

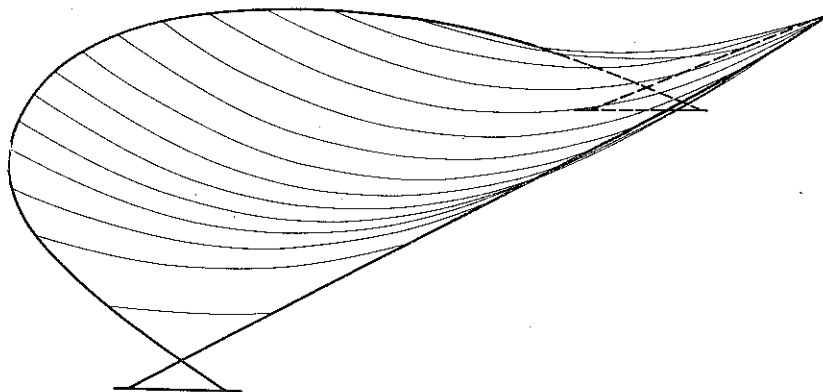
OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRZEKRYCIA WISZĄCEGO O JEDNOKIERUNKOWYM PRZEBIEGU CIĘGIEN

STANISŁAW K E M P N Y (GLIWICE)

W pracy wyznaczono kształt przekrycia wiszącego o jednokierunkowym przebiegu cięgien, obciążonego ciężarem własnym przekrycia z warunku na minimum objętości elementów nośnych. Dla przypadku przebiegu cięgien w pionowych płaszczyznach równo odległych, zawieszonych na dwóch przeciwległych łukach, przedstawiono przykłady szczegółowych rozwiązań w oparciu o opracowany program na EMC ODRA 1204.

1. WSTĘP

Celem pracy jest wyznaczenie kształtu przekrycia wiszącego, którego elementami nośnymi są cięgna o jednokierunkowym przebiegu, zawieszone na ciągłym pierścieniu konturowym (rys. 1) z warunku na minimum objętości elementów nośnych.



Rys. 1

Cięgna nośne mają stałe przekroje i leżą w pionowych płaszczyznach równoległych bądź w płaszczyznach tworzących pęk. Obciążenie ustroju stanowi ciężar własny przekrycia. Przedmiotem rozważań jest więc ustrój wiszący, złożony z cięgien wytrzymałych i nieważkich oraz poszycia ciężkiego, a jednocześnie pozbawionego wytrzymałości.

W rozważaniach teoretycznych przyjmuje się, że przekroje poprzeczne cięgien są tak ukształtowane, że wraz z sąsiednimi cięgnami tworzą continuum materialne. Jest to w istocie najprostszy przypadek ośrodka włóknistego [8]. Objętość cięgien nośnych takiego ustroju jest funkcją zależną od kształtu powierzchni prze-

krycia, a zagadnienie poszukiwania kształtu z warunku na minimum objętości elementów nośnych staje się problemem wariacyjnym poszukiwania minimum tegoż funkcjonału.

Problem ten dla przekryć walcowych i osiowo-symetrycznych został rozwiązany w pracach [2, 3 i 7].

2. ZAŁOŻENIA I OZNACZENIA

W pracy przyjęto następujące założenia: a) cięgna traktuje się jako idealnie wiotkie; b) pola przekrojów poprzecznych cięgien wzdłuż ich długości są stałe; c) w modelu matematycznym przekrycia przyjmuje się przekroje cięgien tak ukształtowane, że wraz z cięgnami sąsiednimi tworzą gładki płat powierzchni przekrycia; d) osie cięgien leżą w pionowych płaszczyznach równoległych bądź tworzących pęk płaszczyzn; e) obciążenie jest pionowe i równomiernie rozłożone na powierzchni przekrycia.

Oznaczenia

- $x_k = x_k(\alpha_1, \alpha_2)$, $k=1, 2, 3$ przedstawienie parametryczne powierzchni przekrycia wiszącego $(\alpha_1, \alpha_2) \in Q$;
- $\alpha_2 = \text{const}$, $\alpha_1 = \text{const}$ oznaczają odpowiednio linie cięgien oraz linie do nich ortogonalne;
- A, B współczynniki Lamégo pierwszej formy kwadratowej powierzchni
- $$A^2 = \sum_{k=1}^3 x_{k,1}^2, \quad B^2 = \sum_{k=1}^3 x_{k,2}^2,$$
- k_d naprężenie dopuszczalne dla materiału cięgien,
- \check{Q} obszar w płaszczyźnie x_1, x_2 , względem którego przekrycie jest płatem powierzchni normalnie położonym,
- $\partial\check{Q}$ brzeg obszaru \check{Q} ,
- p intensywność obciążenia równomiernie rozłożonego na powierzchni ustroju.

3. PRZYPADEK USYTUOWANIA CIĘGIEN W PŁASZCZYZNACH TWORZĄCYCH PĘK

Zagadnienie wyznaczania kształtu ustroju wiszącego z warunku na minimum objętości cięgien rozpatruje się tutaj przy założeniu, że cięgna przekrycia wiszącego leżą w pionowych płaszczyznach tworzących pęk, którego osią jest oś x_3 kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych x_i ($i=1, 2, 3$).

1.3. Sformułowanie zagadnienia wariacyjnego

Ponieważ pole przekroju poprzecznego cięgien jest stałe na ich długości, więc zachodzi następująca zależność (rys. 2):

$$(3.1) \quad \frac{N_1}{k_d} B A \alpha_2 = h(\alpha_1, \alpha_2) B A \alpha_2(\alpha_2),$$

a stąd

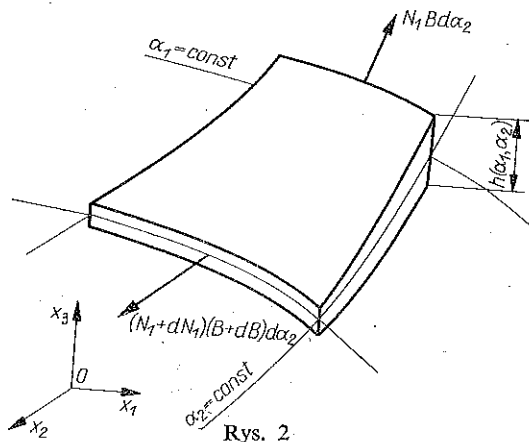
$$h(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{N_1^0 B^0 \Delta \alpha_2^0}{k_d B \Delta \alpha_2},$$

gdzie $N_1^0 B^0 \Delta \alpha_2^0$ jest maksymalną siłą działającą przynajmniej w jednym z cięgien ustroju (a więc np. w cięgnię określonym linią $\alpha_2^0 = \text{const}$), $h(\alpha_1, \alpha_2)$ grubością powłoki włóknistej, $\Delta \alpha_2(\alpha_2)$ zaś funkcją rozmieszczenia cięgien w płaszczyźnie analitycznej punktów $M(\alpha_1, \alpha_2) \in Q$. Objętość elementów nośnych przekrycia wynosi

$$(3.2) \quad v' = \int_Q \int h A B d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_Q \int \frac{N_1^0 B^0 \Delta \alpha_2^0}{k_d \Delta \alpha_2} A d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_Q \int \bar{\lambda}(\alpha_2) A d\alpha_1 d\alpha_2,$$

gdzie $\bar{\lambda}(\alpha_2)$ jest funkcją tylko α_2 .

W dalszym ciągu przyjmijmy, że powierzchnia przekrycia wiszącego jest powierzchnią normalnie położoną względem płaszczyzny poziomej. Ponieważ założono, że cięgna przekrycia wiszącego leżą w płaszczyznach tworzących pęk, którego osią



Rys. 2

jest oś x_3 układu współrzędnych prostokątnych x_i ($i=1, 2, 3$), przeto zamiast tego układu wprowadzimy nowy układ współrzędnych cylindrycznych r, φ, x_3 . Powierzchnię ustroju w postaci normalnej względem płaszczyzny poziomej opisuje wówczas równanie

$$x_3 = f(r, \varphi).$$

Pomiędzy współrzędnymi na płaszczyźnie r, φ , a współrzędnymi krzywoliniowymi α_1, α_2 na powierzchni ustroju istnieją następujące związki [5 i 6]:

$$\alpha_1 = \alpha_1(r, \varphi), \quad \alpha_2 = \alpha_2(\varphi).$$

Wykorzystując te związki można otrzymany funkcjonal objętości cięgien ustroju (3.2) przekształcić do następującej postaci:

$$(3.3) \quad v = \int_{\hat{Q}} \int \lambda(\varphi) \sqrt{1 + f_r^2} dr d\varphi,$$

gdzie λ jest funkcją charakteryzującą pole powierzchni przekroju poprzecznego oraz rozmieszczenie cięgien. Pole powierzchni przekroju poprzecznego każdego

z cięgien w nowym układzie współrzędnych r, φ można wyrazić za pomocą funkcji λ w następujący sposób:

$$w = \lambda(\varphi) \frac{\Delta\varphi(\varphi)}{k_d},$$

gdzie $\Delta\varphi(\varphi)$ oznacza funkcję rozmieszczenia cięgien w rzucie na płaszczyźnie poziomej.

Po zamianie zmiennych α_1, α_2 na r, φ wygodniej posłużyć się funkcją gęstości sił naciągu (składowych poziomych) cięgien, odniesioną do jednostki kąta $\varphi - \kappa(\varphi)$, zamiast gęstością $N_1(\alpha_1, \alpha_2)$ sił w cięgnach przekrycia wiszącego ([6], p. 4).

Pole powierzchni przekroju poprzecznego każdego cięgna musi spełniać warunek wytrzymałości:

$$\kappa \sqrt{1 + f_{,r}^2} \frac{\Delta\varphi(\varphi)}{k_d} \leq w,$$

a więc

$$(3.4) \quad \bigwedge_{(r, \varphi) \in \tilde{Q}} \kappa \sqrt{1 + f_{,r}^2} \leq \lambda(\varphi).$$

Powierzchnia realizująca minimum funkcjonału (3.3) musi być w równowadze pod działaniem ciężaru własnego przekrycia, tzn. musi spełniać następujące równanie ([6], p. 4):

$$(3.5) \quad \frac{\kappa}{p} f_{,rr} - \sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2} = 0.$$

Zagadnienie optymalizacji rozpatrywanego ustroju wiszącego sprowadziło się do problemu wariacyjnego poszukiwania argumentu minimum funkcjonału (3.3) z aholonomicznymi warunkami ubocznymi (3.4) oraz (3.5). Nierówność (3.4) jest warunkiem nieprzekroczenia naprężeń dopuszczalnych w żadnym z cięgien przekrycia.

3.2. Rozwiązanie zagadnienia wariacyjnego

Z nierówności (3.4) wynika, że przynajmniej w jednym z cięgien ustroju i jednym jego przekroju o współrzędnych $[r, \varphi, f(r, \varphi)]$ występuje naprężenie równe dopuszczalnemu. Z drugiej strony, aby objętość elementów nośnych przekrycia osiągała minimum, należałoby tak wyznaczyć kształt ustroju, aby we wszystkich cięgnach i w każdym z ich przekrojów naprężenie dopuszczalne było w pełni wykorzystane. Z nierówności (3.4) wynika, że spełnienie tego postulatu jest niemożliwe. Tak więc kształt ustroju będzie wtedy optymalny, gdy w tych przekrojach poszczególnych cięgien, w których siły są maksymalne, naprężenia dopuszczalne będą całkowicie wykorzystane. Na ogół maksymalne siły w cięgnach występują w punktach ich zawieszenia, czyli w punktach brzegu przekrycia, tj. wzdłuż pierścienia konturowego.

Weźmy pod uwagę ustrój zawieszony na pierścieniu konturowym, którego rzut na płaszczyznę poziomą pokazany jest na rys. 3.

Niech maksymalne siły w poszczególnych cięgnach optymalnego przekrycia wystąpią wzdłuż prawego łuku pierścienia konturowego, tj. niech spełniona będzie nierówność

$$(3.6) \quad \bigwedge_{\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle} f_{,r}(\chi_2(\varphi), \varphi) \geq f_{,r}(\chi_1(\varphi), \varphi)$$

(dla ustroju, którego rzut poziomy pokazany jest na rys. 3, wystarczy, aby zamiast ostatniej nierówności spełniony był warunek

$$f(\chi_1(\varphi), \varphi) = \mu_1(\varphi) \leq f(\chi_2(\varphi), \varphi) = \mu_2(\varphi).$$

Można wówczas żądać, aby w punktach zawieszenia cięgien na prawym łuku, naprężenia dopuszczalne były w pełni wykorzystane, tzn. aby zamiast nierówności (3.4) spełniona była równość

$$(3.7) \quad \kappa \sqrt{1 + f_{,r}^2} = \lambda(\varphi),$$

gdzie $f_{,r} = f_{,r}(\chi_2(\varphi), \varphi)$.

Tak więc sformułowane w poprzednim punkcie zagadnienie wariacyjne zostało sprowadzone do następujących warunków: warunku minimum całki (3.3), równania równowagi ustroju wiszącego (3.5) oraz warunku wykorzystania naprężeń dopuszczalnych wzdłuż nie niżej położonego łuku pierścienia konturowego (3.7).

Zagadnienie to rozwiążemy metodą nieokreślonych mnożników Lagrange'a.

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że funkcja rozmieszczenia cięgien w rzucie $\Delta\varphi(\varphi)$ może być wyznaczona z warunku na minimum funkcjonału (3.3).

Wariacja objętości elementów nośnych przekrycia (3.3) ma następującą postać:

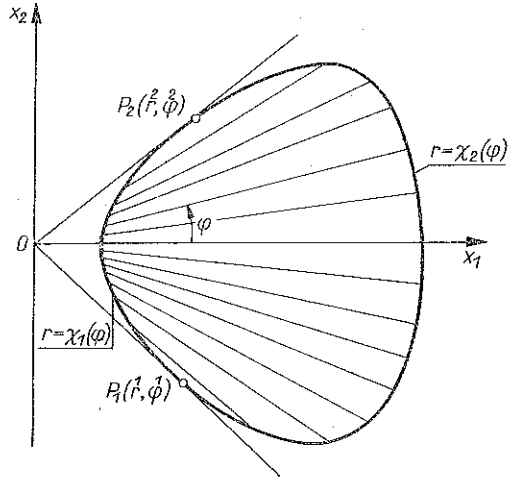
$$\delta v = \int_{\tilde{Q}} \int \sqrt{1 + f_{,r}^2} \delta \lambda dr d\varphi + \int_{\partial\tilde{Q}} \int \frac{f_{,r} \lambda}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \delta f_{,r} dr d\varphi.$$

Przekształcona postać ostatniej wariacji przedstawia się następująco [1]:

$$(3.8) \quad \delta v = \int_{\tilde{Q}} \int \sqrt{1 + f_{,r}^2} \delta \lambda dr d\varphi + \int_{\partial\tilde{Q}} \frac{\lambda f_{,r}^2}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \delta f d\varphi - \int_{\tilde{Q}} \int \frac{\lambda f_{,rr}}{(1 + f_{,r}^2)^{3/2}} \delta f dr d\varphi.$$

Wariacja równania równowagi (3.5) przedstawia się następująco:

$$\frac{f_{,rr}}{p} \delta \kappa + \frac{\kappa}{p} \delta f_{,rr} - \frac{r^2 f_{,r} \delta f_{,r} + f_{,\varphi} \delta f_{,\varphi}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} = 0.$$



Rys. 3

Mnożąc otrzymaną wariację przez nieokreślony mnożnik Lagrange'a $\Lambda(r, \varphi)$ i całkując po obszarze \check{Q} , można ją przekształcić w równanie

$$(3.9) \quad \int_{\partial\check{Q}} \frac{\kappa}{p} \Lambda \delta f_{,r} d\varphi + \int_{\partial\check{Q}} \left[\frac{f_{,\varphi} \Lambda}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} dr - \left(\frac{\kappa}{p} A_{,r} + \frac{r^2 f_{,r} \Lambda}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} \right) d\varphi \right] \delta f + \int_{\check{Q}} \left[\frac{\kappa}{p} A_{,rr} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 f_{,r} \Lambda}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{f_{,\varphi} \Lambda}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} \right) \right] \delta f dr d\varphi + \frac{1}{p} \int_{\check{Q}} f_{,rr} \Lambda \delta \kappa dr d\varphi = 0.$$

Jeżeli z wariacji warunku (3.7) znajdziemy

$$(3.10) \quad \delta \kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \left(\delta \lambda - \frac{\kappa f_{,r}^{(x_2)}}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \delta f_{,r} \right),$$

a nieokreślony mnożnik Lagrange'a w wyrażeniu (3.9) dobierzemy tak, aby spełnione było następujące równanie różniczkowe cząstkowe:

$$(3.11) \quad \frac{\kappa}{p} A_{,rr} + \frac{r^2 f_{,r}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} A_{,r} + \frac{f_{,\varphi}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} A_{,\varphi} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 f_{,r}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{f_{,\varphi}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} \right) \right] A = \frac{\lambda f_{,rr}}{(1 + f_{,r}^2)^{3/2}},$$

to po zsumowaniu (3.8) i (3.9) wariacja funkcjonału objętości cięgien nośnych przekroczenia (3.8) przyjmie postać:

$$(3.12) \quad \delta v = \int_{\partial\check{Q}} \left[\frac{f_{,\varphi} \Lambda}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} dr - \left(\frac{\kappa}{p} A_{,r} + \frac{r^2 f_{,r} \Lambda}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} - \frac{\lambda f_{,r}}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \right) d\varphi \right] \delta f + \int_{\frac{1}{\varphi}}^{\frac{2}{\varphi}} \left(\frac{\kappa^{(x_2)}}{p} A - \frac{1}{p} \frac{\kappa f_{,r}^{(x_2)}}{1 + f_{,r}^2} \int_{x_1}^{x_2} A f_{,rr} dr \right) \delta f_{,r} d\varphi - \int_{\frac{1}{\varphi}}^{\frac{2}{\varphi}} \frac{\kappa^{(x_1)} \Lambda^{(x_1)}}{p} A \delta f_{,r} d\varphi + \int_{\check{Q}} \left(\sqrt{1 + f_{,r}^2} + \frac{1}{p} \frac{A f_{,rr}}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \right) \delta \lambda d\varphi dr.$$

Dla pierścienia konturowego, którego rzut na płaszczyznę x_1, x_2 pokazany jest na rys. 3, podstawowy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału [przyrównanie do zera wariacji (3.12)], prowadzi do następującego zagadnienia granicznego:

$$(3.13) \quad \check{Q}(\chi_1(\varphi) \leq r \leq \chi_2(\varphi)),$$

$$(3.13) \quad f(\chi_i(\varphi), \varphi) = \mu_i(\varphi), \quad i=1, 2, \quad \mu_2 \geq \mu_1,$$

[c.d]

$$\frac{\kappa}{p} f_{,rr} - \sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2} = 0,$$

$$\kappa \sqrt{1 + f_{,r}^2} = \lambda,$$

$$\frac{\kappa}{p} A_{,rr} + \frac{r^2 f_{,r}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} A_{,r} + \frac{f_{,\varphi}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} A_{,\varphi} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 f_{,r}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{f_{,\varphi}}{\sqrt{r^2 + r^2 f_{,r}^2 + f_{,\varphi}^2}} \right) \right] A = \frac{\lambda f_{,rr}}{(1 + f_{,r}^2)^{3/2}},$$

$$\left[\frac{\kappa}{p} A - \frac{1}{p} \frac{\kappa f_{,r}}{1 + f_{,r}^2} \int_{x_1}^{x_2} A f_{,rr} dr \right]_{r=x_2(\varphi)} = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sqrt{1 + f_{,r}^2} + \frac{1}{p} \frac{A f_{,rr}}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \right) dr = 0,$$

$$A(\chi_1(\varphi), \varphi) = 0.$$

Jeżeli funkcja rozmieszczenia cięgien w rzucie jest dana, to wówczas warunek (3.13)₇ wyraża się następującym równaniem:

$$(3.14) \quad \int_{\check{\varphi}} \int \check{\lambda} \left(\sqrt{1 + f_{,r}^2} + \frac{1}{p} \frac{A f_{,rr}}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \right) dr d\varphi = 0,$$

gdzie

$$\check{\lambda} = \frac{1}{A\varphi(\varphi)}.$$

Jeśli natomiast cięgna w rzucie na płaszczyznę x_1, x_2 są rozmieszczone równomiernie, tzn. gdy

$$A\varphi = A\check{\varphi} = \text{const},$$

to warunek ten przyjmuje postać

$$(3.15) \quad \int_{\check{\varphi}} \int \left(\sqrt{1 + f_{,r}^2} + \frac{1}{p} \frac{A f_{,rr}}{\sqrt{1 + f_{,r}^2}} \right) dr d\varphi = 0.$$

Jeżeli zamiast warunku (3.6) spełniona jest nierówność

$$f_{,r}(\chi_2(\varphi), \varphi) \leq f_{,r}(\chi_1(\varphi), \varphi),$$

to warunek (3.13)₆ przyjmie postać

$$\left[\frac{\kappa}{p} A + \frac{1}{p} \frac{\kappa f_{,r}}{1 + f_{,r}^2} \int_{x_1}^{x_2} A f_{,rr} dr \right]_{r=x_1(\varphi)} = 0,$$

a warunek brzegowy (3.13)₈ przedstawia się następująco:

$$A(\chi_2(\varphi), \varphi) = 0.$$

Pozostałe warunki zagadnienia granicznego (3.13) nie ulegają zmianie.

3.3. Optymalny kształt ustroju zawieszonoego na dwóch pierścieniach

Rozpatrzmy ustrój zawieszony na dwóch pierścieniach leżących w płaszczyznach równoległych o osi łączącej środki pierścieni, prostopadłej do ich płaszczyzn.

Wykażemy, że zagadnienie graniczne (3.13) nie jest sprzeczne przy założeniu, że ustrojem optymalnym jest wówczas ustrój osiowo-symetryczny (rys. 4).

Z założenia, że optymalnym przekryciem zawieszonym na takich pierścieniach jest ustrój osiowo-symetryczny ($f_{,\varphi} = 0$), wynika następująca postać równania (3.13)₃:

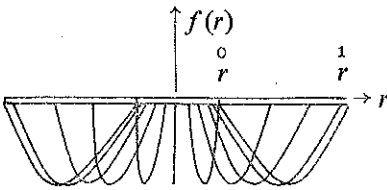
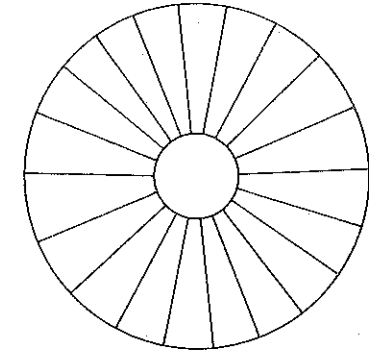
$$f_{,rr} - \frac{p}{\kappa} r \sqrt{1 + f_{,r}^2} = 0.$$

Całką tego równania jest funkcja

$$(3.16) \quad f = \int_0^r \text{sh}(ar^2 + b) dr + c_1,$$

gdzie

$$a = \frac{p}{2\kappa},$$



Rys. 4

b i c_1 zaś są pewnymi stałymi. Równanie (3.13)₅ po wykorzystaniu (3.16) przyjmuje postać

$$\frac{1}{2a} A_{,rr} + r A_{,r} \text{th}(ar^2 + b) + A \frac{\partial}{\partial r} (r \text{th}(ar^2 + b)) = \frac{2a\lambda r}{\text{ch}^2(ar^2 + b)}.$$

W wyniku scałkowania tego równania otrzymuje się następującą postać mnożnika Lagrange'a:

$$(3.17) \quad A(r) = \frac{1}{\text{ch}(ar^2 + b)} \left[\int_0^r (2a\lambda \text{sh}(ar^2 + b) + c_2 \text{ch}(ar^2 + b)) dr + c_3 \right].$$

Jeżeli założymy, że zachodzi nierówność

$$f_{,r}(r) \leq f_{,r}^1(r),$$

to funkcje (3.16) i (3.17) muszą spełniać warunki (3.13)₆₋₈. Z (3.13)₈ wynika, że $c_3 = 0$. Stałą c_2 wyznacza się z następującego warunku:

$$\frac{1}{p} \operatorname{cth}(ar^2 + b) \lambda + \int_0^{\frac{1}{r}} \operatorname{ch}(ar^2 + b) dr = 0,$$

wynikającego z równań (3.13)_{6,7}. Ma ona następującą postać

$$(3.18) \quad \frac{c_2}{p} = -\operatorname{sh}(ar^2 + b) - \frac{\mu}{s} \operatorname{ch}(ar^2 + b).$$

Jeśli przyjmiemy układ współrzędnych zgodnie z rys. 4, to μ w wyrażeniu (3.18) określa położenie pierścienia zewnętrznego, a stała c_1 w (3.16) jest równa zero.

Długość cięgna wynosi

$$(3.19) \quad s = \int_0^{\frac{1}{r}} \operatorname{ch}(ar^2 + b) dr.$$

Wstawiając (3.16) i (3.17) do równania (3.13)₇, można je przekształcić do postaci

$$s + \frac{2a^2 r^2 \lambda \mu}{p \operatorname{ch}(ar^2 + b)} + \frac{ac_2 r^2 s}{p \operatorname{ch}(ar^2 + b)} - \frac{2a^2 \lambda}{p \operatorname{ch}(ar^2 + b)} \int_0^{\frac{1}{r}} r^2 \operatorname{sh}(ar^2 + b) dr - \\ - \frac{ac_2}{p \operatorname{ch}(ar^2 + b)} \int_0^{\frac{1}{r}} r^2 \operatorname{ch}(ar^2 + b) dr = 0.$$

Po wyeliminowaniu stałych c_2 i λ za pomocą zależności (3.13)₄ oraz (3.18) — równanie to przyjmie postać

$$(3.20) \quad \frac{s}{a} \operatorname{ch}(ar^2 + b) + \frac{\mu}{s} \operatorname{ch}(ar^2 + b) \int_0^{\frac{1}{r}} r^2 \operatorname{ch}(ar^2 + b) dr - \\ - \operatorname{ch}(ar^2 + b) \int_0^{\frac{1}{r}} r^2 \operatorname{sh}(ar^2 + b) dr - r^2 s \operatorname{sh}(ar^2 + b) + \\ + \operatorname{sh}(ar^2 + b) \int_0^{\frac{1}{r}} r^2 \operatorname{ch}(ar^2 + b) dr = 0.$$

Można zauważyć, że otrzymane równanie podzielone przez a jest przyrównaną do zera pochodną względem parametru a następującej funkcji:

$$(3.21) \quad \rho = \frac{s}{a} \operatorname{ch}(ar^2 + b).$$

Należy przy tym uwzględnić wzór

$$\frac{db}{da} = -\frac{1}{s} \int_0^r r^2 \operatorname{ch}(ar^2 + b) dr,$$

który uzyskuje się w wyniku różniczkowania względem parametru a równania

$$(3.22) \quad \mu = \operatorname{ch} b \int_0^r \operatorname{sh} ar^2 dr + \operatorname{sh} b \int_0^r \operatorname{ch} ar^2 dr.$$

Wyrażenie (3.21) jest funkcją objętości cięgien, będącą punktem wyjścia rozważań zawartych w pracy [2]. Po przekształceniu równanie (3.20) przyjmuje postać

$$(3.23) \quad s^2 [3 - 2ar^2 \operatorname{th}(ar^2 + b)] - s\mu \operatorname{th}(ar^2 + b) - s[r \operatorname{ch}(ar^2 + b) - r^0 \operatorname{ch}(ar^2 + b)] + \\ + [\mu + s \operatorname{th}(ar^2 + b)] [r \operatorname{sh}(ar^2 + b) - r^0 \operatorname{sh}(ar^2 + b)] - \mu^2 = 0.$$

Z równań (3.19), (3.22) oraz (3.23) można wyznaczyć optymalną wartość a . Gdyby $f_{,r}(r) > f_{,r}(r)$, wówczas należałoby warunki (3.13)_{6,8} zastąpić odpowiednimi warunkami przytoczonymi na końcu p. 3.2.

Zagadnienia te podane w innym ujęciu są przedmiotem rozważań pracy [2]. Podano tam też wykresy optymalnych kształtów cięgien. Ponieważ przyjęcie $f_{,\varphi} = 0$ nie doprowadziło do sprzeczności zagadnienia granicznego (3.13), przeto ustrojem optymalnym dla założonego sposobu zawieszenia cięgien jest ustrój osiowo-symetryczny.

4. PRZYPADEK USYTUOWANIA CIĘGIEN W PIONOWYCH PŁASZCZYZNACH RÓWNOLEGŁYCH

Problem wyznaczenia kształtu przekrycia wiszącego rozpatrzmy tu przy założeniu, że cięgna leżą w pionowych płaszczyznach równoległych. Podobnie jak w p. 3 przyjmujemy, że optymalną powierzchnię przekrycia można przedstawić w postaci normalnej względem płaszczyzny poziomej, tj. w postaci

$$x_3 = f(x_1, x_2).$$

Wykorzystując związki wyprowadzone w p. 5 pracy [6], można podobnie jak w p. 3 przekształcić funkcjonal (3.2) do następującej postaci:

$$(4.1) \quad v = \int_Q \int \lambda(x_2) \sqrt{1 + f_{,x_1}^2} dx_1 dx_2.$$

Warunek nieprzekroczenia naprężeń w żadnym z cięgien ustroju przyjmuje podobną postać do nierówności (3.4), czyli

$$(4.2) \quad \bigwedge_{(x_1, x_2) \in Q} \kappa \sqrt{1 + f_{,x_1}^2} \leq \lambda(x_2),$$

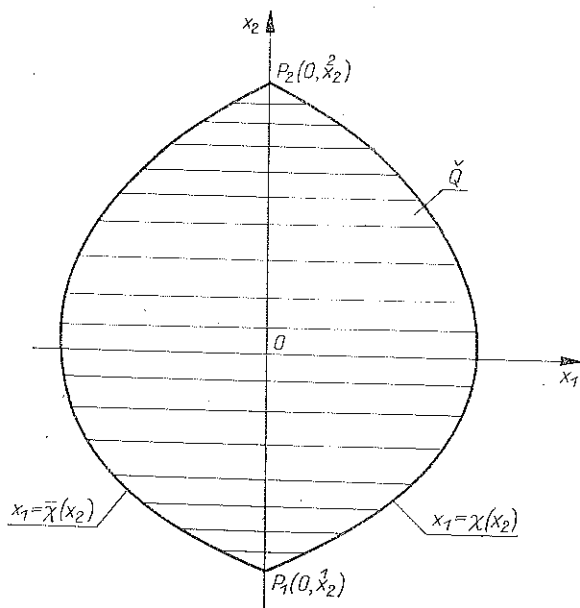
gdzie $\lambda(x_2)$ jest maksymalną gęstością porównawczą sił w cięgnach. Charakteryzuje ona również rozmieszczenie cięgien w rzucie na płaszczyznę x_1, x_2 .

Optymalna powierzchnia ustroju, realizująca minimum funkcjonału (4.1) musi być w równowadze, tzn. musi spełniać równanie ([6], p. 5)

$$(4.3) \quad \frac{\kappa}{p} f_{,x_1 x_1} - \sqrt{1 + f_{,x_1}^2 + f_{,x_2}^2} = 0,$$

gdzie κ jest pewną funkcją tylko jednej zmiennej $x_2 - \kappa(x_2)$. Problem poszukiwania kształtu przekrycia wiszącego z warunku na minimum objętości elementów nośnych jest więc zagadnieniem wariacyjnym poszukiwania argumentu minimum funkcjonału (4.1) z aholonomicznymi warunkami ubocznymi (4.2) i (4.3), tj. warunkiem nieprzekroczenia naprężeń dopuszczalnych w żadnym z cięgien przekrycia i równaniem równowagi ustroju.

W wyniku analogicznego rozumowania do rozumowania podanego na początku p. 3.2, uzyskuje się równość (rys. 5)



Rys. 5

$$(4.4) \quad \kappa \sqrt{1 + f_{,x_1}^{(x_2)}} = \lambda,$$

gdzie

$$f_{,x_1}^{(x_2)} = f_{,x_1}(x_2(x_2), x_2).$$

Przyjęto przy tym, że

$$f_{,x_1}^{(x_2)} \geq f_{,x_1}^{(x_1)}.$$

Poprzednio sformułowane zagadnienie wariacyjne sprowadziło się do warunków: minimum całki (4.1) równania równowagi ustroju wiszącego (4.3) i warunku wyko-

rzystania naprężeń w przekrojach cięgien położonych wzdłuż prawego łuku pierścienia konturowego (4.4). Zagadnienie to można rozwiązać metodą nieokreślonych mnożników Lagrange'a jak w przypadku ustroju wiszącego o cięgnach leżących w płaszczyznach tworzących pęk płaszczyzn (p. 3).

Rozwiązanie zagadnienia wariacyjnego (4.1), (4.3) i (4.4) dla kształtu pierścienia konturowego jak na rys. 5 sprowadza się do następującego zagadnienia granicznego (por. (3.13)):

$$\begin{aligned}
 & \check{Q} \{ \chi_1(x_2) \leq x_1 \leq \chi_2(x_2) \}, \\
 & f(\chi_i(x_2), x_2) = \mu_i(x_2), \quad i=1, 2, \\
 & \frac{\kappa}{p} f_{,x_1 x_1} - \sqrt{1+f_{,x_1}^2+f_{,x_2}^2} = 0, \quad \kappa \sqrt{1+f_{,x_1}^2} = \lambda, \\
 & \frac{\kappa}{p} A_{,x_1 x_1} + \frac{f_{,x_1}}{\sqrt{1+f_{,x_1}^2+f_{,x_2}^2}} A_{,x_1} + \frac{f_{,x_2}}{\sqrt{1+f_{,x_1}^2+f_{,x_2}^2}} A_{,x_2} + \\
 (4.5) \quad & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{f_{,x_1}}{\sqrt{1+f_{,x_1}^2+f_{,x_2}^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{f_{,x_2}}{\sqrt{1+f_{,x_1}^2+f_{,x_2}^2}} \right) \right] A = \frac{\lambda f_{,x_1 x_1}}{(1+f_{,x_1}^2)^{3/2}}, \right. \\
 & \left[\frac{\kappa}{p} A - \frac{1}{p} \frac{\kappa f_{,x_1}}{1+f_{,x_1}^2} \int_{x_1}^{x_2} A f_{,x_1 x_1} dx_1 \right]_{x_1=\chi_2(x_2)} = 0, \\
 & \int_{x_1}^{x_2} \left(\sqrt{1+f_{,x_1}^2} + \frac{1}{p} \frac{A f_{,x_1 x_1}}{\sqrt{1+f_{,x_1}^2}} \right) dx_1 = 0, \\
 & A(\chi_1(x_2), x_2) = 0, \quad f_{,x_1}(\chi_2(x_2), x_2) \geq f_{,x_1}(\chi_1(x_2), x_2).
 \end{aligned}$$

Jeżeli cięgna w rzucie na płaszczyznę x_1, x_2 są rozmieszczone w równych odległościach, to warunek (4.5)₆ wyraża się następującym równaniem (por. (3.15)):

$$(4.6) \quad \int_{\check{Q}} \int \left(\sqrt{1+f_{,x_1}^2} + \frac{1}{p} \frac{A f_{,x_1 x_1}}{\sqrt{1+f_{,x_1}^2}} \right) dx_1 dx_2 = 0,$$

a maksymalna gęstość sił w cięgnach $\lambda(x_2) = \text{const}$.

W przypadku założonej wartości λ — jest to równoznaczne z przyjęciem zwisu cięgna o największej rozpiętości. Powierzchnia przekrycia, będąca rozwiązaniem następującego zagadnienia granicznego:

$$\begin{aligned}
 & \check{Q}(\chi_1(x_2) \leq x_1 \leq \chi_2(x_2)), \\
 & f(\chi_i(x_2), x_2) = \mu_i(x_2), \quad i=1, 2, \\
 & \kappa \sqrt{1+f_{,x_1}^2} = \lambda, \quad \frac{\kappa}{p} f_{,x_1 x_1} - \sqrt{1+f_{,x_1}^2+f_{,x_2}^2} = 0,
 \end{aligned}$$

jest powierzchnią gwarantującą minimum całki (4.1), spośród wszystkich innych powierzchni przekryć o tym samym rozmieszczeniu cięgien w rzucie i tym samym

zwisie ciągła o największej rozpiętości. Tak więc uzyskane w ten sposób przekrycie jest optymalne przy dodatkowo założonym zwisie ciągła największej rozpiętości.

Gdy zachodzi nierówność przeciwna do (4.5)₇, to warunki (4.5)_{5,7} przyjmują analogiczną postać do wzorów przytoczonych na końcu p. 3.2.

4.1. Optymalny kształt ustroju zawieszonego na dwóch równoległych ryglach ram podporowych

Zagadnienie graniczne (4.5) zilustrujemy na prostym przykładzie ustroju zawieszonego na dwóch równoległych ryglach ram podporowych. Niech rygle tych ram znajdują się na jednakowych poziomach. Udowodnimy, że optymalną powierzchnią przekrycia jest powierzchnia walcowa, której kierującą jest krzywa łańcuchowa. Istotnie, zakładając, że ustrojem optymalnym jest powierzchnia walcowa czyli $f_{,x_2}=0$, można równanie (4.5)₃ rozwiązać. Całką tego równania jest funkcja

$$(4.7) \quad f(x_1) = \frac{\kappa}{p} \left(\operatorname{ch} \frac{px_1}{\kappa} - \operatorname{ch} \frac{pl}{\kappa} \right),$$

spełniająca warunki (4.5)_{2,7}; przyjęto przy tym $\mu_i=0$ oraz $\chi_i = \mp l$ ($i=1, 2$).

Całkowanie równania (4.5)₄ prowadzi do następującej funkcji:

$$(4.8) \quad A(x_1) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{px_1}{\kappa}} \left(D_2 + \lambda \operatorname{ch} \frac{px_1}{\kappa} + D_1 \frac{\kappa}{p} \operatorname{sh} \frac{px_1}{\kappa} \right).$$

Z warunków brzegowych (4.5)_{5,7} można wyznaczyć stałe D_1 i D_2 . Są one równe:

$$(4.9) \quad D_1 = \frac{p\lambda}{\kappa} \frac{\operatorname{cth} \frac{pl}{\kappa} - \frac{\kappa}{pl}}{\operatorname{th} \frac{pl}{\kappa} - \frac{\kappa}{pl}} \operatorname{th} \frac{pl}{\kappa},$$

$$D_2 = \frac{\kappa\lambda}{pl \left(\operatorname{th} \frac{pl}{\kappa} - \frac{\kappa}{pl} \right) \operatorname{ch} \frac{pl}{\kappa}}.$$

Wstawiając wyrażenia (4.9) do (4.8) otrzymuje się następującą postać mnożnika A :

$$A(x_1) = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} \frac{px_1}{\kappa}} \left[\frac{\frac{\kappa}{pl}}{\left(\operatorname{th} \frac{pl}{\kappa} - \frac{\kappa}{pl} \right) \operatorname{ch} \frac{pl}{\kappa}} + \operatorname{ch} \frac{px_1}{\kappa} + \frac{\operatorname{cth} \frac{pl}{\kappa} - \frac{\kappa}{pl}}{\operatorname{th} \frac{pl}{\kappa} - \frac{\kappa}{pl}} \operatorname{th} \frac{pl}{\kappa} \operatorname{sh} \frac{px_1}{\kappa} \right].$$

Warunek (4.5)₆ po wykorzystaniu ostatniego wyrażenia oraz równań (4.7) i (4.5)₃ prowadzi do równania przestępnego postaci

$$(4.10) \quad \frac{pl}{\kappa} - \operatorname{th} 2 \frac{pl}{\kappa} = 0.$$

Pierwiastkiem tego równania jest $p/\kappa=0,955$. Optymalny zwis ustroju $|f|_{\max}/2l = 0,258$ otrzymuje się z równania (4.7), wstawiając doń otrzymaną wartość pierwiastka równania (4.10). Ponieważ przyjęcie $f_{,x_2}=0$ dla ustroju zamierzonego na dwóch równoległych ryglach ram podporowych nie doprowadziło do sprzeczności zagadnienia granicznego (4.5), więc optymalne przekrycie jest w tym przypadku powierzchnią walcową o kierującej danej równaniem (4.7). Wyznaczony optymalny zwis jest identyczny z uzyskanym w pracach [3 i 7] na innej drodze.

5. PRZYKŁADY OPTIMALNYCH KSZTAŁTÓW USTROJÓW O CIĘGNACH LEŻĄCYCH W RÓWNO ODLEGŁYCH PŁASZCZYZNACH

5.1. Opis opracowanego programu na komputer

Zagadnienie optymalizacji kształtu przekrycia wiszącego o cięgnach leżących w równo odległych płaszczyznach pionowych, zawieszonych na pierścieniu konturowym symetrycznym względem płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzn cięgien, zaprogramowano w języku ALGOL na komputer ODRA 1204. W przypadku zastosowania metody Rothego do jego rozwiązania zagadnienie to można napisać w następującej postaci (por. (4.5)₁₋₃):

$$(5.1) \quad \hat{Q} \{ -\chi(x_2) \leq x_1 \leq +\chi(x_2) \},$$

$$f(\mp \chi(x_2), x_2) = \mu(x_2),$$

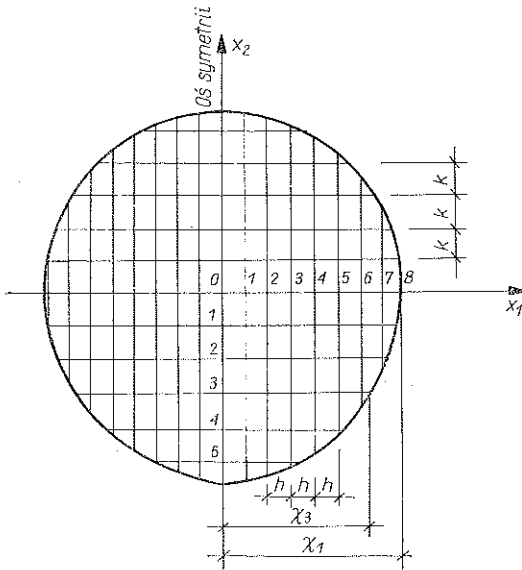
$$\kappa_j \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right)^2} = \lambda,$$

$$\frac{\kappa_j}{p} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_1^2}$$

$$- \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right)^2} + \frac{1}{k^2} (f_j - f_{j-1})^2 = 0,$$

gdzie

$$f_j = f(x_1, x_2),$$



Rys. 6

$k = x_2^j - x_2^{j-1}$ jest przyjętym odstępem cięgien w rzucie (rys. 6), λ zaś oznacza pewną stałą. Przyjęcie wartości liczbowej λ jest równoznaczne z założeniem zwisu $\frac{|f_j|_{\max} - \mu_j}{2\chi_j}$ jednego z cięgien.

Opracowany program daje możliwość wyznaczenia powierzchni przekrycia przy założonym zwisie jednego z cięgien, jak również w przypadku, gdy ten zwis nie jest

określony, a poszukiwany z warunku na minimum objętości cięgien przykrycia, czyli z warunku na minimum funkcji (por. 4.1)

$$(5.2) \quad v = \lambda \sum_{j=0}^{j=n} \int_{-x_j}^{x_j} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\right)^2} dx_1.$$

Zagadnienie (5.1), (5.2) można rozwiązać za pomocą programu w sposób bardzo prosty, gdy wiadomo, że wzdłuż któregoś z cięgien $\partial f_j / \partial x_2 = 0$; pozwala to na wyznaczenie kształtu tego ciągu.

Rzędne optymalnej powierzchni ustroju wyznaczane są na podstawie następujących danych:

- a) założonego rzutu poziomego przekrycia wiszącego $\chi(x_2^j)$;
- b) określonego ukształtowania pierścienia konturowego w kierunku pionowym $\mu(x_2^j)$; gdy ustrój ma być zawieszony na dwóch płaskich łukach, powinien być dany tangens kąta nachylenia tych łuków do poziomu;
- c) założonej wartości λ , co jest równoznaczne z założeniem zwisu $|f_0|_{\max} / 2\chi_0$ ciągu początkowego (ciągnę, wzdłuż którego $(\partial f / \partial x_2)(x_1, x_2) = 0$).

Program umożliwia również wyznaczenie optymalnej wartości parametru λ .

Wyniki obejmują rzędne powierzchni $f(x_1^i, x_2^j)$, a także ewentualnie jej pochodne $\partial f(x_1^i, x_2^j) / \partial x_1$ w punktach siatki prostokątnej o wymiarach oczek nie mniejszych niż h i k (rys. 6). Niezależnie drukowane są długości cięgien.

5.2. Przykłady szczegółowych rozwiązań

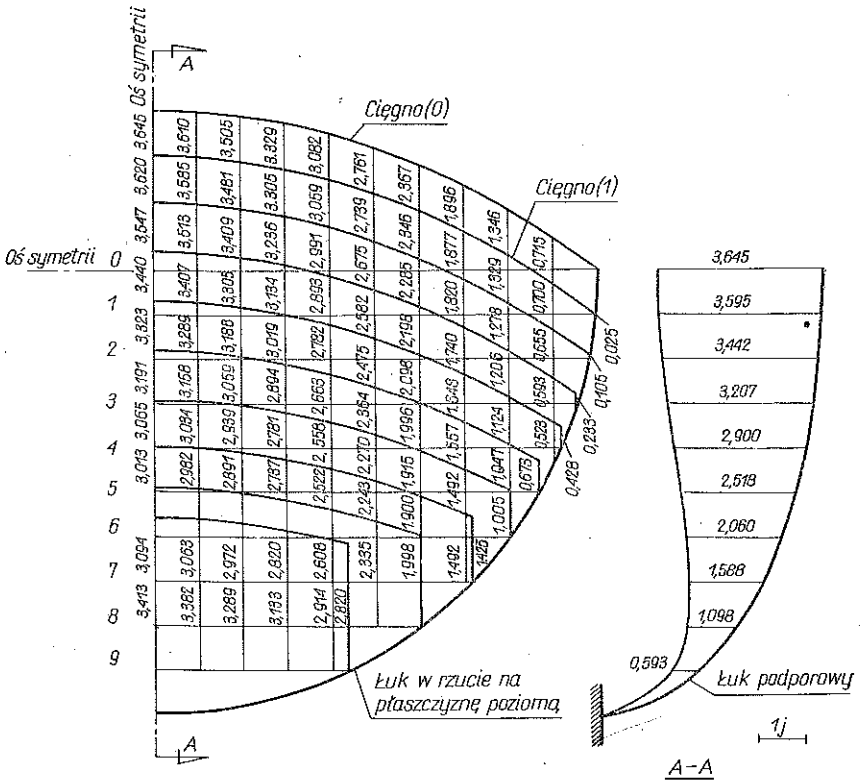
Przykład 1. Na rys. 7 przedstawiony jest optymalny ustrój zawieszony nad rzutem kołowym dla przyjętego rozstawu cięgien w rzucie $k=0,5$ (pokazano co drugie ciągnę) przy założonym zwisie ciągu środkowego $|f_0|_{\max} / 2\chi_0 = 0,1823$. Płaszczyzny łuków podporowych przyjęto nachylone do poziomu pod kątem $\alpha = 26^\circ 35'$ ($\text{tg } \alpha = 0,5$). Ciągna przedstawione są w kładzie na płaszczyznę poziomą. Długości poszczególnych cięgien zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

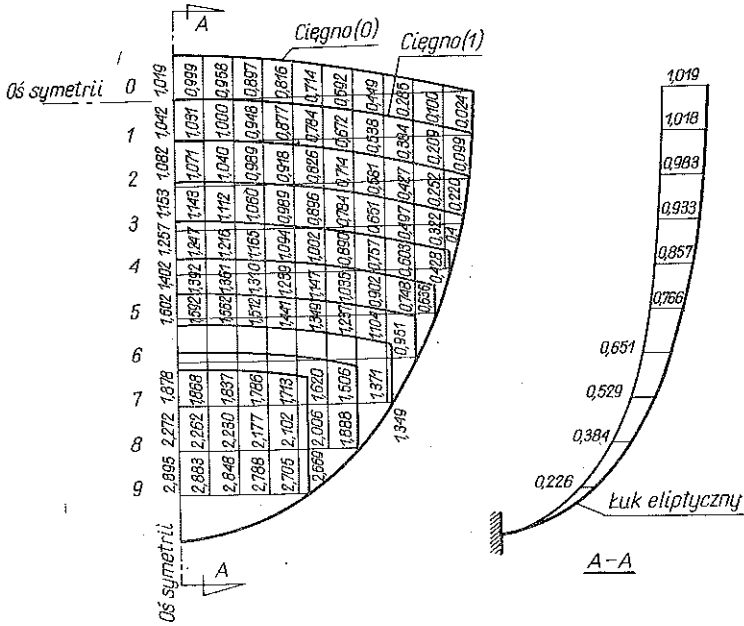
Ciągnę	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$
Długości cięgien s_j	21,662	21,540	21,112	20,442	19,483	18,251	16,669	14,761	12,295	8,827

Przykład 2. Optymalny ustrój zawieszony nad rzutem eliptycznym przy założonym zwisie ciągu środkowego $|f_0|_{\max} / 2\chi_0 = 0,0756$ przedstawiony jest na rys. 8. Rozstaw cięgien przyjęto równy $k=0,5$ (pokazano co drugie ciągnę). Płaszczyzny łuków podporowych przyjęto nachylone do poziomu pod kątem $\alpha = 35^\circ$.

Półwki rozpiętości cięgien ustroju oraz półwki ich długości zestawiono w tablicy 2.



Rys. 7

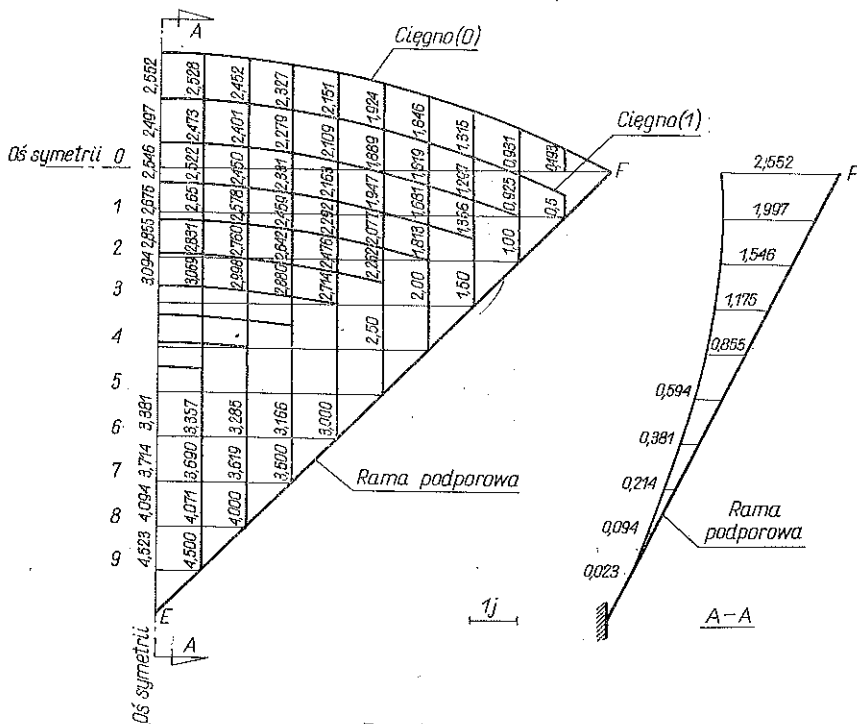


Rys. 8

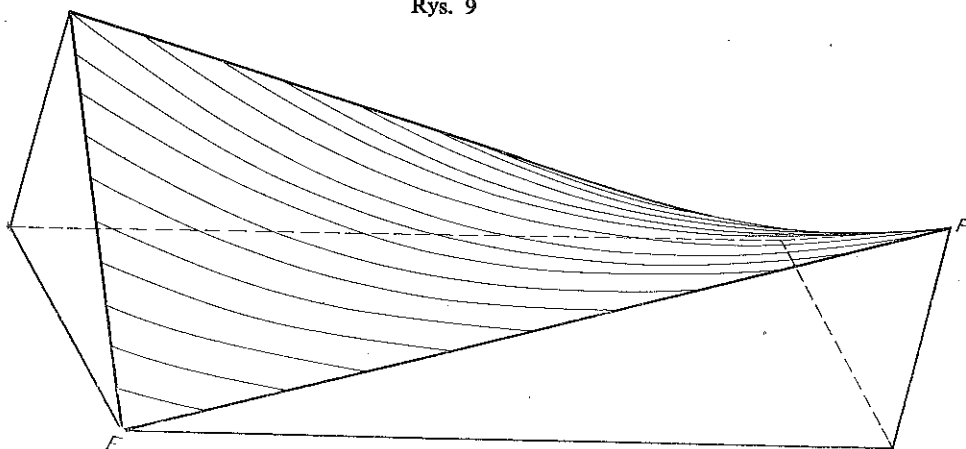
Tablica 2

Cięgno j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_j	6,76	6,726	6,618	6,446	6,189	5,851	5,401	4,833	4,066	2,947
$s_j/2$	6,847	6,827	6,714	6,535	6,268	5,917	5,453	4,872	4,091	2,959

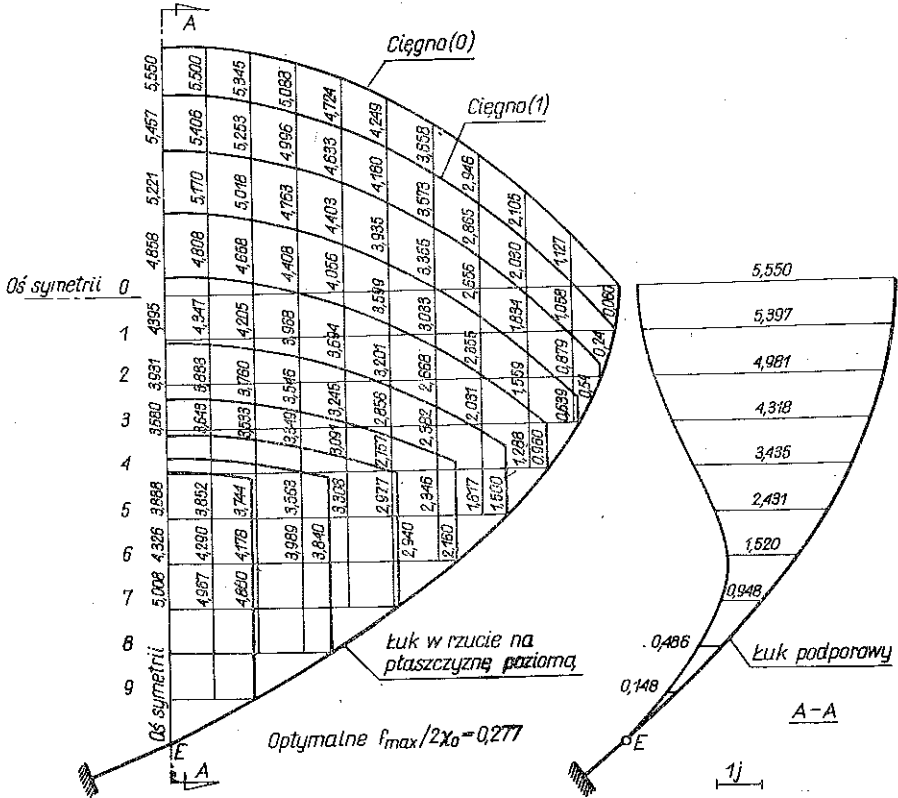
Przykład 3. Na rys. 9 przedstawiony jest ustrój optymalny zawieszony nad rzutem kwadratowym dla przyjętego rozstawu cięgien w rzucie, $k=0,5$ (pokazano



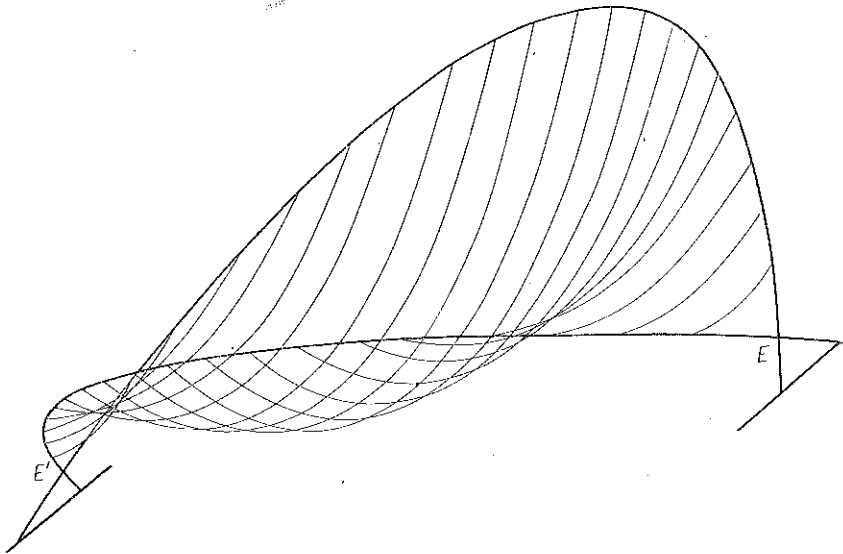
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

co drugie cięgno). Płaszczyzny ram podporowych nachylone są do poziomu pod kątem $\alpha=26^{\circ}35'$. Zwis cięgna środkowego przyjęto równy $|f_0|_{\max}/2\chi_0=0,1276$.

Otrzymany ustrój jest pokazany na rys. 10 w aksonometrii.

W tablicy 3 zestawiono połówki rozpiętości cięgien oraz ich długości.

Przykład 4. Na rys. 11 przedstawiono optymalny ustrój zawieszony na łukach parabolicznych dla przyjętego rozstawu cięgien w rzucie, $k=0,5$. (pokazano co drugie

Tablica 3

Cięgno j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_j	10,0	9,0	8,0	7,0	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0
$s_j/2$	10,400	9,290	8,196	7,130	6,081	5,047	4,024	3,010	2,003	1,001

cięgno). Płaszczyzny łuków podporowych przyjęto nachylone do poziomu pod kątem $\alpha=31^{\circ}$. Zwis cięgna środkowego (0) został tu wyznaczony przy zastosowaniu opracowanego programu na komputer z warunku na minimum całki (5.2) i wynosi $|f_0|_{\max}/2\chi_0=0,277$.

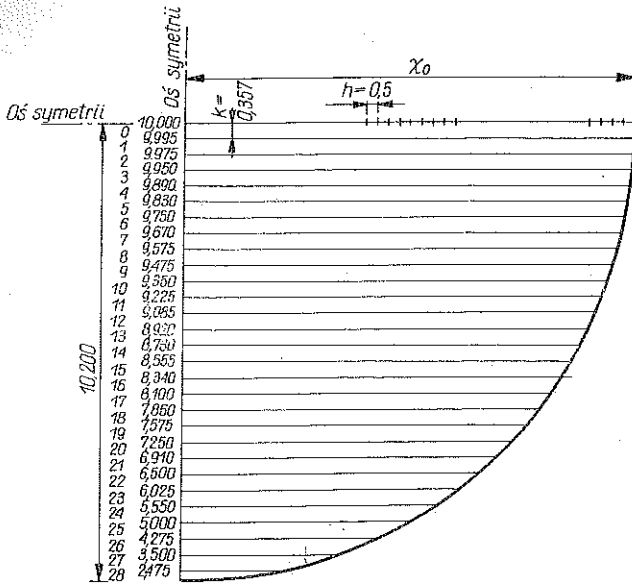
Cięgna przedstawione są w kładzie na płaszczyznę poziomą.

Na rys. 12 przedstawiono określony ustrój w aksonometrii. Czas obliczenia powyższego przykładu na komputerze ODRA 1204 wynosi około 45 min. Gdy zwis cięgna środkowego 0 jest założony, czas obliczeń nie przekracza 6 min.

5.3. Wpływ rozmieszczenia cięgien na optymalną powierzchnię

Wpływ zmian rozstawu cięgien w rzucie na optymalną powierzchnię przekrycia zbadano na przykładzie ustroju zawieszzonego nad obranym rzutem poziomym (rys. 13). Obliczenia przeprowadzono dla pewnego przyjętego rozstawu cięgien k , który w następnych przykładach zwiększono dwukrotnie i czterokrotnie. Założono przy tym, że zwis cięgna środkowego jest równy $|f_0|_{\max}/2\chi_0=0,2715$. Rzędne opisujące kształty niektórych cięgien ustroju dla zmiennego ich rozstawu zamieszczono w tablicy 4.

Z tablicy 4 wynika, że względne różnice rzędnych opisujących kształty cięgien przy dwukrotnym zwiększeniu ich rozstawu nie przekraczają 2,5%, przy czterokrotnym zaś nie przekraczają 6%. Ten niewielki wpływ zmian rozstawu cięgien na optymalną powierzchnię przekrycia zawieszzonego nad obranym pierścieniem konturowym uzasadnia traktowanie zagadnień dyskretnych metodami ośrodka włóknistego, a ponadto wskazuje na to, że wpływ rozstawu cięgien w ustroju optymalnym na ich objętość nie jest znaczny. Tak więc można z wystarczającą dokładnością stwierdzić, że dla danego pierścienia konturowego istnieje jedna powierzchnia optymalna, praktycznie niezależna od wielkości rozstawu cięgien.



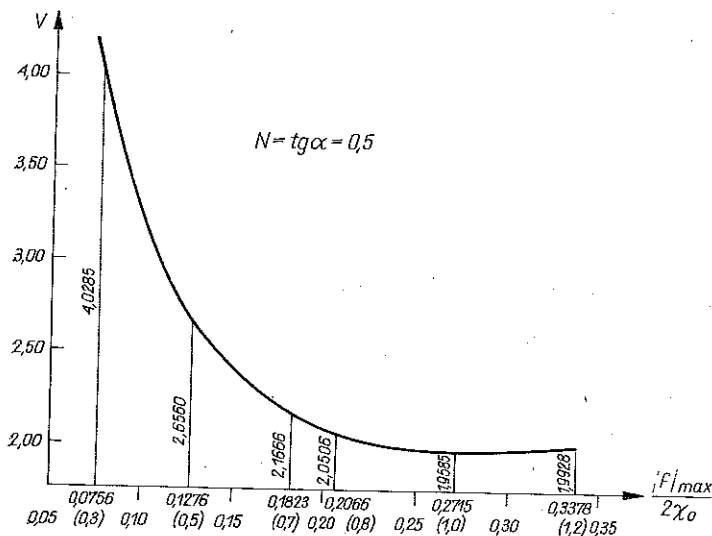
Rys. 13

Tablica 4

$h=0,5$	k	i				
		0	4	8	12	16
Cięgno 4 ($j=4$)	0,357	5,3162	5,1158	4,5043	3,4574	1,9334
	0,714	5,2775	5,0776	4,4696	3,4295	1,9168
	1,428	5,2408	5,0421	4,4376	3,4041	1,9020
Cięgno 8 ($j=8$)	0,357	4,9762	4,7732	4,1571	3,1047	1,5760
	0,714	4,9209	4,7208	4,1113	3,0698	1,5578
	1,428	4,8581	4,6597	4,0570	3,0283	1,5360
Cięgno 12 ($j=12$)	0,357	4,4410	4,2370	3,6193	2,5665	1,0421
	0,714	4,3744	4,1744	3,5657	2,5279	1,0260
	1,428	4,2960	4,0987	3,5000	2,4804	1,0062
Cięgno 16 ($j=16$)	0,357	3,7005	3,4969	2,8784	1,8262	0,3076
	0,714	3,6328	3,4324	2,8244	1,7909	0,3013
	1,428	3,5508	3,3531	2,7583	1,7484	0,2941
Cięgno 20 ($j=20$)	0,357	2,7473	2,5440	1,9281	0,8831	—
	0,714	2,6872	2,4879	1,8847	0,8625	—
	1,428	2,6063	2,4124	1,8268	0,8355	—
Cięgno 24 ($j=24$)	0,357	1,5566	1,3559	0,7511	—	—
	0,714	1,5213	1,3254	1,7351	—	—
	1,428	1,4658	1,2773	0,7085	—	—
Cięgno 28 ($j=28$)	0,357	0,2668	0,0922	—	—	—
	0,714	0,2671	0,0925	—	—	—
	1,428	0,2664	0,0924	—	—	—

5.4. Wpływ wielkości zwisu ciężna początkowego na objętość cięgien nośnych ustroju

Na przykładzie przekrycia wiszącego, zawieszono na dwóch przeciwnych łukach nachylonych do poziomu pod kątem $\alpha=26^{\circ}35'$, zbadano wpływ wielkości zwisu ($|f_0|_{\max}/2\chi_0$) ciężna początkowego (środkowego, 0) na objętość elementów nośnych ustroju. Rzut poziomy przekrycia pokazany jest na rys. 13. Rozstaw cięgien



Rys. 14

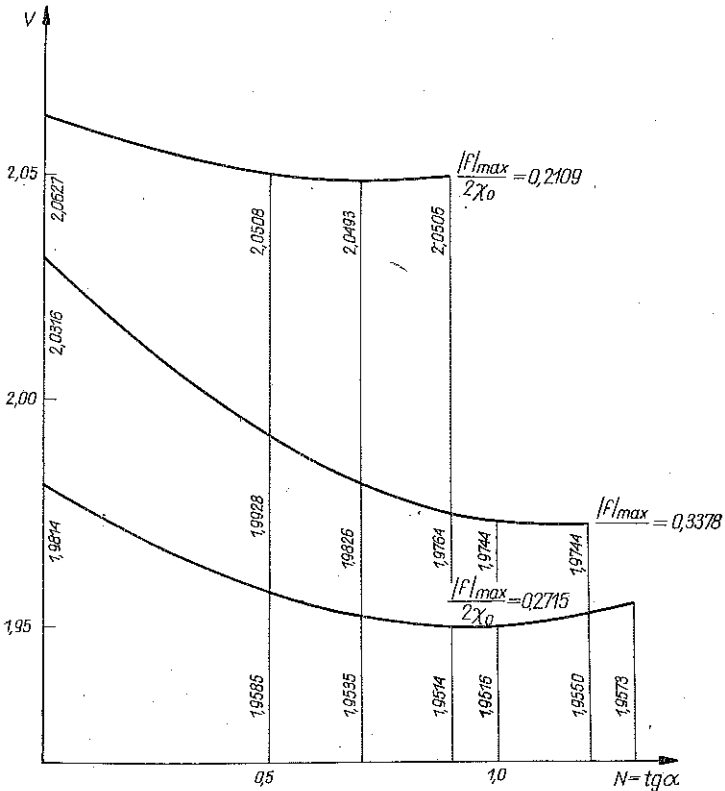
przyjęto za równy $k=1,428$. Przeprowadzone obliczenia pozwoliły sporządzić wykres funkcji objętości cięgien ustroju w zależności od zwisu ciężna początkowego (rys. 14). Z rys. 14 wynika, że wpływ ten jest istotny i w miarę zmniejszania zwisu objętość szybko wzrasta. Np. przy zmianie zwisu ciężna początkowego z $|f_0|_{\max}/2\chi_0=0,271$ na $|f_0|_{\max}/2\chi_0=0,1$ objętość cięgien nośnych ustroju wzrasta blisko 65%.

5.5. Wpływ zmiany nachylenia płaszczyzny łuku podporowego na objętość cięgien nośnych

Wpływ zmiany nachylenia płaszczyzny łuku podporowego do poziomu na objętość cięgien nośnych zbadano na przykładzie przekrycia zawieszono nad rzutem poziomym, pokazanym na rys. 13, dla trzech różnych przyjętych zwisów ciężna początkowego: 0,2109; 0,2715; 0,3278.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń sporządzono wykresy zmian objętości lin nośnych przekrycia w zależności od nachylenia płaszczyzn łuków podporowych do poziomu (rys. 15). Z wykresów tych wynika, że nawet znaczna zmiana nachylenia płaszczyzn łuków podporowych w minimalnym stopniu wpływa na zmianę objętości cięgien.

Dla każdego założonego zwisu ciężna początkowego istnieje pewne optymalne nachylenie płaszczyzn łuków, przy którym objętość elementów nośnych ustroju osiąga minimum. Widoczne jest, że małym zwisom ciężna początkowego odpowiada małe optymalne nachylenia płaszczyzn łuków do poziomu.



Rys. 15

6. WNIOSKI

Otrzymane w pracy rozwiązania szczegółowe przekryć wiszących z ciężien o stałym przekroju poprzecznym, leżących w płaszczyznach równo odległych, pozwalają na ustalenie następujących wniosków:

- 1) powierzchnia optymalna przekrycia wiszącego jest praktycznie niezależna od rozstawu ciężien;
- 2) stwierdzono, że wpływ zwisu ciężna największej rozpiętości na objętość elementów nośnych przekrycia jest znaczny; jego optymalna wartość jest najmniejsza dla przekrycia walcowego (0,258);
- 3) zmiana nachylenia płaszczyzn łuków podporowych ma minimalny wpływ na objętość elementów nośnych ustroju. Małym zwisom ciężna największej rozpiętości

(początkowego) odpowiadają niewielkie optymalne nachylenia płaszczyzn łuków podporowych do poziomu.

Otrzymane w pracy wyniki mogą być wykorzystane do kształtowania optymalnych przekryć z płaskich wstępnie naprzężonych ustrojów dwupasowych [4].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. E. ELSGOLC, *Rachunek wariacyjny* [tłum. z rosyjskiego], PWN, Warszawa 1960.
2. S. JENDO, *Metoda kształtowania ustrojów ciągnowych osiowo-symetrycznych*, *Rozp. Inżyn.*, **17**, 2, 249 - 267, 1969.
3. S. JENDO, *Optimum design of method for suspended structures. Application of the minimum weight criterion*, *Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn.*, **17**, No 2, 1969.
4. S. JENDO, *Optimum design prestressed two-surface hanging structures*, *Arch. Inżyn. Łąd.*, **16**, 4, 1970.
5. St. KEMPNY, *Optymalizacja kształtu pewnych przestrzennych ustrojów ciągnowych*, [praca doktorska], Gliwice 1972.
6. St. KEMPNY, *Wyznaczenie kształtu powierzchniowego ustroju wiszącego o jednokierunkowym przebiegu cięgien*, *Arch. Inżyn. Łąd.*, **19**, 4, 1973.
7. Ф. Отто, К. Шлейер, *Тентовые и вантовые строительные конструкции*, перевод с немецкого, Издат. Литер. по Стр., Москва 1970.
8. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ПОДВЕСНОГО ПЕРЕКРЫТИЯ С ОДНОНАПРАВЛЕННЫМ ХОДОМ СВЯЗЕЙ

В работе определена форма подвесного перекрытия с однонаправленным ходом связей, нагруженного собственным весом перекрытия, из условия минимума объема несущих элементов. Для случая хода связей в вертикальных, равноудаленных плоскостях, подвешенных на двух противолежащих арках, представлены примеры детальных решений опираясь на разработанную программу ЭВЦМ ОДРА 1204.

SUMMARY

OPTIMIZATION OF A SUSPENDED COVER CONSISTING OF UNI-DIRECTIONAL CABLES

Optimal shape of a suspended cover is determined in the paper, the structure consisting of cables running in one direction, loaded by its own weight; volume of the structural elements is considered as the optimization criterion. In the case in which the cables are running in equally spaced vertical planes and are attached to two arches, particular solution are presented on the basis of a special program prepared for the ODRA 1204 electronic computer.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA w GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 czerwca 1973 r.