

BADANIE STATECZNOŚCI I OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU SPRĘŻYŚCIE UTWIERDZONEGO PRĘTA ROZCIĄGANEGO

ANTONI GAJEWSKI i RAFAŁ PALEJ (KRAKÓW)

1. WSTĘP

Projektowanie współczesnych konstrukcji wymaga coraz częściej optymalnego doboru kształtu elementów poddanych działaniu obciążeń, powodujących utratę ich stateczności. Klasa stosowanych w praktyce obciążeń uległa przy tym znacznemu rozszerzeniu. Pojawiła się konieczność badania przypadków obciążenia, w których działająca siła zmienia swój punkt przyłożenia (względem konstrukcji) oraz zmienia kierunek działania, jak również przypadków, w których obciążenie nie ma potencjału (zagadnienia niekonserwatywne). Również metody rozwiązywania zagadnień stateczności uległy zmianie; prosta metoda Eulera (tzw. statyczne kryterium stateczności) na ogół nie może być stosowane do przypadków niekonserwatywnego obciążenia konstrukcji, gdzie należy stosować tzw. kinetyczne kryterium stateczności (zagadnienie M. BECKA [1]).

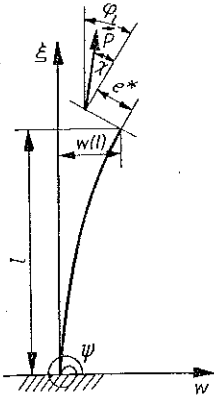
Szereg ogólnie znanych monografii np. S. P. TIMOSHENKI, J. M. GERE'A [8], J. NALESZKIEWICZA [7] i innych poświęconych jest głównie badaniu utraty stateczności elementów ściskanych, chociaż bada się również nieco inny problem utraty stateczności pręta osiowo rozciąganego, polegający na określeniu siły krytycznej, przy której następuje nieograniczony wzrost długości pręta. Tego typu zagadnienia nie będą rozważane w niniejszej pracy; zbadamy natomiast możliwość utraty stateczności pręta rozciąganego, wynikającą ze sposobu zachowania się siły w trakcie wyboczenia.

W pracy H. ZIEGLERA [9] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia stateczności pręta przegubowo podpartego na końcach, obciążonego stałą siłą P , przyłożoną do końca pręta za pomocą sztywnego wspornika o długości a i stycznego do osi pręta w miejscu podparcia. W prostoliniowym położeniu równowagi siła P powoduje rozciąganie osiowe pręta; w trakcie wyboczenia w miejscu podparcia pojawia się moment proporcjonalny do kąta ugięcia pręta w tym punkcie. W omawianej pracy pokazano, że tak w tym jak i w kilku innych prostych przypadkach obciążenia rozciągany pręt może tracić stateczność.

Celem naszej pracy jest uogólnienie zagadnienia pręta rozciąganego na przypadek ogólnego obciążenia oraz optymalizacja kształtu tak obciążonego pręta. Zbadamy mianowicie stateczność sprężyście utwierdzonego pręta rozciąganego stałą co do wartości siłą (rys. 1). Założymy przy tym, że stała rozciągająca siła P , działająca

początkowo w kierunku nieodkształconej osi pręta, zmienia w trakcie wybożenia zarówno kierunek działania jak i punkt przyłożenia i może być siłą konserwatywną lub niekonserwatywną. Istnieje szereg prac poświęconych nie tylko stateczności

ale i optymalizacji kształtu pręta ściskanego siłą o tak ogólnym zachowaniu się; wymienić tu można np. prace A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCZKOWSKIEGO [4 i 5] oraz M. FARSHADA i I. TADJBAKSHA [3]. Natomiast nie znane nam są prace poświęcone stateczności i optymalizacji pręta rozciąganego; wynika to zapewne stąd, iż wydaje się, że pręt rozciągany nie może tracić stateczności. Istotnie, tak jest tylko przy pewnych sposobach obciążenia w trakcie wybożenia; np. siła eulerowska (o stałym kierunku i punkcie przyłożenia) nie powoduje utraty stateczności (w sensie wybożenia) przy dowolnie dużych jej wartościach. Jak wykazemy w niniejszej pracy, istnieje wiele ważnych praktycznie przypadków, w których utrata stateczności może mieć miejsce.



Rys. 1

Przyjmijmy podobnie jak w pracy [6], że nachylenie siły do końcowego przekroju pręta χ oraz przesunięcie jej punktu przyłożenia e^* są analitycznymi funkcjami strzałki ugięcia $f=w(l)$ i kąta $\varphi_1=w'(l)$, które dla małych ugięć można przyjąć w postaci:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} e &= \rho y'(1) + \vartheta y(1), \\ \chi &= \mu y'(1) + \nu y(1), \end{aligned}$$

gdzie bezwymiarowe parametry $\rho, \vartheta, \mu, \nu$ określają obciążenie, $y=w/l$, $x=\xi/l$, $y'=dy/dx$, $e=e^*/l$. Ponadto w sprężystości utwierdzonym przekroju pręta przyjmijmy proporcjonalność momentu utwierdzenia M_u do kąta obrotu φ_u :

$$(1.2) \quad M_u = C_u \varphi_u,$$

gdzie stała C_u charakteryzuje sztywność utwierdzenia. Wzory (1.1) i (1.2) prowadzą do następujących ogólnych warunków brzegowych:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y'(0) &= \psi (gy'')_{x=0}, \\ [gy'']_{x=1} &= \beta [\rho y'(1) + \vartheta y(1)], \\ [(gy'')]_{x=1} &= \beta [\mu y'(1) + \nu y(1)], \end{aligned}$$

w których wprowadzono bezwymiarowe wielkości:

$$(1.4) \quad \beta = \frac{Pl^2}{EJ_0}, \quad \psi = \frac{EJ_0}{lC_u}, \quad g(x) = \frac{J(x)}{J_0}.$$

Założono tu stałość modułu Younga oraz zmienność przekroju określaną przez funkcję $g(x)$, opisującą zmianę momentu bezwładności przekroju poprzecznego.

J_0 jest momentem bezwładności w określonym punkcie $x=x_0$, na ogół w miejscu utwierdzenia ($x_0=0$).

Podstawowym równaniem pozwalającym na zbadanie stateczności przedstawionego na rys. 1 pręta jest równanie jego małych drgań poprzecznych, które dla pręta o zmiennym przekroju może być zapisane w postaci:

$$(1.5) \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(EJ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) - P \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + m(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

W celu zbadania stateczności ruchu pręta wystarczy założyć, że rozwiązanie równania (1.5) ma postać opisującą drgania harmoniczne:

$$(1.6) \quad W(\xi, t) = w(\xi) e^{i\omega t},$$

która prowadzi do równania

$$(1.7) \quad (gy'')'' - \beta y'' - \frac{\omega^2 I^4}{EJ_0} m(x)y = 0,$$

w którym $m(x)$ oznacza masę jednostki długości pręta $m(x) = \bar{\rho} A(x)$; $A(x)$ jest polem powierzchni przekroju poprzecznego, $\bar{\rho}$ stałą gęstością materiału. W dalszym ciągu ograniczymy się do przypadku następującej zależności momentu bezwładności od pola powierzchni:

$$(1.8) \quad A(x) = cJ^\kappa \quad \text{lub} \quad \varphi(x) = [g(x)]^\kappa,$$

gdzie

$$c = \text{const}, \quad \kappa = \text{const}, \quad \varphi(x) = A(x)/A_0, \quad A_0 = A(x_0).$$

Wielkość $\kappa=1/2$ charakteryzuje pręt wszechstronnie równomiernie zbieżny, $\kappa=1$ pręt płasko-zbieżny w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny drgań i $\kappa=1/3$ pręt płasko-zbieżny w płaszczyźnie drgań pręta. Przy powyższych założeniach równanie (1.7) może być zapisane w postaci

$$(1.9) \quad (gy'')'' - \beta y'' - \bar{\alpha} g^\kappa y = 0,$$

w której wprowadzono bezwymiarowy kwadrat częstości:

$$(1.10) \quad \bar{\alpha} = \frac{\bar{\rho} A_0 I^4}{EJ_0} \omega^2.$$

Rozwiązanie ściśle równania (1.9) z warunkami brzegowymi (1.3) nawet przy najprostszych rodzajach funkcji $g(x)$ jest praktycznie niemożliwe; dlatego w dalszych częściach pracy ograniczymy się do zbadania stateczności pręta przyrzątecznego, tzn. założymy $g(x) \equiv 1$, oraz znalezienia optymalnych kształtów pręta w przypadkach ogólnego konserwatywnego zachowania się obciążenia, opierając się na statycznym kryterium stateczności ($\bar{\alpha}=0$). Należy zauważyć, że równanie (1.8) różni się jedynie znakiem drugiego wyrazu od odpowiedniego równania drgań pręta ściskanego.

2. KINETYCZNE KRYTERIUM STATECZNOŚCI

W przypadku pręta przyrmatycznego ($g(x) \equiv 1$) całką ogólną równania (1.9) jest funkcja

$$(2.1) \quad y(x) = C_1 \operatorname{sh} k_1 x + C_2 \operatorname{ch} k_1 x + C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x,$$

gdzie k_1 i k_2 są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$(2.2) \quad \begin{aligned} k^4 - \beta k^2 - \bar{\alpha} &= 0, & k_1 &= \left[\frac{1}{2} (\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\bar{\alpha}}) \right]^{1/2}, \\ k_2 &= \left[\frac{1}{2} (-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\bar{\alpha}}) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

a stałe C_1, \dots, C_4 należy wyznaczyć z warunków brzegowych (1.3). Po prostych obliczeniach okazuje się, że równanie charakterystyczne określające częstość $\bar{\alpha}$ w zależności od siły ściskającej β i współczynników $\rho, \vartheta, \mu, \nu$ i ψ , wyrażone przez zmienne k_1 i k_2 ma dokładnie taką samą postać jak otrzymane w pracy Z. KORDAS [6] dla analogicznego przypadku ściskania pręta. Również warunek, aby pierwiastek równania charakterystycznego, określający częstość drgań, był pierwiastkiem podwójnym (kinetyczne kryterium stateczności) jest dokładnie taki sam jak w pracy [6] i nie będziemy go tu przytaczać. Zatem otrzymany tam układ równań na niewiadome k_1 i k_2 ($\bar{\alpha}, \beta$) nie ulega zmianie i pozwala wyznaczyć siłę krytyczną i częstość krytyczną ze związków

$$(2.3) \quad \beta = k_1^2 - k_2^2, \quad \bar{\alpha} = k_1^2 k_2^2.$$

Uwikłana i skomplikowana postać równań określających k_1 i k_2 nie pozwala na proste znalezienie niewiadomych przy ustalonych wartościach współczynników $\rho, \vartheta, \mu, \nu$ i ψ . Aby zorientować się, czy możliwa jest utrata stateczności pręta rozciąganego przez «flutter» przy pewnych wartościach parametrów, można obrać wartości k_1 i k_2 tak, aby $\beta \geq 0$, i obliczyć dwa z parametrów $\rho, \vartheta, \mu, \nu$ i ψ przy pozostałych równych zeru. Przyjmując np. $\psi = 0, \nu = 0, \vartheta = 0, \rho \neq 0, \mu \neq 0, k_1 = 4, k_2 = \pi/2, \beta = 13,53, \bar{\alpha} = 39,5$ otrzymujemy $\rho = -0,36, \mu = -0,40$. Oczywiście trudno jest znaleźć interpretację fizyczną takiej siły; podany przykład świadczy jednak o tym, że możliwa jest w naszym przypadku utrata stateczności przez narastanie amplitudy drgań.

3. STATYCZNE KRYTERIUM STATECZNOŚCI

Zakładając w dalszym ciągu przyrmatyczność pręta obliczymy wartość siły krytycznej korzystając z równania różniczkowego ugiętej osi pręta, a więc równania (1.9), w którym przyjmiemy częstość drgań równą zeru $\bar{\alpha} = 0$ oraz $g(x) \equiv 1$:

$$(3.1) \quad y^{IV} - \beta y'' = 0.$$

Całką ogólną równania (3.1) jest funkcja:

$$(3.2) \quad y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{sh} \sqrt{\beta} x + C_4 \operatorname{ch} \sqrt{\beta} x,$$

w której stałe C_1, \dots, C_4 wyznaczmy korzystając z warunków brzegowych (1.3) (jedna z tych stałych jest dowolna). Wstawiając (3.2) do (1.3) otrzymujemy układ czterech liniowych i jednorodnych równań na niewiadome stałe:

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & C_1 + C_4 = 0, \quad C_2 + \sqrt{\beta} C_3 - \beta\psi C_4 = 0, \\
 & \vartheta C_1 + (\vartheta + \rho) C_2 + (\vartheta \operatorname{sh} \sqrt{\beta} - \operatorname{sh} \sqrt{\beta} + \rho \sqrt{\beta} \operatorname{ch} \sqrt{\beta}) C_3 + \\
 & \quad + (\vartheta \operatorname{ch} \sqrt{\beta} - \operatorname{ch} \sqrt{\beta} + \rho \sqrt{\beta} \operatorname{sh} \sqrt{\beta}) C_4 = 0, \\
 & \nu C_1 + (\vartheta + \rho) C_2 + (\vartheta \operatorname{sh} \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta} \operatorname{ch} \sqrt{\beta} + \mu \sqrt{\beta} \operatorname{ch} \sqrt{\beta}) C_3 + \\
 & \quad + (\nu \operatorname{ch} \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta} \operatorname{sh} \sqrt{\beta} + \mu \sqrt{\beta} \operatorname{sh} \sqrt{\beta}) C_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Układ powyższych równań ma rozwiązania niezerowe, gdy jego wyznacznik główny jest równy zero; otrzymujemy w ten sposób równanie przestępne, pozwalające obliczyć poszukiwaną siłę krytyczną w zależności od parametrów charakteryzujących sposób zachowania się obciążenia oraz parametru ψ określającego sprężystość utwierdzenia:

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \sqrt{\beta} [(\mu + \vartheta - 1) + 2(\rho\nu - \mu\vartheta)] + \{\nu + \beta [(\rho + \vartheta) + (\rho\nu - \mu\vartheta)] - \\
 & \quad - \beta\psi [(\mu + \nu) + (\rho\nu - \mu\vartheta)]\} \operatorname{sh} \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta} \{[(\mu + \nu + \vartheta) + 2(\rho\nu - \mu\vartheta)] - \\
 & \quad - \beta\psi [(\rho + \vartheta) + (\rho\nu - \mu\vartheta)]\} \operatorname{ch} \sqrt{\beta} = 0.
 \end{aligned}$$

Równanie (3.4) możemy również otrzymać, korzystając z wyników pracy Z. KORDAS [6] podstawiając w przedstawionym tam równaniu (2.5): $kl = i\sqrt{\beta}$ ($i = \sqrt{-1}$) oraz zmieniając odpowiednie oznaczenia parametrów $\alpha \rightarrow \rho$, $\beta \rightarrow \vartheta$, $\gamma \rightarrow \mu$, $\delta \rightarrow \nu$. Oczywiście równanie (3.4) pozwala na obliczenie siły krytycznej tylko dla pewnych wartości parametrów, dla których możliwe jest stosowanie statycznego kryterium stateczności. Jak wykazano w pracy [9] jest to możliwe zawsze w przypadkach konserwatywnego zachowania się obciążenia, tzn. gdy $\vartheta = 1 - \mu$, oraz w pewnych przypadkach obciążeń niekonserwatywnych. Granice stosowalności statycznego kryterium stateczności mogą być wyznaczone przez przyjęcie, że siła β zmierza do nieskończoności. Jest to warunek odmienny od stosowanego w pracy [6], bowiem charakter równania przestępnego (3.4) jest również inny; posiada ono jeden pierwiastek określający tylko jedną wartość siły krytycznej. Po prostym obliczeniu z równania (3.4) otrzymujemy warunek

$$(3.5) \quad \rho + \vartheta + (\rho\nu - \mu\vartheta) = 0.$$

Nie jest on jednak jedynym; jeśli bowiem równanie (3.5) jest spełnione tożsamościowo, to z równania (3.4) przy $\beta \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$(3.6) \quad \mu + \nu + (\rho\nu - \mu\vartheta) = 0.$$

Zależnie od wartości parametrów granicę obszaru zmienności tych parametrów określa równanie (3.5) albo (3.6).

Przejdziemy z kolei do omówienia szeregu przypadków szczególnych.

4. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

4.1. Siła skierowana do bieguna

Założymy, iż pręt przedstawiony na rys. 2 rozciągany jest siłą o stałym punkcie przyłożenia i zmieniającym się kierunku w trakcie wybočenja, lecz w taki sposób, aby prosta działania siły przechodziła przez stały punkt A , umieszczony na osi nieodkształconego pręta w odległości a od utwierdzenia. Odległość ta jest dodatnia, gdy punkt A znajduje się powyżej utwierdzenia, a ujemna, gdy poniżej. Jak wynika z rys. 2

$$\chi = \varphi_1 - \delta, \quad \delta \approx \operatorname{tg} \delta = \frac{l}{l-a} y(1) = \frac{1}{1-\alpha} y(1), \quad \alpha = a/l,$$

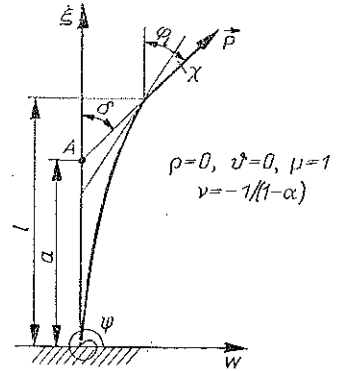
$$\chi = y'(1) - \frac{1}{1-\alpha} y(1), \quad e=0,$$

a więc porównując z (1.1) mamy w tym przypadku

$$(4.1) \quad \mu=1, \quad \nu = -\frac{1}{1-\alpha}, \quad \rho = \beta = 0, \quad \psi \neq 0.$$

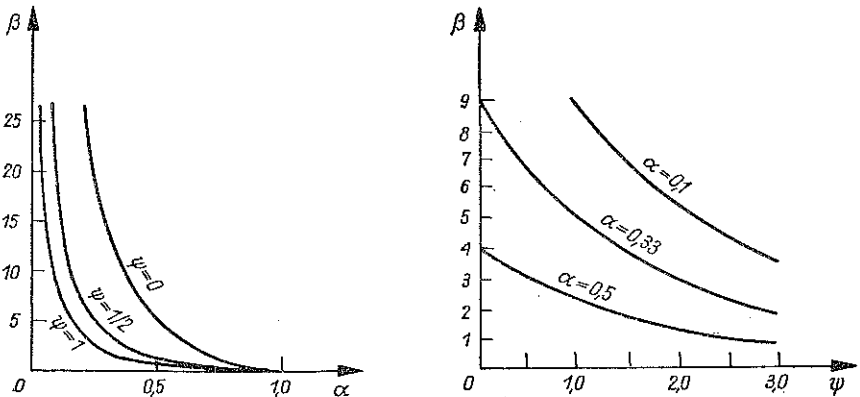
Równanie (3.4) ulega tu uproszczeniu pozwalającemu na obliczenie siły krytycznej β w zależności od parametru $\alpha = a/l$ przez określenie zależności odwrotnej, tzn. $\alpha = \alpha(\beta)$:

$$(4.2) \quad \alpha = \frac{\operatorname{tgh} \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta} + \psi \beta \operatorname{tgh} \sqrt{\beta}}.$$



Rys. 2

Gdy wartość siły zmierza do zera ($\sqrt{\beta} \rightarrow 0$), to wartość parametru α dąży do 1 niezależnie od wielkości ψ ; jeśli zaś $\sqrt{\beta} \rightarrow \infty$, to $\alpha \rightarrow 0$ również niezależnie od ψ . Siłę krytyczną β jako funkcję parametrów α i ψ przedstawiono za pomocą wykresów na rys. 3. Funkcja $\beta(\alpha)$ określona jest w przedziale $(0, 1)$, co dowodzi, że w przypadku bieguna położonego poniżej utwierdzenia ($\alpha \leq 0$) prostoliniowa postać pręta jest postacią stateczną dla dowolnie dużych wartości siły.



Rys. 3

4.2. Siła o zmieniającym się kierunku i punkcie przyłożenia

Założmy, iż pręt przedstawiony na rys. 4 rozciągany jest siłą o punkcie przyłożenia leżącym stale na nieodkształconej osi pręta i zmieniającym się kierunku działania. Jak wynika z rysunku, mamy tu następujące zależności:

$$\cos \varphi_l = \frac{w(l)}{e^*} = \frac{y(l)}{e}, \quad e \approx y(l), \quad \chi = (1-\eta)y'(l),$$

z których otrzymujemy

$$(4.3) \quad \rho=0, \quad \vartheta=1, \quad \mu=1-\eta, \quad \nu=0, \quad \psi \neq 0.$$

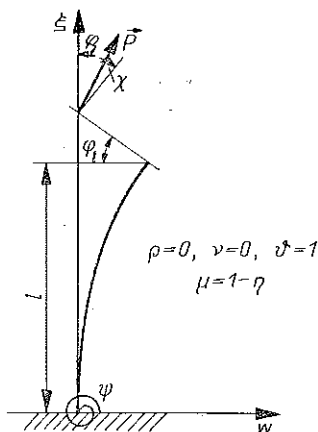
Wprowadzono tu nowy parametr η , tzw. współczynnik śledzenia, który jest zdefiniowany jako stosunek kąta, zawartego między kierunkiem działania siły a nieodkształconą osią pręta, do kąta nachylenia stycznej φ_l na swobodnym końcu pręta. Równanie (3.4) przyjmuje zatem postać

$$(4.4) \quad \eta \sqrt{\beta} \operatorname{sh} \sqrt{\beta} - \eta(1-\beta\psi) \operatorname{ch} \sqrt{\beta} + \eta - 1 = 0$$

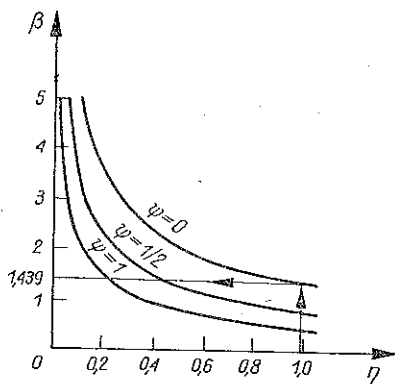
lub

$$(4.5) \quad \eta = \frac{1}{1 + \sqrt{\beta} \operatorname{sh} \sqrt{\beta} - (1-\beta\psi) \operatorname{ch} \sqrt{\beta}}$$

Zależność siły krytycznej β od współczynnika śledzenia η przy różnych wartościach ψ przedstawiono na rys. 5. W szczególnym przypadku $\eta=1$ otrzymujemy działanie siły śledzącej, która jest tu konserwatywna (ponieważ $\mu + \vartheta - 1 = 0$). Należy zauważyć, że przedstawiony na rys. 5 sposób obciążenia może być zrealizowany w praktyce.



Rys. 4



Rys. 5

Jeśli bowiem pręt z zamocowaną na jego swobodnym końcu sztywną, poprzeczną płytką, umieścimy w wąskim strumieniu płynu poruszającego się wzdłuż nieodkształconej osi pręta (w dodatnim kierunku osi ξ), to na płytkę będzie działała siła skupiona. Jeśli ponadto założymy, że płyn jest idealny, siła ta będzie stale prostopadła do płytki (siła śledząca).

4.3. Niekonserwatywna siła nadśledzająca

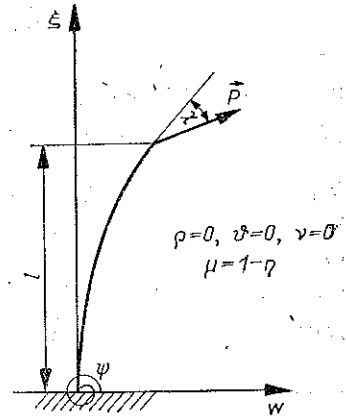
Siła rozciągająca zmienia tu kierunek działania (określony przez współczynnik śledzenia η), lecz jest stale zaczepiona na swobodnym końcu pręta (rys. 6). Parametry opisujące zachowanie się siły mają następujące wartości:

$$(4.6) \quad \rho=0, \quad \vartheta=0, \quad \nu=0, \quad \mu=1-\eta, \quad \psi \neq 0,$$

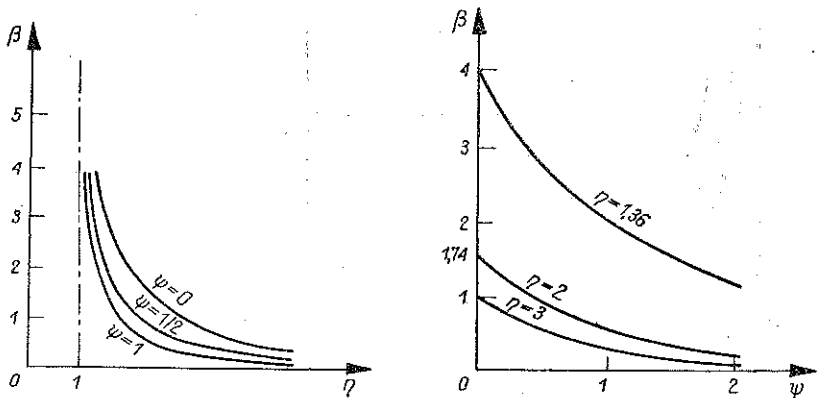
i nie spełniają warunku konserwatywności $\mu + \vartheta - \nu = 0$ (z wyjątkiem $\eta=0$). Kryterium statyczne stateczności może tu być jednak stosowane; równanie (3.4) przyjmuje postać

$$(4.7) \quad (1-\eta)\sqrt{\beta} \psi \operatorname{sh} \sqrt{\beta} + (1-\eta) \operatorname{ch} \sqrt{\beta} + \eta = 0.$$

Wykres zależności $\beta = \beta(\eta)$ przedstawiono na rys. 7 dla różnych wartości parametru ψ ; funkcja określona jest dla $\eta > 1$. Dla analogicznego przypadku obciążenia pręta siłą ściskającą, statyczne kryterium pozwala na obliczenie sił krytycznych dla $\eta \leq 1/2$.



Rys. 6



Rys. 7

4.4. Siła zaczepiona na sztywnym ramieniu

Zachowanie się obciążenia charakteryzuje rys. 8; siła P zaczepiona jest na końcu sztywnego ramienia o długości a , przytwierdzonego stycznie do osi pręta w jego końcowym przekroju. Parametry określające zachowanie się obciążenia są tu następujące:

$$(4.8) \quad \mu=1, \quad \rho=\alpha=a/l, \quad \vartheta=0, \quad \nu=0, \quad \psi \neq 0,$$

a siłę krytyczną obliczamy z równania

$$(4.9) \quad \alpha\beta \operatorname{sh} \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta} \operatorname{ch} \sqrt{\beta} - \psi\beta \operatorname{sh} \sqrt{\beta} + \alpha\psi\beta \sqrt{\beta} \operatorname{ch} \sqrt{\beta} = 0.$$

Wyniki przedstawiono na rys. 9. W pracy H. ZIEGLERA [9] podana jest wartość siły krytycznej w tym przypadku obciążenia, gdy $a \ll l$ i $\psi = 0$. Przyjmując w równaniu (4.9) $\psi = 0$ oraz $\alpha \rightarrow 0$, $\sqrt{\beta} \rightarrow \infty$, $\text{ctgh} \sqrt{\beta} \approx 1$ otrzymujemy wynik Zieglera: $P_k = EJ/a^2$.

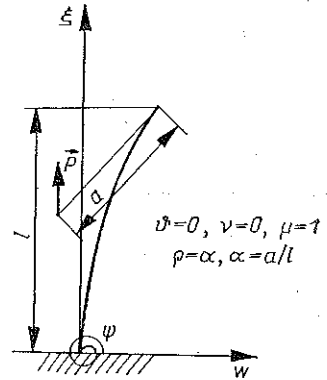
4.5. Pręt obciążony zmieniającym się momentem

Przypadek ten nie mieści się w przedstawionej wyżej teorii, ponieważ pręt (rys. 10) poddany jest działaniu momentu proporcjonalnego do kąta nachylenia przekroju końcowego, a suma sił działających jest równa zero. Zachowanie się obciążenia można opisać następującymi parametrami:

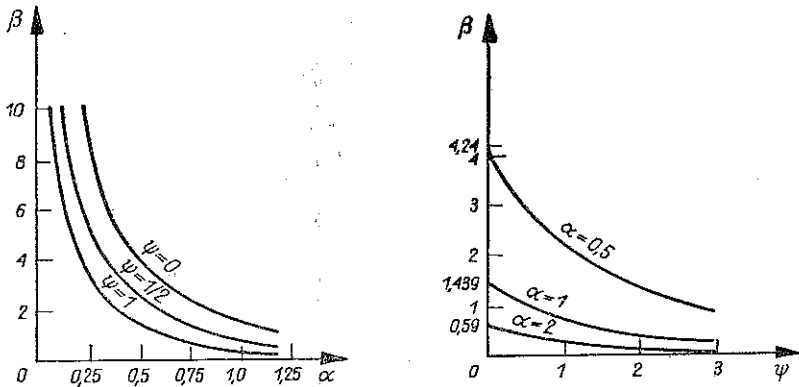
$$(4.10) \quad \mu = 1, \quad \rho = \alpha = \frac{a}{l}, \quad \vartheta = 0, \quad v = 0, \quad \psi \neq 0;$$

równanie linii ugięcia pręta ma postać

$$(4.11) \quad y^{IV} = 0, \quad y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3,$$



Rys. 8



Rys. 9

a warunki brzegowe są następujące:

$$(4.12) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \psi y''(0), \quad y''(1) = \alpha \beta y'(1), \quad y'''(1) = 0.$$

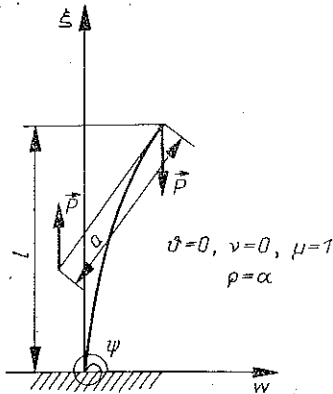
Z pierwszego i czwartego warunku brzegowego otrzymujemy $C_1 = C_4 = 0$, z dwóch zaś pozostałych

$$(4.13) \quad C_2 - 2\psi C_3 = 0, \quad \alpha \beta C_2 + 2(\alpha \beta - 1) C_3 = 0.$$

Wyznacznik tego układu równań przyrównany do zera prowadzi do równania określającego siłę krytyczną:

$$(4.14) \quad \beta = \frac{1}{(1 + \psi)\alpha}.$$

Dla $\psi=0$ wynik jest zgodny z rozwiązaniem podanym w pracy [9]. Wykresy zależności $\beta = \beta(\alpha)$ i $\beta = \beta(\psi)$ przedstawiono na rys. 11.



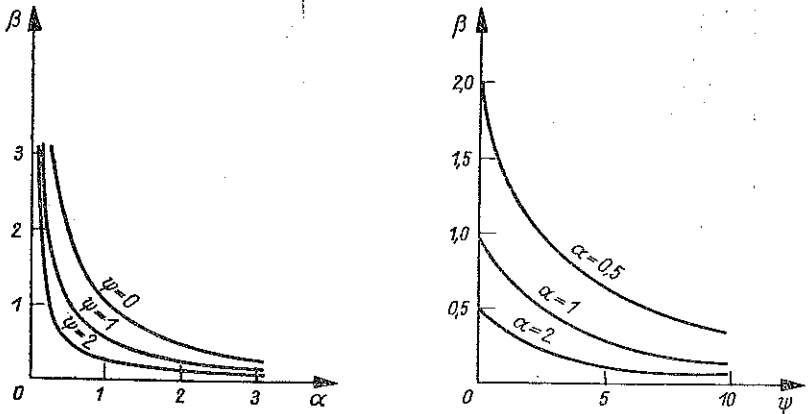
Rys. 10

Oprócz wyżej przedstawionych przypadków szczególnych możliwe jest przytoczenie całego szeregu przykładów posiadających również znaczenie praktyczne. Zbadanie tych przykładów na podstawie statycznego kryterium stateczności nie przedstawia żadnych trudności i polega na ustaleniu parametrów $\rho, \vartheta, \mu, \nu$ oraz obliczeniu siły krytycznej z równania (3.4).

5. OPTIMALNE KSZTAŁTOWANIE PRĘTA ROZCIĄGANEGO SIŁĄ KONSERWATYWNĄ

Problem optymalizacji kształtu pręta rozciąganego rozwiązujemy opierając się na wynikach prac A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCZKOWSKIEGO [4, 5]; ograniczymy się tu do konserwatywnego zachowania się obciążenia, co znacznie ułatwi rozwiązanie zagadnienia. Wykorzystamy równanie ugiętej osi pręta w postaci

$$(5.1) \quad (gy''')'' - \beta y'' = 0.$$



Rys. 11

Całkując dwukrotnie równanie (5.1) i wprowadzając nową zmienną zależną $v(x)$ za pomocą podstawienia

$$(5.2) \quad v(x) = y(x) + \frac{B_1}{\beta} + \frac{B_2}{\beta} x$$

(B_1 i B_2 są stałymi całkowania), otrzymujemy równanie

$$(5.3) \quad gv'' - \beta v = 0$$

oraz [podstawiając (5.2) do (1.3)] następujące warunki brzegowe:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} (1 - \vartheta)v(1) - \rho v'(1) + (\rho + \vartheta)v'(0) + (\vartheta - \rho\psi\beta - \vartheta\psi\beta)v(0) &= 0, \\ \nu v(1) + (\mu - 1)v'(1) - (\mu + \nu)v'(0) - (\nu - \mu\psi\beta - \nu\psi\beta)v(0) &= 0. \end{aligned}$$

Problem optymalizacji polega na poszukiwaniu takiej funkcji $\varphi(x) = A(x)/A_0$, określającej zmieniające się bezwymiarowe pole powierzchni przekroju pręta (A_0 oznacza pole powierzchni określonego przekroju w punkcie $x = x_0$), aby jego objętość była minimalna:

$$(5.5) \quad V = A_0 l \int_0^1 \varphi(x) dx = \min$$

przy warunku ograniczającym, zapewniającym stałość siły krytycznej, określonej przez równanie (5.3) i warunki brzegowe (5.4). Zgodnie z metodą zaproponowaną przez N. G. CZENCOWA [2] sprowadzimy tak sformułowany problem Lagrange'a do zwyczajnego zagadnienia wariacyjnego, wyrażając funkcję $\varphi(x)$ przez v i v'' z równania (5.3) i związku (1.8):

$$(5.6) \quad V = A_0 l \int_0^1 \left(\frac{\beta v}{v''} \right)^\kappa dx = \int_0^1 F(v, v'') dx = \min.$$

Wprowadzając zgodnie z N. G. CZENCOWEM [2] oznaczenie

$$(5.7) \quad t = \frac{\partial F}{\partial v''} = -A_0 l \kappa \beta^\kappa \frac{v^\kappa}{(v'')^{\kappa+1}},$$

nadajemy równaniu Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału (5.6) postać

$$(5.8) \quad vt'' - tv'' = 0.$$

Całkując (5.8) otrzymujemy

$$(5.9) \quad vt' - tv' = C$$

lub po podstawieniu (5.7)

$$(5.10) \quad v^\kappa [(1 - \kappa)v'v'' + (1 + \kappa)vv'''] = \bar{C}(v'')^{\kappa+2}, \quad \bar{C} = \frac{C}{A_0 l \kappa \beta^\kappa}.$$

Równanie to różni się od równania (3.5) otrzymanego w pracy [4] jedynie czynnikiem $(-1)^{\kappa+2}$ przy stałej \bar{C} (po przyjęciu $f(x) \equiv 1$). Korzystając z warunku transversalności dla funkcjonału (5.6) wykazano w pracy [4], że $C = 0$ w przypadkach ogólnego konserwatywnego zachowania się obciążenia przy ściskaniu. Również w naszym przypadku stała C musi być równa zero; dowód może być przeprowadzony analogicznie i nie ma potrzeby przytaczać go w niniejszej pracy.

Równanie (5.10) przy $C = 0$ może być scałkowane jeszcze raz:

$$(5.11) \quad v'' v^{1-\kappa/1+\kappa} = \bar{\bar{C}},$$

a całka ogólna równania (5.11) w postaci funkcji odwrotnej jest następująca:

$$(5.12) \quad x = \pm \int \frac{dv}{C_1 v^{2\kappa/(1+\kappa)} + C_2} + C_3.$$

W przypadkach pręta rozciąganego krzywizna v'' nie zmienia swojego znaku i uzyskanie rozwiązań jest znacznie łatwiejsze niż wówczas, gdy może powstać konieczność zszywania rozwiązań o różnych znakach krzywizny.

5.1. Pręt płasko-zbieżny ($\kappa=1$)

W tym przypadku rozwiązanie (5.11) jest bardzo proste:

$$(5.13) \quad v = C_1 + C_2 x + C_3 x^2.$$

Przyjmując $v(0)=1$, a więc $C_1=1$ (ugięcie określone jest z dokładnością do dowolnego mnożnika), warunki brzegowe (5.4) pozwalają wyznaczyć stałe C_2 i C_3 :

$$(5.14) \quad C_2 = -\frac{\beta\psi(\rho v - \mu\vartheta + 2\rho + 2\vartheta - \mu - v) + (2\mu + v - 2)}{2\mu + v - 2\rho - \vartheta - 1},$$

$$C_3 = -\frac{\beta\psi(\mu + v - \rho - \vartheta) + 1}{2\mu + v - 2\rho - \vartheta - 1}.$$

Optymalny kształt pręta oraz siła krytyczna wyznaczone są przez równanie (5.3) oraz warunek $g(x_0)=1$, w którym wartość x_0 może być wybrana na ogół dowolnie:

$$(5.15) \quad g(x) = \frac{1 + C_2 x + C_3 x^2}{1 + C_2 x_0 + C_3 x_0^2},$$

$$(5.16) \quad \beta = \frac{2C_3}{1 + C_2 x_0 + C_3 x_0^2}.$$

Wzór (5.16) określa siłę krytyczną lub, ściślej mówiąc, podstawową sztywność EJ_0 dla danej siły krytycznej; w przypadku sztywnego utwierdzenia $\psi=0$ poszukiwana siła krytyczna β nie występuje w stałych C_2 i C_3 i wzór (5.16) jest rozwikłany ze względu na niewiadomą. Dla uproszczenia obliczeń można założyć $x_0=0$; wówczas podstawowa sztywność jest określona w punkcie utwierdzenia i jest na ogół maksymalna.

Przykład 1. Przyjmując obciążenie przedstawione na rys. 2 (przypadek 4.1) otrzymujemy

$$(5.17) \quad g(x) = 1 - \frac{1+2\alpha\psi}{\alpha(1+2\psi)} x + \frac{1-\alpha}{\alpha(1+2\psi)} x^2 = (1-x) \left[1 - \frac{1-\alpha}{\alpha(1+2\psi)} x \right]$$

oraz

$$(5.18) \quad \beta = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha(1+2\psi)}.$$

Otrzymany wynik nie jest poprawny dla dowolnych wartości α i ψ ; funkcje $g(x)$ oraz $\beta(\alpha, \psi)$ muszą być dodatnie dla $0 \leq x \leq 1$, co narzuca warunki ograniczające na parametry α i ψ :

$$(5.19) \quad \frac{1}{2(1+\psi)} \leq \alpha < 1.$$

Statyczne kryterium stateczności może być zatem stosowane tylko wówczas, gdy położenie bieguna jest wyznaczone przez nierówności (5.19). Przy sztywnym utwierdzeniu zakres stosowalności kryterium statycznego dla pręta optymalnego ulega zawężeniu ($1/2 \leq \alpha < 1$) w porównaniu z zakresem stosowalności dla pręta pryzmatycznego ($0 \leq \alpha < 1$). Kształt przekroju pręta optymalnego dla różnych wartości parametru α i $\psi=0$ przedstawiono na rys. 12.

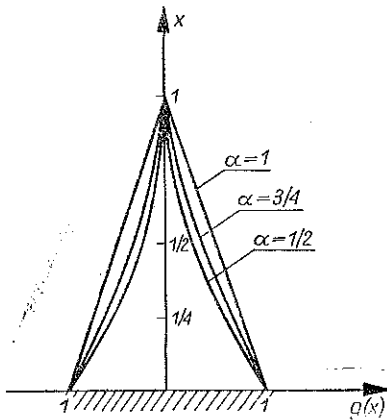
Przykład. 2. Dla śledzącej siły konserwatywnej (rys. 4, $\eta=1$) otrzymujemy

$$(5.20) \quad g(x) = 1 - \frac{1}{1+\psi} x + \frac{1}{2(1+\psi)} x^2$$

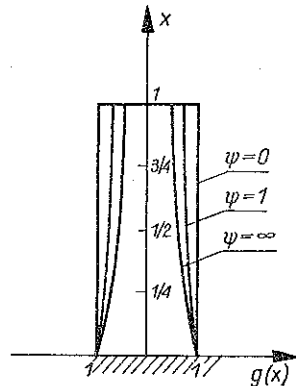
oraz

$$(5.21) \quad \beta = \frac{1}{1+\psi}.$$

Optymalny kształt pręta przedstawiono na rys. 13.



Rys. 12



Rys. 13

5.2. Pręt wszechstronnie równomiernie zbieżny ($\kappa=1/2$)

W przypadku tym rozwiązanie równania (5.12) może być przedstawione w postaci parametrycznej:

$$(5.22) \quad v = C_1 \sin^3 z, \quad x = C_3 + C_2 \left(z - \frac{1}{2} \sin 2z \right).$$

Jeśli założyć, że wartość parametru $z=z_0$ odpowiada $x=0$ i $z=z_1$ odpowiada $x=1$, to warunki brzegowe (5.4) prowadzą do równań wyznaczających stałe C_2 i C_3 (C_1 pozostaje dowolne). Postać tych równań jest identyczna z otrzymanymi w pracy [4] równaniami (4.11), jeśli występujący tam parametr ζ zastąpimy przez $(-\beta\psi)$. Optymalny kształt pręta i siła krytyczna określone są równaniami

$$(5.23) \quad g(z) = \frac{\sin^4 z}{\sin^4 z^*}, \quad \beta = \frac{3}{4} \frac{1}{C_2^2 \sin^4 z^*},$$

w których z^* oznacza wartość parametru odpowiadającą x_0 i $J=J_0$.

5.3. Pręt płasko-zbieżny ($\kappa=1/3$)

Podobnie jak w przypadku poprzednim rozwiązanie równania (5.12) przedstawimy w postaci parametrycznej:

$$(5.24) \quad v = C_1 \sin^4 z, \quad x = C_3 + C_2 \cos z (3 - \cos^2 z).$$

Równania określające stałe C_2 i C_3 otrzymujemy z równań (4.14), zamieszczonych w pracy [4] przez zastąpienie parametru ζ wyrażeniem $(-\beta\psi)$. Optymalny kształt i siłę krytyczną wyznaczmy z równań

$$(5.25) \quad g(z) = \frac{\sin^6 z}{\sin^6 z^*}, \quad \beta = \frac{4}{9} \frac{1}{C_2^2 \sin^6 z^*},$$

w których z^* określone jest jak poprzednio.

Na zakończenie należy podkreślić dość istotną różnicę zachodzącą między rozwiązaniami problemów stateczności prętów ściskanych i rozciąganych. Dla prętów ściskanych otrzymujemy zazwyczaj nieskończony ciąg wartości własnych (sił krytycznych) odpowiedniego równania różniczkowego oraz odpowiadający mu ciąg funkcji własnych (funkcji ugięcia); w przeciwieństwie do tego dla prętów rozciąganych istnieje tylko jedna wartość własna (siła krytyczna) i jedna odpowiadająca jej postać równowagi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. BECK, *Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes*, ZAMP, 3, 3, 225, 1952.
2. N. G. CZENCOW, *Stojki najmniejszego wiesu*, Trudy CAGI, 1936, 265.
3. M. FARSHAD, I. TADJBAKHSI, *Optimum shape of columns with general conservative end loading*, J. of Optim. Theory and Appl., 4, 11, 413–420, 1973.
4. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal design of elastic columns subject to the general conservative behaviour of loading*, ZAMP, 5, 21 806–818, 1970.
5. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie sprężysto-plastycznego słupa przy ogólnym konserwatywnym zachowaniu się obciążenia*, Rozpr. Inżyn., 1, 19, 65–83, 1971.
6. Z. KORDAS, *Stateczność sprężystości utwierdzonego pręta ściskanego w ogólnym przypadku zachowania się obciążenia*, Rozpr. Inżyn., 3, 11, 435–448, 1963.
7. J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, Warszawa 1958.
8. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
9. H. ZIEGLER, *Principles of structural stability*, Blaisdell Publ. Comp., 1968.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ УПРУГО
ЗАКРЕПЛЕННОГО РАСТЯГИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ

В работе представлено решение задачи устойчивости и оптимизации формы консольного стержня, нагруженного постоянной растягивающей силой, действующей на свободном его конце. Предположено, что сила изменяет в процессе продольного изгиба так направление действия, как и точку приложения; ее поведение определяют четыре параметра.

Решение задачи устойчивости опирается главным образом на статический критерий устойчивости; представлено трансцендентное уравнение позволяющее вычислить критическую силу.

Задача оптимизации формы растягиваемого стержня решена в случае консервативного поведения нагрузки, применяя классический вариационный метод. Результаты представлены на многих рисунках.

SUMMARY

STABILITY AND OPTIMIZATION OF THE FORM OF AN ELASTICALLY
CLAMPED ROD IN TENSION

The paper presents a solution of the problem of stability and optimization of a cantilever rod acted on by a tensile force at its free end. The force is assumed to change the direction and the point of application in the process of buckling; its behaviour is determined by four parameters.

The problem of stability is based mainly on the statical stability criterion; critical forces are calculated from the corresponding transcendental equation. The problem of optimization is solved in the case of conservative loading by variational methods. Numerous graphs illustrate the results derived in the paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1973 r.
