znaną funkcją postaci

$$(1.2) \quad \chi_{(a)}(\mathbf{X}, \tau) = \Phi_{(a)}(\mathbf{X}, \mathbf{q}(\tau))$$

pewnych niewiadomych zmiennych $\mathbf{q}(\tau)$, zwanych uogólnionymi deformacjami [1]. Liczba składowych N wektora $\mathbf{q}(\tau)$, gdzie $\mathbf{q} \in V^N$ jest ustalona dla całego ciała \mathcal{B} . Ogranicza ona z góry liczbę stopni swobody $f_{(a)}$ elementu skończonego \mathcal{B}_a , ($f_{(a)} \leq N$).



Rys. 1

Związek (1.2) odnosi się do cząstek $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_a$. W dalszym ciągu będziemy żądać, aby funkcja $\Phi_{(a)}$ była określona także w pewnym podzbiórze $\partial\kappa(\mathcal{B}_a)$ (może to być zbiór punktów izolowanych) oraz aby miała w nim odpowiednią regularność.

Przyjmując zależność uogólnionych deformacji \mathbf{q} tylko od czasu, zmierzamy do przedstawienia podstawowych równań dyskretyzowanych ciał sprężystych jako układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Założmy także, że funkcje $\mathbf{q}(\tau)$ spełniają dla każdego a , $d=d(a)$ warunków postaci

$$(1.3) \quad \Upsilon_{(a)}(\mathbf{q}(\tau)) = 0.$$

Warunki (1.3) mogą charakteryzować materiał (jak np. nieściśliwość) oraz warunki brzegowe nałożone na funkcje $\mathbf{q}(\tau)$. Liczba warunków (1.3) nie może przekraczać liczby funkcji $\mathbf{q}(\tau)$, bowiem tylko wtedy rozpatrywane zagadnienie jest określone.

Oznaczając tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa dla elementu \mathcal{B}_a , $a=1, 2, \dots, l$, przez $\mathbf{T}_{(a)} = \mathbf{T}_{(a)}(\mathbf{X}, \tau)$, gęstość masy odniesioną do konfiguracji κ przez $\rho_{(a)} = \rho_{(a)}(\mathbf{X})$, siły zewnętrzne przez $\mathbf{b}_{(a)} = \mathbf{b}_{(a)}(\mathbf{X}, \tau)$, $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_a$, $\tau \in R$ równania ruchu i równania konstytutywne elementu \mathcal{B}_a doprowadzimy do postaci [1]:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}_{(a)} + \rho_{(a)} \mathbf{b}_{(a)} + \mathbf{r}_{(a)} &= \rho_{(a)} \ddot{\mathbf{X}}_{(a)} \\ \mathbf{X} \in \kappa(\mathcal{B}_a), \quad \tau \in R, \quad a &= 1, 2, \dots, l, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{T}_{(a)} = \rho_{(a)} \frac{\partial \sigma_{(a)}}{\partial \nabla \mathbf{X}_{(a)}}$, $\sigma_{(a)}$ oznacza funkcję energii sprężystej, a wielkości $\mathbf{r}_{(a)}$ są postulowanymi siłami reakcji, powstałymi wskutek działania więzów (1.2). Postulujemy także, że działanie więzów (1.2) na powierzchni $\partial\kappa(\mathcal{B}_a) \cap \partial\kappa(\mathcal{B})$ prowadzi do powstania powierzchniowych sił reakcji $\mathbf{s}_{(a)}$, które wraz z obciążeniami zewnętrznymi \mathbf{p} spełniają na $\partial\kappa(\mathcal{B}) \cap \partial\kappa(\mathcal{B}_a)$ związek

$$(1.5) \quad \mathbf{T}_{(a)} \mathbf{n}_a = \mathbf{p} + \mathbf{s}_{(a)}.$$

Tensor $\mathbf{T}_{(a)}$ dla $\mathbf{X} \in \partial\kappa(\mathcal{B}_a)$ jest określony jako graniczna wartość $\mathbf{T}_{(a)}$, $\mathbf{X} \in \kappa(\mathcal{B}_a)$, a wektor \mathbf{n}_a jest wersorem zewnętrznym normalnym do $\partial\kappa(\mathcal{B}_a)$.

Z kolei działanie więzów (1.2) na powierzchniach $\partial\kappa(\mathcal{B}_a) \cap \partial\kappa(\mathcal{B}_b)$, $a \neq b$ prowadzi do powstania kontaktowych sił reakcji $\mathbf{s}_{(a)(b)} = \mathbf{s}_{(b)(a)}$ spełniających związek

$$(1.6) \quad \mathbf{s}_{(a)(b)} = T_{(a)} \mathbf{n}_{(a)} + T_{(b)} \mathbf{n}_{(b)},$$

gdzie $\mathbf{n}_{(b)} = -\mathbf{n}_{(a)}$.

Jeżeli ciało \mathcal{B} jest hipersprężyste, to równania konstytutywne mają postać [1]

$$(1.7) \quad \mathbf{h} = - \sum_{a=1}^l \frac{\partial \varepsilon_{(a)}}{\partial \mathbf{q}},$$

gdzie

$$(1.8) \quad \varepsilon_{(a)} = \int_{\kappa(\mathcal{B}_a)} \rho_{(a)} \sigma_{(a)}(\mathbf{X}, \mathbf{V}\Phi_{(a)}) dV - \lambda_{(a)} \Upsilon_{(a)}.$$

Funkcja $\sigma_{(a)}(\mathbf{X}, \mathbf{V}\Phi_{(a)})$ jest energią sprężystą elementu \mathcal{B}_a oraz $\lambda_{(a)} = \lambda_{(a)}(\tau)$ są mnożnikami Lagrange'a.

Wprowadzając oznaczenia

$$(1.9) \quad \mathbf{f}(\tau, \mathbf{q}) = \sum_{a=1}^l \left[\int_{\kappa(\mathcal{B}_a)} \rho_{(a)} \mathbf{b}_{(a)} \frac{\partial \Phi_{(a)}}{\partial \mathbf{q}} dV + \int_{\partial\kappa(\mathcal{B}_a) \cap \partial\kappa(\mathcal{B})} \mathbf{p}_{(a)} \frac{\partial \Phi_{(a)}}{\partial \mathbf{q}} dS \right],$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \sum_{a=1}^l \int_{\kappa(\mathcal{B}_a)} \rho_{(a)} \frac{\partial \Phi_{(a)}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \Phi_{(a)}}{\partial \mathbf{q}} dV \dot{\mathbf{q}}^T,$$

równania ruchu dyskretyzowanych ciał sprężystych z więzami zapisać można w postaci [1]

$$(1.10) \quad \mathbf{h} + \mathbf{f} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{q}}.$$

Równania ruchu (1.10), równania konstytutywne (1.7) oraz warunki (1.3) ze znanymi warunkami początkowymi stanowią zagadnienie początkowe dla funkcji \mathbf{q} oraz mnożników Lagrange'a $\lambda_{(a)}$, $a=1, 2, \dots, l$ przy założeniu, że liczba mnożników Lagrange'a nie przekracza liczby pozostałych funkcji (tylko wtedy układ równań jest określony).

Należy podkreślić, że warunki brzegowe dyskretyzowanych ciał sprężystych zostały już uwzględnione w drugim wyrazie funkcji $\mathbf{f}_{(a)}$, wzór (1.9)₁, przez obciążenia powierzchniowe $\mathbf{p}_{(a)}$ oraz w związkach (1.3) przez warunki nałożone na funkcje \mathbf{q} .

Po wyznaczeniu funkcji \mathbf{q} i λ określamy ruch kontinuum z równań (1.2), stan naprężenia z (1.4)₂ i siły reakcji z (1.4)₁, (1.5) – (1.6).

Jakkolwiek każde ciało poddać można procesowi dyskretyzacji, tj. podziałowi na elementy \mathcal{B}_a , to jednak otrzymane wyniki opisują badany układ (w rzeczywistości bez więzów) z dokładnością do sił reakcji $\mathbf{r}_{(a)}$, $\mathbf{s}_{(a)}$, $\mathbf{s}_{(a)(b)}$ traktowanych jako pewne «fikcyjne» siły zewnętrzne.

2. KRYTERIUM SZACUJĄCE DOKŁADNOŚĆ ROZWIĄZAŃ

Niech $\{X_{(a\alpha)}\}$, $\alpha=1, 2, \dots, \rho$ oznacza wybrany ciąg punktów należących do $\kappa(\mathcal{B}) \cup \partial\kappa(\mathcal{B})$. Zakładając dodatkowo odpowiednią regularność funkcji $\Phi_{(a)}(X, q(\tau))$ w punktach $X_{(a\alpha)}$, ruch otoczenia punktu $X_{(a\alpha)}$ określić można przez wielomian Taylora $W_{(a)}$ oraz resztę $R_{(a)}$ Lagrange'a lub Cauchy'ego:

$$\Phi_{(a)}(X, q(\tau)) = W_{(a)}(X, y_{(a\alpha)}(\tau)) + R_{(a)}(X, y_{(a\alpha)}(\tau)),$$

gdzie

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \{y_{(a\alpha)}\} &= \{\chi(X_{(a\alpha)}, \tau), \chi_{\gamma_1}(X_{(a\alpha)}, \tau), \dots, \chi_{\gamma_1 \dots \gamma_t}(X_{(a\alpha)}, \tau)\}, \\ \{y_{(a\alpha)}\} &\subset \{q^1, \dots, q^N\}, \quad \gamma_r = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, \dots, t. \end{aligned}$$

Jeżeli związek (2.1) zachodzi dla każdego a , to oznacza to, że przyjęliśmy interpretację uogólnionych deformacji q^1, \dots, q^N jako wartości składowych funkcji ruchu $\chi(X, \tau)$ i ich pochodnych $\chi_{\gamma_1}(X, \tau), \dots, \chi_{\gamma_1 \dots \gamma_t}(X, \tau)$ w punktach $X_{(a\alpha)}$.

Skończony układ uogólnionych deformacji dany przez (2.1) dla każdego a pozwala opisać ruch continuum o nieskończonej liczbie stopni swobody przez ruch układu o skończonej liczbie N stopni swobody.

W dalszym ciągu założymy, że uogólnione deformacje (2.1) są klasy $C_m^2(R)$, gdzie $m=3(3^{t+1}-1)/2$.

Niech po pominięciu reszty $R_{(a)}$ funkcja $\Phi_{(a)}$ wystarczająco dokładnie aproksymuje ruch rzeczywisty elementu \mathcal{B}_a . Biorąc dla każdego a odpowiedni stopień wielomianu $W_{(a)}$ funkcję ruchu $\chi(X, \tau)$ można uczynić ciągłą w punktach $X \in \bigcup_{\alpha=1}^{\rho} \{X_{(a\alpha)}\} \subset \subset R^3$.

Po znalezieniu z równań ruchu (1.10) oraz z równań konstytutywnych (1.7) uogólnionych deformacji $y_{(a\alpha)}$ wykorzystując związki (1.4)–(1.6), możemy wyliczyć całkowite siły reakcji:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} r_{(a)} &= -(\operatorname{div} T_{(a)} + \rho_{(a)} b_{(a)}) + \rho_{(a)} \ddot{\chi}_{(a)}, \\ s_{(a)} &= T_{(a)} n_{(a)} - p_{(a)}, \\ s_{(a)(b)} &= T_{(a)} n_{(a)} + T_{(b)} n_{(b)}. \end{aligned}$$

Występujące we wzorze (2.2) siły reakcji powierzchniowych $s_{(a)}$ uwzględniają zarówno więzy związane z dyskretyzacją jak i podparcie brzegu. W przypadku więzów brzegowych (narzuconych na ruch powierzchni $\partial\kappa(\mathcal{B})$) wystąpią siły reakcji tych więzów. Siły te oznaczymy przez $s_{(a)}^0$; wtedy powierzchniowymi siłami reakcji będą różnice $s_{(a)} - s_{(a)}^0$. Tym samym siły reakcji spowodowane dyskretyzacją są charakteryzowane przez $r_{(a)}$, $s_{(a)} - s_{(a)}^0$, $s_{(a)(b)}$.

Wprowadźmy w przestrzeniach sił wewnętrznych i powierzchniowych (zarówno $b_{(a)}$, $p_{(a)}$ jak i sił reakcji) odpowiednio normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Norma $\|\cdot\|_1$ dana jest dla funkcji określonych w $\kappa(\mathcal{B}_a) \times R$ a norma $\|\cdot\|_2$ dla funkcji określonych w podzbiórach zbioru $[\partial\kappa(\mathcal{B}) \cup \bigcup_{\alpha=1}^{\rho} \kappa(\mathcal{B}_a)] \times R$.

Uzyskane dla ciała dyskretyzowanego rozwiązanie można uznać za dostatecznie bliskie rozwiązanie, jakie otrzymalibyśmy dla ciała bez więzów wewnętrznych, jeśli dla każdego a spełniony jest następujący warunek szacujący:

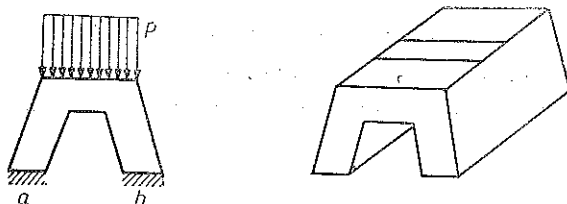
$$(2.3) \quad \|\mathbf{r}_{(a)}\|_1 + \|\mathbf{S}_{(a)}\|_2 + \left\| \sum_{b=1}^l \mathbf{s}_{(a)(b)} \right\|_2 = \varepsilon (\|\mathbf{b}_{(a)}\| + \|\mathbf{p}_{(a)} + \mathbf{s}_{(a)}^0\|),$$

gdzie $\mathbf{S}_{(a)} = \mathbf{s}_{(a)} - \mathbf{s}_{(a)}^0$ i ε jest daną liczbą dodatnią dostatecznie małą względem 1 (orientacyjnie możemy przyjąć np. $\varepsilon = 0,05$, gdyż z taką dokładnością określa się często siły zewnętrzne działające na układ).

Warunek (2.3) mówi, że siły reakcji wewnętrznych i powierzchniowych powinny stanowić układ sił pomijalnie małych w porównaniu z układem sił zewnętrznych działających na ciało.

3. PRZYKŁAD

Rozpatrzmy sprężystą powłokę z prostokątnym otworem (rys. 2). Załóżmy, że powłoka poddana jest stałemu obciążeniu \mathbf{p} oraz że jest utwierdzona wzdłuż krawędzi a i b .



Rys. 2

Dyskretyzację powłoki przeprowadzono w czterech wariantach dzieląc ją na 20, 40, 60, i 100 czworościennych elementów skończonych.

Funkcję więzów $\Phi_{(a)}$ przyjęto w postaci liniowej

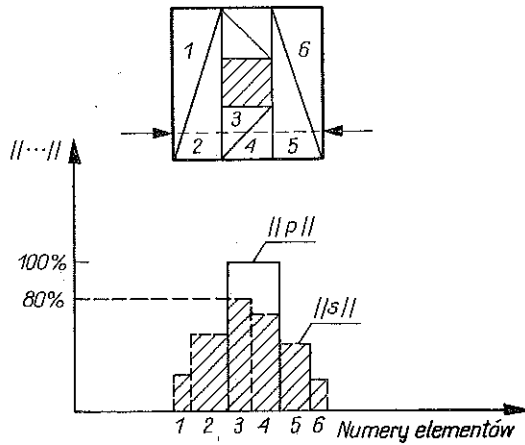
$$(3.1) \quad \Phi_{(a)}(x^k, u_{(a)}^\alpha) = \frac{1}{6V_{(a)}} [a_{(a)}^\alpha + b_{(a)}^\alpha x^1 + c_{(a)}^\alpha x^2 + d_{(a)}^\alpha x^3] u_{(a)\alpha},$$

gdzie $V_{(a)}$ jest objętością czworościanu, wyrażającą się wyznacznikiem czwartego rzędu, oraz gdzie a, b, c, d są wielkościami, będącymi minorami tego wyznacznika i które oblicza się tak jak w metodzie elementów skończonych [2]. Sumowanie po α dotyczy tych indeksów $i = 1, 2, \dots, s$, dla których $\mathbf{X}_i \in \kappa(\mathcal{C}\beta_a) \cup \partial\kappa(\mathcal{C}\beta_a)$.

Obliczenie numeryczne sił reakcji wykonano na maszynie cyfrowej GIER, rozwiązując odpowiednie układy równań algebraicznych.

Jak łatwo sprawdzić [wzór (1.4)], w przypadku więzów (3.1) siły reakcji $\mathbf{r}_{(a)}$ znikają niezależnie od sposobu dyskretyzacji.

Przechodząc do analizy powierzchniowych sił reakcji $S_{(a)}$, występujących w elementach skończonych wariantu pierwszego, otrzymano następujące wykresy:

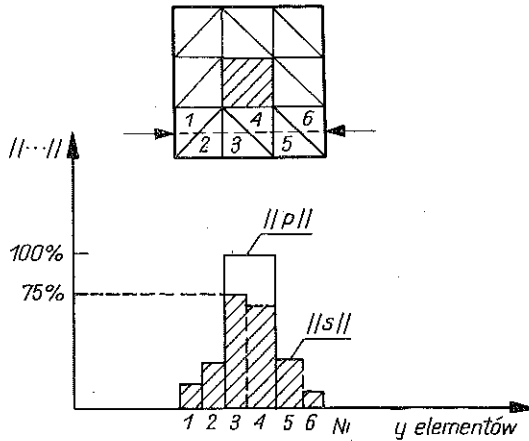


Rys. 3

gdzie $\|f_{(a)}\| = \max_{X \in \partial K} |f_{(a)}|$. W rozpatrywanym przypadku mamy np. $\|s_{(3)}\| = 0,8 \|p\|$.

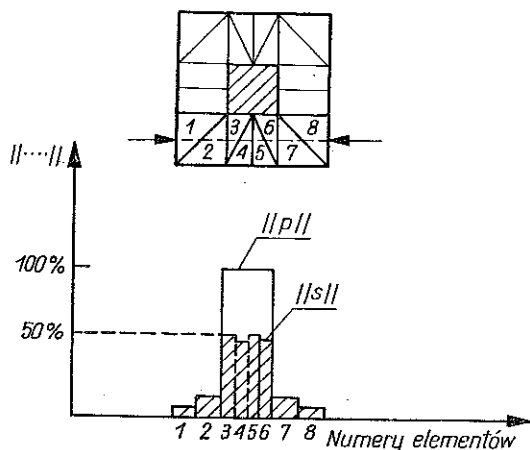
Przechodząc do kolejnych wariantów otrzymano:

1) W wariantcie pierwszym (rys. 3) maksymalne siły reakcji są rzędu sił przyłożonych. Wynika to z rodzaju zastosowanej dyskretyzacji («duże» elementy skończone).

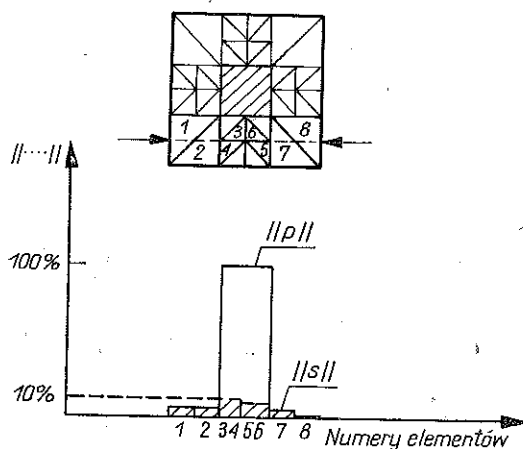


Rys. 4

2) W wariantcie drugim (rys. 4) otrzymuje się niewielkie zmniejszenie sił reakcji, spowodowane równomiernym zagęszczeniem elementów skończonych. W pozostałych wariantach maksymalne siły reakcji zmniejszają się już w zadowalający sposób.



Rys. 5



Rys. 6

4. UWAGI KOŃCOWE

Model ciała dyskretyzowanego wprowadza się w celu zastąpienia układu równań różniczkowych cząstkowych układem równań różniczkowych zwyczajnych. Jest to wygodny sposób opisu zagadnień teorii sprężystych ośrodków ciągłych dla elektro-technicznej techniki obliczeniowej.

Traktowanie dyskretyzowanych ośrodków ciągłych jako ciał z więzami pozwala na ocenę otrzymanych rozwiązań w stosunku do rozwiązań, jakie otrzymalibyśmy dla kontinuum bez więzów. Uwzględniając «fikcyjne» siły reakcji w obciążeniach zewnętrznych, tzn. rozpatrując zagadnienie brzegowe z dodaniem wyliczonych sił reakcji $r_{(a)}$, $s_{(a)}$ otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym.

Przedstawiony proces dyskretyzacji można kontynuować aż do chwili uzyskania wszystkich bezwzględnych sił reakcji mniejszych od z góry danej liczby. Trzeba jednak zaznaczyć, że nie zawsze jest to możliwe, nie dysponujemy bowiem maszynami matematycznymi, które rozwiązywałyby układy równań o dostatecznie dużej liczbie niewiadomych. Trudność tę ominąć można na innej drodze. Można mianowicie wykorzystując siły reakcji sterować procesem dyskretyzacji tak, aby przy danej liczbie elementów uzyskać optymalną siatkę podziału B punktami $X_{(i)}$, przy której siły reakcji przyjmują minimum. Mówiąc inaczej, można zwiększać liczbę elementów skończonych tylko tam, gdzie siły reakcji są duże (por. wariant II i III). Problemy te będą tematem oddzielnej pracy [3].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Cz. WOŹNIAK, *Constrained continuous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 21 (1973), I. *General Theory*, 109–116, II. *Discretized Formulation of the Continuous Media Theory*, 167–172, III. *Partly Discretized Bodies*, 175–182.
2. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
3. W. KUFEŁ, *On the optimal control of discretization problem for elastic bodies*, Arch. of Mech. (w druku),

Резюме

ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫЕ УПРУГИЕ ТЕЛА И КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Работа составляет попытку представления концепции метода конечных элементов (МКЭ) как частного случая дискретизации упругих тел, основанной на теории сплошной среды со связями разработанной Ч. Воźنياком. Успешная реализация такого намерения позволила бы не только представить МКЭ как консистентную теорию (для среды со связями), но также дала бы возможность точной оценки полученных при ее помощи приближенных результатов и то без знания точных решений для сплошной среды.

SUMMARY

DISCRETIZED ELASTIC BODIES AND FINITE ELEMENTS

The paper represents an attempt to present the concept of finite elements as a particular case of discretization of elastic bodies, on the basis of the theory of continua with constraints as presented by C. Woźniak. If such attempt proved to be successful, it would enable us not only to present the finite element theory in a consistent form (for constrained media), but also to estimate the accuracy of the approximate results obtained by the method, even without knowing the exact solutions for continuous media.

INSTYTUT MECHANIKI I INSTYTUT MASZYN MATEMATYCZNYCH
UNIwersytetu WarsZawskiego

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 października 1973 r.