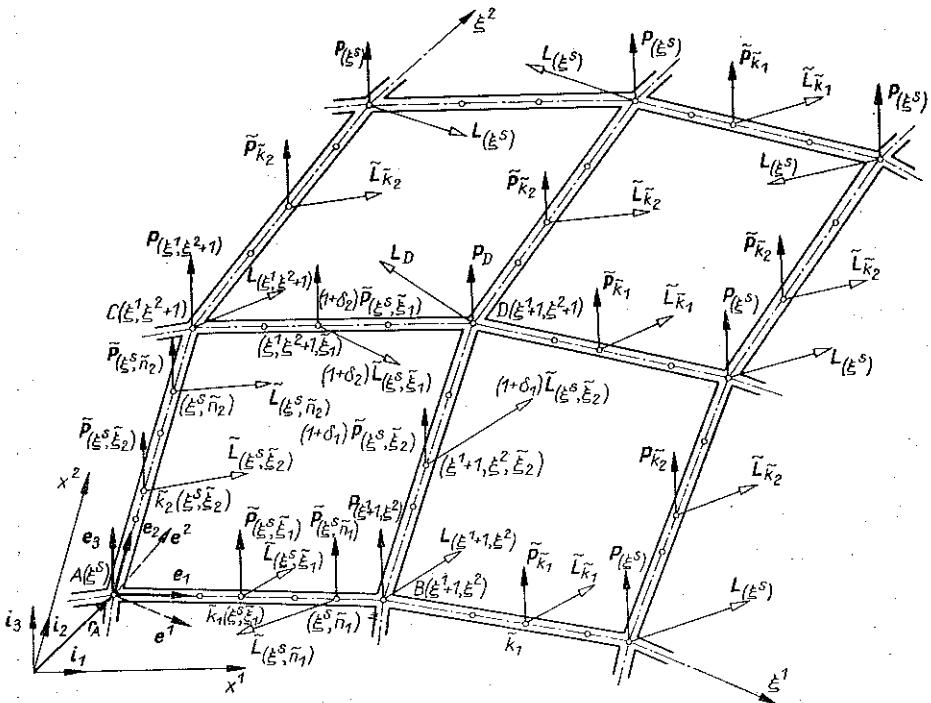


ZAGADNIENIE PŁYTY SIATKOWEJ
 OBCIĄŻONEJ W WĘZŁACH I MIĘDZY WĘZŁAMI

JAN LEWIŃSKI (WARSZAWA)

1. WSTĘP

Przedmiotem pracy jest płaska siatka, zbudowana z prostych prętów o danych sztywnościach na zginanie i skręcanie, połączonych ze sobą po cztery na sztywno w węzłach (rys. 1). Przyjęto, że jedna z głównych osi bezwładności przekroju po-



Rys. 1

przecznego tych prętów leży w płaszczyźnie siatki, utworzonej przez osie środków ciężkości przekrojów poprzecznych wszystkich prętów siatki. Siatka taka dalej nazywana będzie siatką ściśle płaską. Siatka jest obciążona układem sił prostokątnych do płaszczyzny siatki oraz układem momentów o wektorach leżących w płasz-

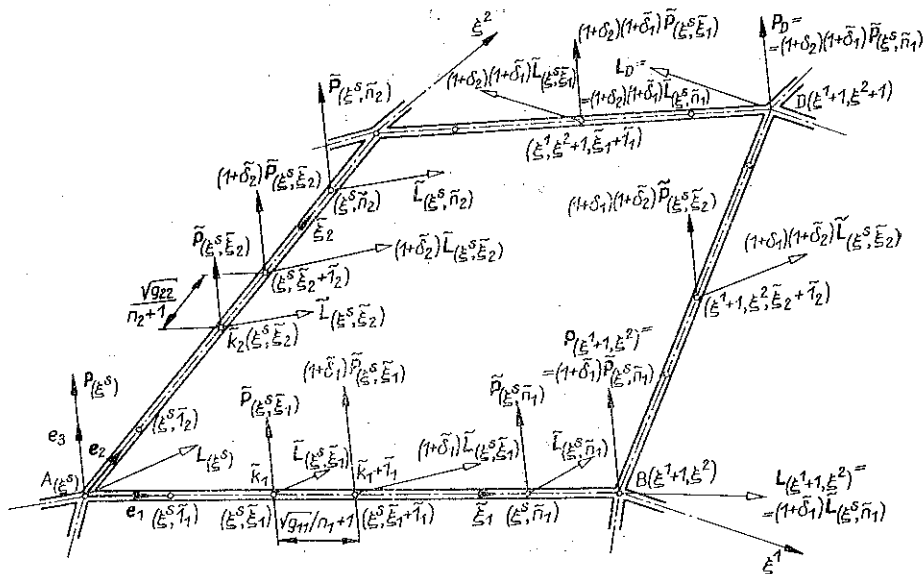
czyźnie siatki. Obciążenie to (tzw. płytowe) jest zaczepione zarówno w węzłach siatki jak i w dowolnej liczbie punktów na łącznikach (rys. 1). Rozważany problem jest uogólnieniem klasycznego zagadnienia płyty siatkowej (obciążenie płytowe zaczepione wyłącznie w węzłach siatki), rozwiązanego w monografii H. FRĄCKIEWICZA [1]. Z rodzajem obciążenia omawianym w niniejszej pracy można się spotkać np. w przypadku uwzględnienia ciężaru własnego prętów siatki lub też w przybliżonej teorii stateczności rusztów siatkowych [3].

W pracy omówiono kolejno: stan przemieszczeń i odkształceń siatki, podano związki fizyczne oraz wyprowadzono równania równowagi. Praca ilustrowana jest przykładem szczególnym siatki biegunowej.

2. ELEMENTY GEOMETRII PŁYTY

Modelem matematycznym płyty siatkowej jest model ośrodka dyskretnego, opisany w pracach H. FRĄCKIEWICZA [1 i 2]. Punktami tego ośrodka są węzły rozpatrywanej siatki (rys. 1). Punktom tym (węzłom) przypisuje się w pewien uporządkowany sposób dwójkę liczb ξ^1 i ξ^2 ze zbioru liczb całkowitych. Liczby te tworzą krzywoliniowy układ współrzędnych ξ^s ($s=1, 2$). Siatka zanurzona jest w przestrzeni Euklidesa, sparametryzowanej kartezjańskim układem współrzędnych x^t ($t=1, 2$). Położenie poszczególnych węzłów siatki w tej przestrzeni określone jest promieniem-wektorem $\mathbf{r}=f(\xi^s)$. Promień ten pozwala określić w siatce lokalną bazę wektorową $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ i \mathbf{e}^s , a dalej obiekty podstawowy g_{sk} i wzajemny g^{st} oraz odpowiadające im współczynniki koneksji Γ_{sk}^t i A_{sk}^t ($k=1, 2$). Jak już napisano we wstępie tematem pracy jest przypadek obciążenia siatki dowolnym obciążeniem płytowym, zaczepionym zarówno w węzłach rzeczywistych jak i w dowolnej liczbie punktów (węzłach) pośrednich na łącznikach. Przyjęto w pracy, że liczba punktów pośrednich na wszystkich łącznikach leżących na danej linii parametrycznej jest taka sama i wynosi n_A ($A=1, 2$). Rysunek 2 przedstawia dowolne «oczko» siatki z zaznaczeniem węzłów rzeczywistych A, B, C, D i wspomnianych punktów pośrednich, z których dowolny oznaczono symbolem \tilde{k}_A ($\tilde{k}=\tilde{1}, \tilde{2}, \dots, \tilde{n}$); A oznacza numer linii parametrycznej. Dla określenia położenia tych punktów względem węzła podstawowego A o współrzędnej ξ^s wprowadza się współrzędną lokalną ξ_A ($A=1, 2$; $\xi=\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \dots, \tilde{n}, \tilde{n}+\tilde{1}$) o początku w węzle podstawowym A . Punkty pośrednie dzielą łączniki siatki na n_A+1 równych odcinków o długości $\sqrt{g_{AA}}/n_A+1$, gdzie $\sqrt{g_{AA}}$ oznacza długość dowolnego łącznika leżącego na A -tej linii parametrycznej. Dowolnemu \tilde{k}_A -temu punktowi pośredniemu przypisane będą trzy liczby ξ^1, ξ^2, ξ_A : dwie pierwsze (w skrócie ξ^s) oznaczają współrzędne węzła podstawowego A w układzie krzywoliniowym ξ^s , trzecia oznacza współrzędną lokalną tego punktu. Przyjęto, że oznaczenie $(\xi^s, \tilde{0}_A)$ jest równoważne oznaczeniu (ξ^s) , analogicznie $(\xi^s, \tilde{n}_A+\tilde{1})$ jest równoważne (ξ^s+1, ξ^B) , gdzie $A \neq B$ ($B=1, 2$). Taka parametryzacja umożliwia wykonywanie zasadniczych działań (badanie stanu odkształceń i napięć) w układzie lokalnym ξ_A . Wszystkie wielkości badane w punkcie pośrednim (będzie stosowana również nazwa «węzeł» pośredni) opisywane będą w bazie $\mathbf{e}, (\mathbf{e}^s)$ zaczepionej w podstawowym

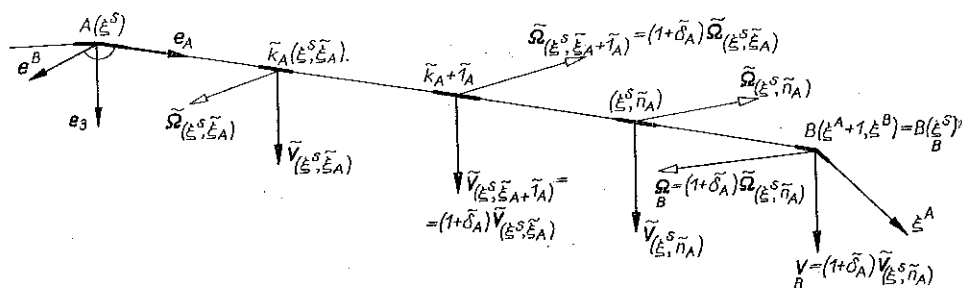
węzle rzeczywistym A (rys. 2). W pracy przyjęto, że przyrosty współrzędnych ξ^s, ξ^A wynoszą $\Delta\xi^s=1, \Delta\xi^A=1$ i w związku z tym symbole przyrostów będą w odpowiednich wyrażeniach opuszczane.



Rys. 2

3. STAN PRZEMIESZCZENIA I ODKSZTAŁCENIA PŁYTY

Dla siatek ściśle płaskich można sformułować tzw. zagadnienie płytowe. Pojęciem tym rozumie się ten szczególny układ obciążenia, który wywołuje tzw. płytowy stan przemieszczenia siatki. Stan ten charakteryzuje się wektorem przesunięcia V prostym do płaszczyzny siatki i wektorem obrotu Ω leżącym w tej płaszczyźnie.



Rys. 3

nięcia V prostym do płaszczyzny siatki i wektorem obrotu Ω leżącym w tej płaszczyźnie. W przypadku rozpatrywanym w pracy, w odróżnieniu od zagadnienia klasycznego, stan ten opisany będzie zarówno w węzłach rzeczywistych jak i w punktach pośrednich na łącznikach. Na rys. 3 zaznaczono wektory przesunięcia i obrotów węzłów rzeczywistych i punktów pośrednich, leżących na dowolnym łączniku na A -tej linii parametrycznej.

Funkcje wektorowe, opisujące płytowy stan przemieszczenia, wyrażają się następująco przez funkcje skalarne (wszystkie wielkości związane z punktami pośrednimi oznaczane będą wężykiem):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} V_{(\xi^s)} &= V_{(\xi^s)} \mathbf{e}_3, & \Omega_{(\xi^s)} &= \Omega_{(\xi^s)}^t, & \mathbf{e}_t &= \Omega_{(\xi^s)} \mathbf{e}^t, \\ \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} &= \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} \mathbf{e}_3, & \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} &= \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t, & \mathbf{e}_t &= \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} \mathbf{e}^t, \end{aligned}$$

przy czym składowe V (\tilde{V}) są składowymi fizycznymi (wektor bazy \mathbf{e}_3 ma moduł równy jedności), natomiast składowe Ω_t ($\tilde{\Omega}_t$) i Ω^t ($\tilde{\Omega}^t$) nie są składowymi fizycznymi, gdyż wektory baz \mathbf{e}_t i \mathbf{e}^t mają na ogół moduły różne od jedności. Takie składowe w dalszym ciągu pracy będą umownie nazywane składowymi tensorowymi. Składowe fizyczne wektora obrotu ω^t i ω_t można obliczyć z następujących wzorów:

$$\omega^t = \Omega^t \sqrt{g_{tt}}, \quad \omega_t = \Omega_t \sqrt{g^{tt}}.$$

Między przemieszczeniami poszczególnych punktów pośrednich i węzłów rzeczywistych zachodzą następujące zależności:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A + \tilde{1})} &= (1 + \delta_A) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} = (1 + \delta_A) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} \mathbf{e}_3, \\ \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A + \tilde{1})} &= (1 + \delta_A) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} = (1 + \delta_A) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t \mathbf{e}_t \end{aligned}$$

między sąsiadującymi ze sobą punktami pośrednimi oraz

$$(3.3) \quad \begin{aligned} V_{(\xi^{A+1}, \xi^B)} &\equiv \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A + \tilde{1})} = (1 + \delta_A) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)} = (1 + \delta_A) \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)} \mathbf{e}_3, \\ \Omega_{(\xi^{A+1}, \xi^B)} &\equiv \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A + \tilde{1})} = (1 + \delta_A) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)} = (1 + \tilde{V}_A) \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t \mathbf{e}_t \end{aligned}$$

między ostatnim punktem pośrednim (ξ^s, \tilde{n}_A) a węzłem rzeczywistym (ξ^{A+1}, ξ^B). W tych wyrażeniach symbole δ i \tilde{V} oznaczają odpowiednio: δ przyrost wartości dowolnej funkcji (skalarnej lub wektorowej) ze wzrostem o 1 wartości współrzędnej lokalnej $\tilde{\xi}_A$, np.

$$(3.4) \quad \delta_A \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} = \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A + \tilde{1})} - \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)},$$

oraz \tilde{V} pochodną kowariantną w ośrodku dyskretnym, sprowadzoną do układu lokalnego $\tilde{\xi}_A$, tzn.

$$(3.5) \quad \tilde{V}_A \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t = \delta_A \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + \Gamma_{sA}^t (1 + \delta_A) \Omega_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t.$$

Pochodna ta występuje tylko przy określaniu przyrostu odpowiedniej funkcji w węzle rzeczywistym (ξ^{A+1}, ξ^B) w stosunku do wartości tej funkcji w ostatnim punkcie pośrednim (ξ^s, \tilde{n}_A). Jak z powyższego wynika, w zależności od rodzaju węzła przyrosty składowych stanu przemieszczenia są określone wg różnych formuł. Powoduje to różnice w odpowiednich związkach i zależnościach i konieczność oddzielnego opisywania zjawisk zachodzących w punktach pośrednich i węzłach rzeczywistych. W pracy przedstawione zostaną związki i równania dotyczące dowolnego punktu pośredniego ($\xi^s, \tilde{\xi}_A$) i węzła rzeczywistego (ξ^{A+1}, ξ^B), przy czym, o ile związki te i równania będą formalnie takie same, zapisywane będą dla punktu pośredniego.

Stan odkształcenia rozpatrywanego rusztu opisują następujące funkcje wektorowe (odniesione do węzłów pośrednich i rzeczywistych):

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) &= \tilde{\gamma}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) \mathbf{e}^B / \sqrt{g^{BB}}, & \tilde{\Lambda}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) &= \tilde{\lambda}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) \mathbf{e}^B / \sqrt{g^{BB}}, \\ \tilde{\Phi}_A &= \tilde{\varphi}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) \mathbf{e}_A / \sqrt{g_{AA}}. \end{aligned}$$

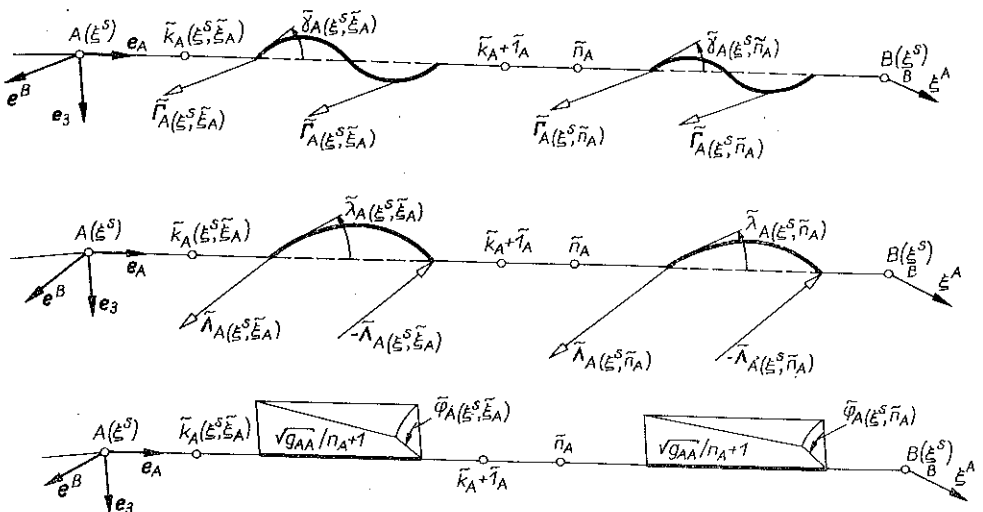
Związki (3.6) są formalnie takie same dla węzłów pośrednich i rzeczywistych. Sens fizyczny poszczególnych składowych stanu odkształcenie wyjaśnia rys. 4. Przedstawia on schemat deformacji odcinków pośredniego i ostatniego dowolnego łącznika, odpowiadający poszczególnym składowym stanu odkształcenia.

Wyrażając składowe skalarnie stanu odkształcenia przez składowe stanu przemieszczenia, otrzymuje się ze znanych własności geometrycznych siatki następujące związki geometryczne:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) &= \frac{\varepsilon_{AB3} \sqrt{g^{BB}}}{g_{AA}} \left[(n_A + 1) \delta_A \tilde{V}(\xi^s, \tilde{\xi}_A) + \varepsilon_{AB3} \left(1 + \frac{1}{2} \delta_A \right) \tilde{\Omega}_A^B(\xi^s, \tilde{\xi}_A) \right], \\ \tilde{\lambda}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) &= -\frac{1}{2\sqrt{g^{BB}}} \delta_A \tilde{\Omega}_A^B(\xi^s, \tilde{\xi}_A), & \tilde{\varphi}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) &= \frac{1}{\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \tilde{\Omega}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) \end{aligned}$$

dla odcinków pośrednich oraz

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_A(\xi^s, \tilde{n}_A) &= \frac{\varepsilon_{AB3} \sqrt{g^{BB}}}{g_{AA}} \left[(n_A + 1) \delta_A \tilde{V}(\xi^s, \tilde{n}_A) + \varepsilon_{AB3} \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{V}_A \right) \tilde{\Omega}_A^B(\xi^s, \tilde{n}_A) \right], \\ \tilde{\lambda}_A(\xi^s, \tilde{n}_A) &= -\frac{1}{2\sqrt{g^{BB}}} \tilde{V}_A \tilde{\Omega}_A^B(\xi^s, \tilde{n}_A), & \tilde{\varphi}_A(\xi^s, \tilde{n}_A) &= \frac{1}{\sqrt{g_{AA}}} \tilde{V}_A \tilde{\Omega}_A(\xi^s, \tilde{n}_A) \end{aligned}$$



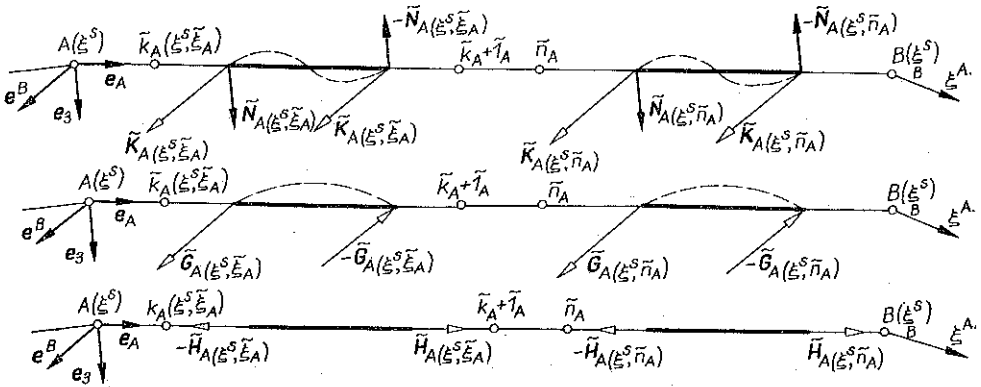
Rys. 4

dla odcinka ostatniego dowolnego łącznika. Związki te są poprawne dla małych odkształceń ośrodka. Wyrażają one zależność kątów odkształcenia giętnego i skrętnego poszczególnych odcinków dowolnego łącznika od składowych stanu przemieszczenia siatki. Na rys. 4 pokazano dodatnie zwroty tych kątów.

4. STAN NAPIĘCIA WEWNĘTRZNEGO PŁYTY

Do opisu tego stanu wprowadzone zostaną składowe tzw. podstawowego i wzajemnego stanu napięcia wewnętrznego.

Składowe wektorowe podstawowego stanu napięć w rozpatrywanej płycie ilustruje rys. 5. Rysunek wyjaśnia również sens fizyczny poszczególnych składowych.



Rys. 5

Przedstawia on te składowe w odniesieniu do dowolnego odcinka pośredniego i odcinka ostatniego dowolnego łącznika leżącego na A -tej linii parametrycznej. Składowe wektorowe tego stanu można wyrazić przez skalary (składowe fizyczne) wg zależności

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{A(\xi^s, \xi_A)} &= \tilde{\mathcal{K}}_{A(\xi^s, \xi_A)} \mathbf{e}^B / \sqrt{g^{BB}}, & \tilde{\mathbf{G}}_{A(\xi^s, \xi_A)} &= \tilde{\mathcal{G}}_{A(\xi^s, \xi_A)} \mathbf{e}^B / \sqrt{g^{BB}}, \\ \tilde{\mathbf{H}}_{A(\xi^s, \xi_A)} &= \mathcal{H}_{A(\xi^s, \xi_A)} \mathbf{e}_A / \sqrt{g_{AA}}, & \tilde{\mathbf{N}}_{A(\xi^s, \xi_A)} &= \mathcal{N}_{A(\xi^s, \xi_A)} \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

przy czym z warunku równowagi dowolnego odcinka łącznika wynika zależność

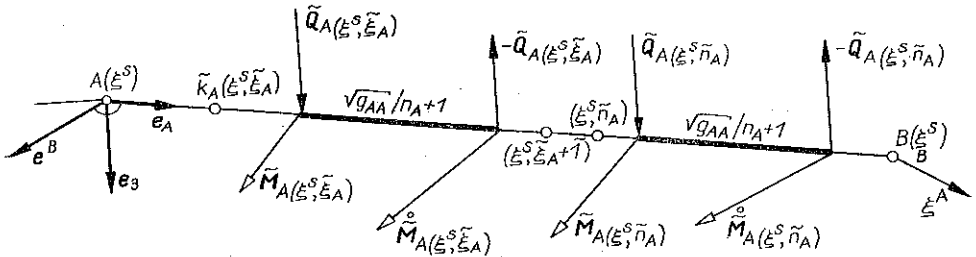
$$(4.2) \quad \mathcal{N}_{A(\xi^s, \xi_A)} = -2(n_A + 1) \frac{\tilde{\mathcal{K}}_{A(\xi^s, \xi_A)}}{\varepsilon_{AB3} \sqrt{g^{BB}}}.$$

Wektorowe składowe opisujące wzajemny stan napięcia przedstawione są na rys. 6. Rysunek przedstawia te składowe w odniesieniu do odcinków pośredniego i ostatniego dowolnego łącznika na A -tej linii parametrycznej. Składowe te wyrażają się przez skalary (składowe tensorowe) następująco:

$$(4.3) \quad \tilde{\mathbf{M}}_{A(\xi^s, \xi_A)} = \tilde{m}_{A(\xi^s, \xi_A)}^s \mathbf{e}_s, \quad \hat{\mathbf{M}}_{A(\xi^s, \xi_A)} = \hat{m}_{A(\xi^s, \xi_A)}^s \mathbf{e}_s, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{A(\xi^s, \xi_A)} = \tilde{q}_{A(\xi^s, \xi_A)} \mathbf{e}_3.$$

Z warunku równowagi poszczególnych odcinków tego łącznika wynika zależność

$$(4.4) \quad \tilde{M}_A(\xi^s, \xi_A) = -\tilde{M}_A(\xi^s, \xi_A) - \frac{1}{n_A + 1} \varepsilon_{AB3} \tilde{q}_A(\xi^s, \xi_A) e^B.$$



Rys. 6

Pomiędzy składowymi wzajemnego i podstawowego stanu napięcia zachodzą następujące zależności:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tilde{m}_A^s(\xi^s, \xi_A) &= (\tilde{\mathcal{K}}_A + \tilde{\mathcal{G}}_A)_{\xi^s, \xi_A} g^{Bs} / \sqrt{g^{BB}} - \tilde{\mathcal{H}}_A(\xi^s, \xi_A) g_A^s / \sqrt{g_{AA}}, \\ \tilde{m}_A^s(\xi^s, \xi_A) &= (\tilde{\mathcal{K}}_A - \tilde{\mathcal{G}}_A)_{\xi^s, \xi_A} g^{Bs} / \sqrt{g^{BB}} + \tilde{\mathcal{H}}_A(\xi^s, \xi_A) g_A^s / \sqrt{g_{AA}}, \\ \tilde{q}_A(\xi^s, \xi_A) &= \tilde{\mathcal{H}}_A(\xi^s, \xi_A). \end{aligned}$$

Wzory powyższe zostaną wykorzystane przy pisaniu równań równowagi.

5. ZWIĄZKI FIZYCZNE

Wyróżnione zostaną dwie postacie związków fizycznych. Pierwsza postać będzie zależnością między składowymi podstawowego stanu napięcia a składowymi stanu odkształcenia. Zależności te, wynikające wprost z teorii belek, mają dla rozpatrywanego zagadnienia następującą postać:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_A(\xi^s, \xi_A) &= 6(n_A + 1) \frac{D_A}{\sqrt{g_{AA}}} \tilde{\gamma}_A(\xi^s, \xi_A), \\ \tilde{\mathcal{G}}_A(\xi^s, \xi_A) &= 2(n_A + 1) \frac{D_A}{\sqrt{g_{AA}}} \tilde{\lambda}_A(\xi^s, \xi_A), \\ \tilde{\mathcal{H}}_A(\xi^s, \xi_A) &= (n_A + 1) \frac{D_{0A}}{\sqrt{g_{AA}}} \tilde{\varphi}_A(\xi^s, \xi_A), \\ \tilde{\mathcal{L}}_A(\xi^s, \xi_A) &= -12 \varepsilon_{AB3}^* (n_A + 1)^2 \frac{D_A}{g_{AA}} \tilde{\gamma}_A(\xi^s, \xi_A), \quad \varepsilon_{AB3}^* = \pm 1. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach symbolami D_A i D_{0A} oznaczono odpowiednio sztywności giętne i skrętne łączników leżących na A -tej linii parametrycznej. W pracy rozpatrzony zostanie przypadek łączników przyrządnych; oznacza to, że własności sprężyste poszczególnych odcinków danego łącznika są takie same.

Druga postać związków fizycznych jest zależnością między składowymi wzajemnego stanu napięcia a składowymi stanu odkształcenia. Na podstawie związków (4.5) zależności te mają postać

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \tilde{m}_A^s(\xi^s, \tilde{\xi}_A) &= 2(n_A + 1) D_A \frac{g^{Bs}}{\sqrt{g_{AA} g^{BB}}} (3\tilde{\nu}_A + \tilde{\lambda}_A)_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} - (n_A + 1) D_{0A} \frac{g_A^s}{g_{AA}} \tilde{\varphi}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A), \\ \tilde{q}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) &= -12(n_A + 1)^2 \frac{D_A}{g_{AA}} \tilde{\nu}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A). \end{aligned}$$

Po podstawieniu do tych zależności wielkości geometrycznych (3.7) i (3.8) i pewnych przekształceniach otrzymuje się je w postaci operatorowej:

$$(5.3) \quad \tilde{m}_A^s(\xi^s, \tilde{\xi}_A) = \tilde{\beta}_{At}^s \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t + \tilde{\beta}_A^s \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}, \quad \tilde{q}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) = \tilde{\beta}_{At} \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t + \tilde{\beta}_A \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}$$

dla odcinków pośrednich dowolnego łącznika oraz

$$(5.4) \quad \tilde{m}_A(\xi^s, \tilde{n}_A) = \beta_{At} \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + \beta_A^s \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}, \quad \tilde{q}_A(\xi^s, \tilde{n}_A) = \beta_{At} \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + \beta_A \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}$$

dla odcinka ostatniego tego łącznika. Poszczególne operatory są następujące:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \tilde{\beta}_{At}^s &= D_A (n_A + 1) \frac{1}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \left[6g g^{Bs} g_t^B \left(1 + \frac{1}{3} \tilde{\delta}_A \right) - \frac{D_{0A}}{D_A} g_A^s g_{At} \tilde{\delta}_A \right], \\ \tilde{\beta}_A^s &= 6D_A (n_A + 1)^2 \frac{\varepsilon_{AB3} g^{Bs}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \tilde{\delta}_A, \\ \tilde{\beta}_{At} &= -12D_A (n_A + 1)^2 \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} g_t^B \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{\delta}_A \right), \\ \tilde{\beta}_A &= -12D_A (n_A + 1)^3 \frac{1}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \tilde{\delta}_A \end{aligned}$$

oraz

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \beta_{At}^s &= D_A (n_A + 1) \frac{1}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \left\{ 6g g^{Bs} g_t^B + \left(2g g^{Bs} g_r^B - \frac{D_{0A}}{D_A} g_A^s g_{Ar} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times [g_t^r \tilde{\delta}_A + \Gamma_{At}^r (1 + \tilde{\delta}_A)] \right\}, \\ \beta_A^s &= 6D_A (n_A + 1)^2 \frac{\varepsilon_{AB3} g^{Bs}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \tilde{\delta}_A, \\ \beta_{At} &= -12D_A (n_A + 1)^2 \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \left[g_t^B \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{\delta}_A \right) + \frac{1}{2} \Gamma_{At}^B (1 + \tilde{\delta}_A) \right], \\ \beta_A &= -12D_A (n_A + 1)^3 \frac{1}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \tilde{\delta}_A, \quad r = 1, 2. \end{aligned}$$

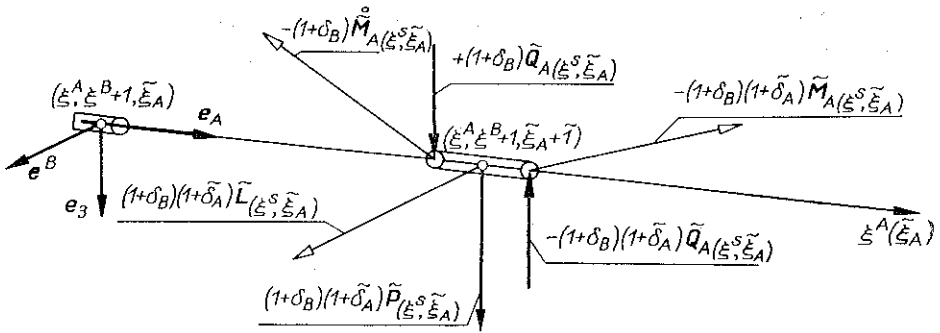
Związki fizyczne w powyższej postaci wykorzystane będą przy wprowadzeniu przemieszczeniowych równań równowagi siatki.

6. RÓWNANIA RÓWNOWAGI PŁYTY SIATKOWEJ

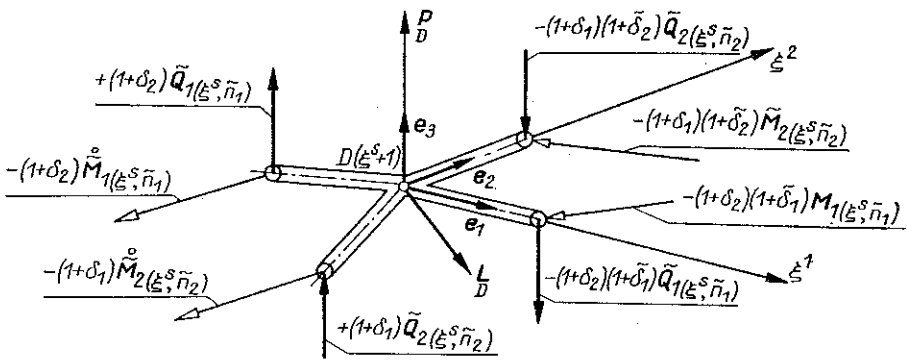
Na rys. 2 przedstawiono schematycznie układ sił zewnętrznych obciążających dowolne «oczko» rozważanej płyty siatkowej. Funkcje wektorowe, określające to obciążenie, wyrażają się przez funkcje skalarne następująco:

$$(6.1) \quad \tilde{\mathbf{P}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} = \tilde{P}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} \mathbf{e}_3, \quad \tilde{\mathbf{L}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} = \tilde{L}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} \mathbf{e}_s.$$

W tym przypadku napisane zostaną równania równowagi zarówno dla dowolnego węzła rzeczywistego jak i dla dowolnego węzła pośredniego.



Rys. 7



$$\begin{aligned} \tilde{P}_D &= (1 + \delta_2)(1 + \tilde{\delta}_1) \tilde{P}_{(\xi^s, \tilde{\pi}_1)} = (1 + \delta_1)(1 + \tilde{\delta}_2) \tilde{P}_{(\xi^s, \tilde{\pi}_2)} \\ \tilde{L}_D &= (1 + \delta_2)(1 + \tilde{\delta}_1) \tilde{L}_{(\xi^s, \tilde{\pi}_1)} = (1 + \delta_1)(1 + \tilde{\delta}_2) \tilde{L}_{(\xi^s, \tilde{\pi}_2)} \end{aligned}$$

Rys. 8

Układ sił zewnętrznych jak i wewnętrznych, działających na wyróżniony węzeł pośredni $(\xi^A, \xi^B + 1, \xi_A + \tilde{1})$, przedstawia rys. 7, analogiczny zaś układ sił, działających na węzeł rzeczywisty $D(\xi^1 + 1, \xi^2 + 1)$, rys. 8. Siły wewnętrzne stanowią tutaj oddziaływania poszczególnych odcinków łączników na te węzły.

Wektorowe równania równowagi przedstawionych węzłów mają postać: dla węzła pośredniego $(\xi^A, \xi^B + 1, \xi_A + \tilde{1})$

$$(1 + \delta_B) \delta_A \tilde{\mathbf{Q}}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) - (1 + \delta_B)(1 + \delta_A) \tilde{\mathbf{P}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} = 0,$$

$$(6.2) \quad (1 + \delta_B) \delta_A \tilde{\mathbf{M}}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) - \frac{1}{n_A + 1} (1 + \delta_B) (\tilde{q}_A(\xi^s, \tilde{\xi}_A) \varepsilon_{AB3} \mathbf{e}^B) -$$

$$- (1 + \delta_B)(1 + \delta_A) \tilde{\mathbf{L}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} = 0,$$

przy czym pierwsze równanie jest równaniem równowagi sił, drugie momentów; dla węzła rzeczywistego D o współrzędnych $(\xi^1 + 1, \xi^2 + 1)$

$$\sum_{A=1}^2 [(1 + \delta_B)(\mathbf{Q}_A(\xi^{A+1}, \xi^B) - \tilde{\mathbf{Q}}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)})] - (1 + \delta_2)(1 + \delta_1) \tilde{\mathbf{P}}_{(\xi^s, \tilde{n}_1)} = 0,$$

$$(6.3) \quad \sum_{A=1}^2 \left[(1 + \delta_B) \left(\mathbf{M}_A(\xi^{A+1}, \xi^B) - \tilde{\mathbf{M}}_A(\xi^s, \xi^B, \tilde{n}_A) - \frac{1}{n_A + 1} \varepsilon_{AB3} \tilde{q}_A(\xi^s, \xi^B, \tilde{n}_A) \mathbf{e}^B \right) \right] -$$

$$- (1 + \delta_2)(1 + \delta_1) \tilde{\mathbf{L}}_{(\xi^s, \tilde{n}_1)} = 0.$$

Powyższe zagadnienie jest lokalnie trzykrotnie statycznie niewyznaczalne. W celu jego rozwiązania doprowadza się powyższy układ do równań równowagi w przemieszczeniach. Postać tę otrzymuje się przez wykorzystanie wzorów (5.3) i (5.4). Operatorowa postać przemieszczeniowych równań równowagi jest następująca: dla węzła pośredniego $(\xi^A, \xi^B + 1, \xi_A + \tilde{1})$:

$$\tilde{E}_{tA} \tilde{\mathcal{Q}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t + \tilde{E}_A \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} - \tilde{E}_A \tilde{P}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} = 0,$$

$$(6.4) \quad \tilde{E}_{tA}^1 \tilde{\mathcal{Q}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t + \tilde{E}_A^1 \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} - \tilde{E}_{At}^1 \tilde{\mathcal{L}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t = 0,$$

$$\tilde{E}_{tA}^2 \tilde{\mathcal{Q}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t + \tilde{E}_A^2 \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)} - \tilde{E}_{At}^2 \tilde{\mathcal{L}}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^t = 0,$$

przy czym poszczególne operatory są następujące:

$$\tilde{E}_{tA} = -12D_A(n_A + 1)^2(1 + \delta_B) \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}} g_t^B \left(1 + \frac{1}{2} \delta_A \right) \delta_A,$$

$$\tilde{E}_A = -12D_A(n_A + 1)^3(1 + \delta_B) \frac{1}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}} \delta_A \delta_A,$$

$$(6.5) \quad \tilde{E}_{tA}^T = D_A(n_A + 1)(g_r^T + \Gamma_{Br}^T)(1 + \delta_B) \left[\frac{g g^{Br}}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}} g_t^B (12 + 12\delta_A + 2\delta_A \delta_A) - \right.$$

$$\left. - \frac{D_{0A}}{D_A} \frac{g_{At}}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}} g_r^r \delta_A \delta_A \right],$$

$$\tilde{E}_A^T = 6D_A(n_A + 1)^2(g_r^T + \Gamma_{Br}^T)(1 + \delta_B) \frac{\varepsilon_{AB3} g^{Br}}{g_{AA}\sqrt{g_{AA}}} (2 + \delta_A) \delta_A,$$

$$\tilde{E}_A = (1 + \delta_B)(1 + \delta_A),$$

$$\tilde{E}_{At}^T = (g_t^T + \Gamma_{Bt}^T)(1 + \delta_B)(1 + \delta_A), \quad T=1, 2, \quad g = \det g_{st};$$

dla węzła rzeczywistego $D (\xi^1 + 1, \xi^2 + 1)$

$$(6.6) \quad \begin{aligned} & \sum_{A=1}^2 (E_{tA} \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + E_A \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}) - \dot{E} \tilde{P}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)} = 0, \\ & \sum_{A=1}^2 (E_{tA}^1 \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + E_A^1 \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}) - \dot{E}_t^1 \tilde{L}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t = 0, \\ & \sum_{A=1}^2 (E_{tA}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t + E_A^2 \tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}) - \dot{E}_t^2 \tilde{L}_{(\xi^s, \tilde{n}_A)}^t = 0, \end{aligned}$$

a poszczególne operatory są następujące:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} E_{tA} &= -6D_A (n_A + 1)^2 (1 + \delta_B) \left\{ \delta_A \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} g_t^B (1 + \delta_A) + \right. \\ & \quad \left. + [g_0^{nA} (1 + \delta_A) - 1] \frac{\varepsilon_{AB3} \Gamma_{At}^B}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} (1 + \delta_A) \right\}, \\ E_A &= -12D_A (n_A + 1)^3 (1 + \delta_B) \delta_A \frac{1}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \delta_A, \\ E_{tA}^T &= D_A (n_A + 1) (g_t^T + \Gamma_{Bl}^T) (1 + \delta_B) \left\{ (g_s^l + \Gamma_{As}^l) (1 + \delta_A) \frac{1}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \times \right. \\ & \quad \times \left\{ 6g g^{Bs} g_t^B + \left(2g g^{Bs} g_k^B - \frac{D_{0A}}{D_A} g_A^s g_{Ak} \right) [g_t^k \delta_A + g_0^{nA} \Gamma_{At}^k (1 + \delta_A)] \right\} + \\ & \quad - \frac{g_s^l}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \left\{ 6g g^{Bs} g_t^B + \left(2g g^{Bs} g_k^B - \frac{D_{0A}}{D_A} g_A^s g_{Ak} \right) [g_t^k \delta_A + \Gamma_{At}^k (1 + \delta_A)] \right\} + \\ & \quad \left. + \frac{6g g^{Bl}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} [g_t^B (2 + \delta_A) + \Gamma_{At}^B (1 + \delta_A)] \right\}, \\ E_A^T &= 6D_A (n_A + 1)^2 (g_t^T + \Gamma_{Bl}^T) (1 + \delta_B) [g^{Bl} + (g_s^l + \Gamma_{As}^l) (1 + \delta_A) g^{Bs}] \frac{\varepsilon_{AB3}}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \delta_A, \\ \dot{E}_t^T &= [(g_t^T + \Gamma_{t1}^T) (1 + \delta_1) + (1 + \delta_1) \Gamma_{t2}^T + \Gamma_{r1}^T (1 + \delta_1) \Gamma_{r2}^T] (1 + \delta_2), \\ \dot{E} &= (1 + \delta_2) (1 + \delta_1), \quad l, k, r = 1, 2, \quad \varepsilon_{AB3} = \pm \sqrt{g}, \end{aligned}$$

przy czym tutaj $\tilde{\delta}_A \equiv \delta_A$ z wyjątkiem przypadku, gdy operator ten działa na składowe stanu przemieszczenia (wtedy zachowuje się on w sposób opisany poprzednio); ponadto g_0^{nA} jest symbolem Kroneckera.

Powyższe równania wyprowadzono przy założeniu niezmienności własności sprężystych łączników wzdłuż poszczególnych linii parametrycznych. Zawierają one trzy niewiadome funkcje stanu przemieszczenia:

$$\tilde{V}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}, \quad \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^1, \quad \tilde{\Omega}_{(\xi^s, \tilde{\xi}_A)}^2.$$

Równania te tworzą układ liniowych równań różnicowych rzędu drugiego w ogólnym przypadku o zmiennych współczynnikach. Rozwiązanie ściśle tych równań jest niezwykle trudne aczkolwiek możliwe, czego dowodem jest praca J. ŚLIŻEWICZA

[4]. Najracjonalniejsze dla rozwiązania tych równań wydają się być metody numeryczne oparte na technice cyfrowej. W tym przypadku równania (6.4) i (6.6) należy doprowadzić do algebraicznych równań rekurencyjnych i uzupełnić równaniami brzegowymi w zależności od rodzaju podparcia węzłów brzegowych siatki.

Równaniami brzegowymi nazywa się pewne równania, które muszą być spełnione przez funkcje stanu przemieszczenia — w tym przypadku w węzłach brzegowych rozpatrywanej siatki. Wynikają one z danych na brzegach pewnych składowych tego stanu. Najprościej jest je określić dla sztywno zamocowanych węzłów brzegowych. W innych przypadkach, tzn. brzegu podpartego przegubowo lub swobodnego, w mechanice ośrodków siatkowych wprowadzono do tego celu pojęcie fikcyjnych łączników jako myślowe przedłużenie łączników rzeczywistych wzdłuż danej linii parametrycznej do tzw. węzła fikcyjnego, leżącego bezpośrednio poza siatką. Dla przypadku rozpatrywanego w pracy wystarczy wprowadzić pojęcie fikcyjnego odcinka łącznika. Dla węzłów rzeczywistych o współrzędnych (ξ_0^A, ξ^B) odcinkiem fikcyjnym nazywa się myślowe przedłużenie łączników o odcinek $\sqrt{g_{AA}/n_A+1}$ wzdłuż A -tej linii parametrycznej do fikcyjnego węzła pośredniego o współrzędnych $(\xi_0^A, \xi^B, \tilde{I}_A)$ lub $(\xi_0^A-1, \xi^B, \tilde{n}_A)$ w zależności od położenia brzegu w stosunku do krzywoliniowego układu współrzędnych ξ^s . Po takim myślowym przedłużeniu dalszy tok postępowania przy rozwiązywaniu równań brzegowych jest taki sam jak w zagadnieniu klasycznym i nie wymaga ponownego omówienia.

Przemieszczeniowe równania równowagi (6.4) i (6.6) wraz z równaniami brzegowymi tworzą zamknięty układ równań pozwalający rozwiązać zagadnienie dowolnej płyty siatkowej obciążonej w węzłach jak i między węzłami.

7. SIATKOWA PŁYTA BIEGUNOWA

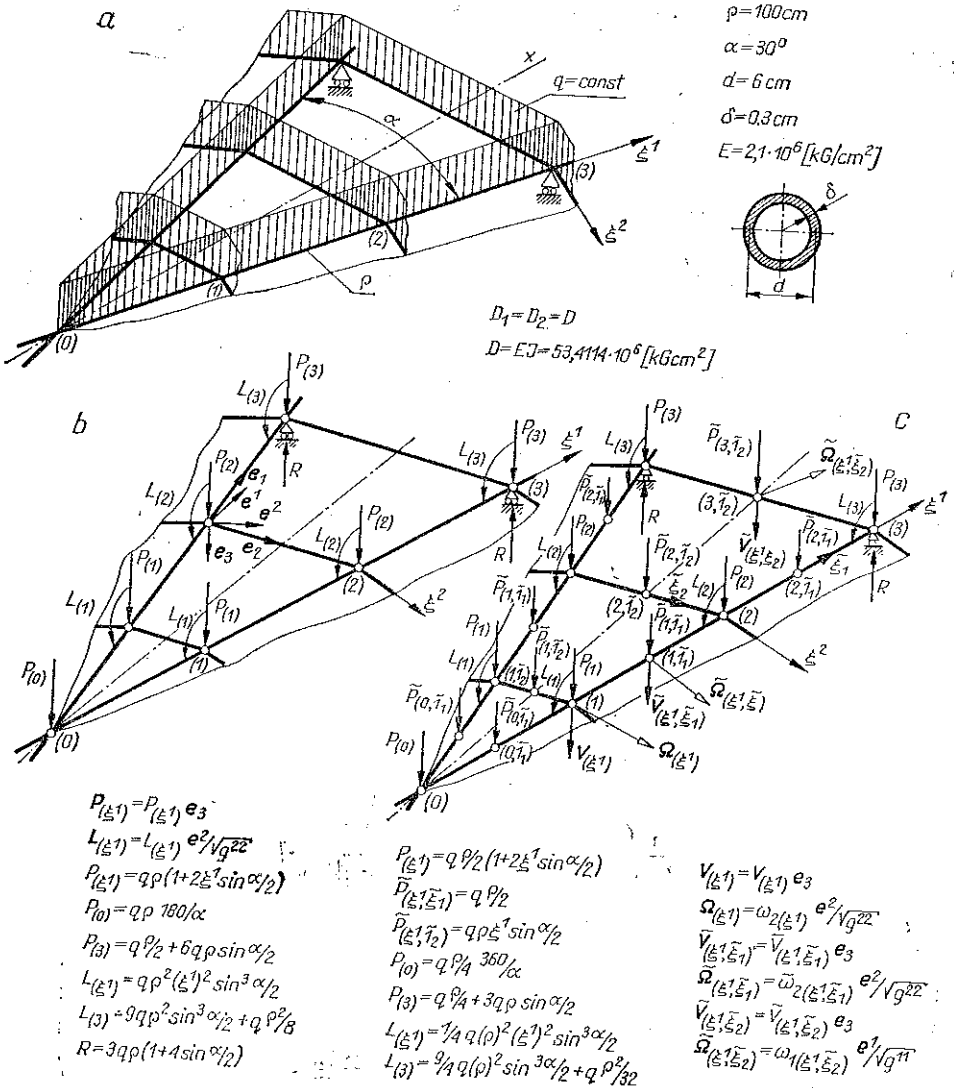
Dla ilustracji powyższej teorii przedstawiony zostanie przykład siatkowej płyty biegunowej (rys. 9a), obciążonej równomiernym obciążeniem ciągłym q , przyłożonym zarówno do łączników promieniowych jak i obwodowych. Dla rozwiązania zagadnienia tej płyty obciążenie to zastąpiono statycznie równoważnymi, przedstawionymi na rys. 9b i 9c. Przypadek z rys. 9b odpowiada zagadnieniu klasycznemu, a przypadek z rys. 9c wyżej przedstawionej teorii. Własności geometryczne siatkowej płyty biegunowej były wielokrotnie opisywane, np. w [1], nie będą ponownie omawiane. Zagadnienie powyższe należy do tzw. zagadnień biegunowo-symetrycznych. Oznacza to, że funkcje określające stan napięcia i przemieszczenia płyty nie zależą od współrzędnej obwodowej ξ^2 . Ponadto dla rozpatrywanego przypadku funkcje te są symetryczne względem osi x . W poszczególnych łącznikach wystąpią tylko momenty zginające. Dla tak zdefiniowanego przypadku równania przemieszczeniowe (6.4) i (6.6) przyjmą postać:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} & \text{dla punktów pośrednich } (\xi^1, \xi_1 + \tilde{I}_1) \text{ łączących na łącznikach promieniowych} \\ & -6 \frac{D_1}{\rho^2} (n_1 + 1)^2 \delta_1 (2 + \delta_1) \tilde{\omega}_{2(\xi^1, \xi_1)} - 12 \frac{D_1}{\rho^3} (n_1 + 1)^3 \delta_1 \tilde{\delta}_1 \tilde{V}_{(\xi^1, \xi_1)} = \\ & = (1 + \delta_1) \tilde{P}_{(\xi^1, \xi_1)}, \\ & \rho(6 + 6\delta_1 + \delta_1 \tilde{\delta}_1) \tilde{\omega}_{2(\xi^1, \xi_1)} + 3(n_1 + 1)(2 + \delta_1) \tilde{\delta}_1 \tilde{V}_{(\xi^1, \xi_1)} = 0; \end{aligned}$$

dla punktów pośrednich $(\xi^1+1, \xi_2+\tilde{1}_2)$ leżących na łącznikach obwodowych

$$(7.2) \quad \frac{3D_2(n_2+1)^2}{2\rho^2 \sin^2 \alpha/2} \frac{(2+\delta_2)\delta_2 \tilde{\omega}_{1(\xi^1+1, \xi_2)}}{(\xi^1+1)^2} - \frac{3D_2(n_2+1)^3}{2\rho^3 \sin^3 \alpha/2} \frac{\delta_2 \delta_2 \tilde{V}_{(\xi^1+1, \xi_2)}}{(\xi^1+1)^3} = (1+\delta_2) \tilde{P}_{(\xi^1+1, \xi_2)}$$

$$2\rho \sin \alpha/2 (\xi^1+1) (6+6\delta_1+\delta_1 \delta_1) \tilde{\omega}_{1(\xi^1+1, \xi_2)} - 3(n_2+1)(2+\delta_2)\delta_2 \tilde{V}_{(\xi^1+1, \xi_2)} = 0;$$



Rys. 9

dla węzłów rzeczywistych ($\xi^1 + 1$)

$$(7.3) \quad \begin{aligned} & -\frac{3D_1}{\rho^2} (n_1 + 1)^2 \left\{ 2(2 + \delta_1) \delta_1 \tilde{\omega}_{2(\xi^1, \tilde{n}_1)} - \frac{\beta'}{(1 + \xi^1)^2} \delta_2 \tilde{\omega}_{1(\xi^1 + 1, \tilde{n}_2)} \right\} - \\ & -\frac{3D_1}{\rho^3} (n_1 + 1)^3 \left\{ 4\delta_1 \delta_1 \tilde{V}_{(\xi^1, \tilde{n}_1)} - \frac{\beta}{(1 + \xi^1)^3} \delta_2 \tilde{V}_{(\xi^1 + 1, \tilde{n}_2)} \right\} = P_{(\xi^1 + 1)}, \\ & \frac{2D_1}{\rho} (n_1 + 1) \left\{ (6 + 6\delta_1 + \delta_1 \delta_1) \tilde{\omega}_{2(\xi^1, \tilde{n}_1)} + \beta'' \frac{(1 + 2\delta_2) \tilde{\omega}_{1(\xi^1 + 1, \tilde{n}_2)}}{1 + \xi^1} \right\} + \\ & + \frac{6D_1}{\rho^2} (n_1 + 1)^2 \left\{ 2(2 + \delta_1) \delta_1 \tilde{V}_{(\xi^1, \tilde{n}_1)} + \beta' \sin \alpha/2 \frac{\delta_2 \tilde{V}_{(\xi^1 + 1, \tilde{n}_2)}}{(1 + \xi^1)^2} \right\} = L_{(\xi^1 + 1)}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{D_2 (n_2 + 1)^3}{D_1 (n_1 + 1)^3 \sin^3 \alpha/2}, & \beta' &= \frac{D_2 (n_2 + 1)^2}{D_1 (n_1 + 1)^2 \sin^2 \alpha/2}, \\ \beta'' &= \frac{D_2 (n_2 + 1)}{D_1 (n_1 + 1)}, & \omega_{1(\xi^1 + 1)} &= \omega_{2(\xi^1 + 1)} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Momenty gnące i siły poprzeczne otrzymuje się dla tego przypadku z formuł

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \tilde{m}_{1(\xi^1, \tilde{\xi}_1)} &= \frac{6D_1}{\rho^2} (n_1 + 1)^2 \delta_1 \tilde{V}_{(\xi^1, \tilde{\xi}_1)} + \frac{2D_1}{\rho} (n_1 + 1) (3 + \delta_1) \tilde{\omega}_{2(\xi^1, \tilde{\xi}_1)}, \\ \tilde{m}_{1(\xi^1, \tilde{\xi}_1)} &= \frac{6D_1}{\rho^2} (n_1 + 1)^2 \delta_1 \tilde{V}_{(\xi^1, \tilde{\xi}_1)} + \frac{2D_1}{\rho} (n_1 + 1) (3 + 2\delta_1) \tilde{\omega}_{2(\xi^1, \tilde{\xi}_1)}, \\ \tilde{q}_{1(\xi^1, \tilde{\xi}_1)} &= -\frac{12D_1}{\rho^3} (n_1 + 1)^3 \delta_1 \tilde{V}_{(\xi^1, \tilde{\xi}_1)} - \frac{6D_1}{\rho^2} (n_1 + 1)^2 (2 + \delta_1) \tilde{\omega}_{2(\xi^1, \tilde{\xi}_1)} \end{aligned}$$

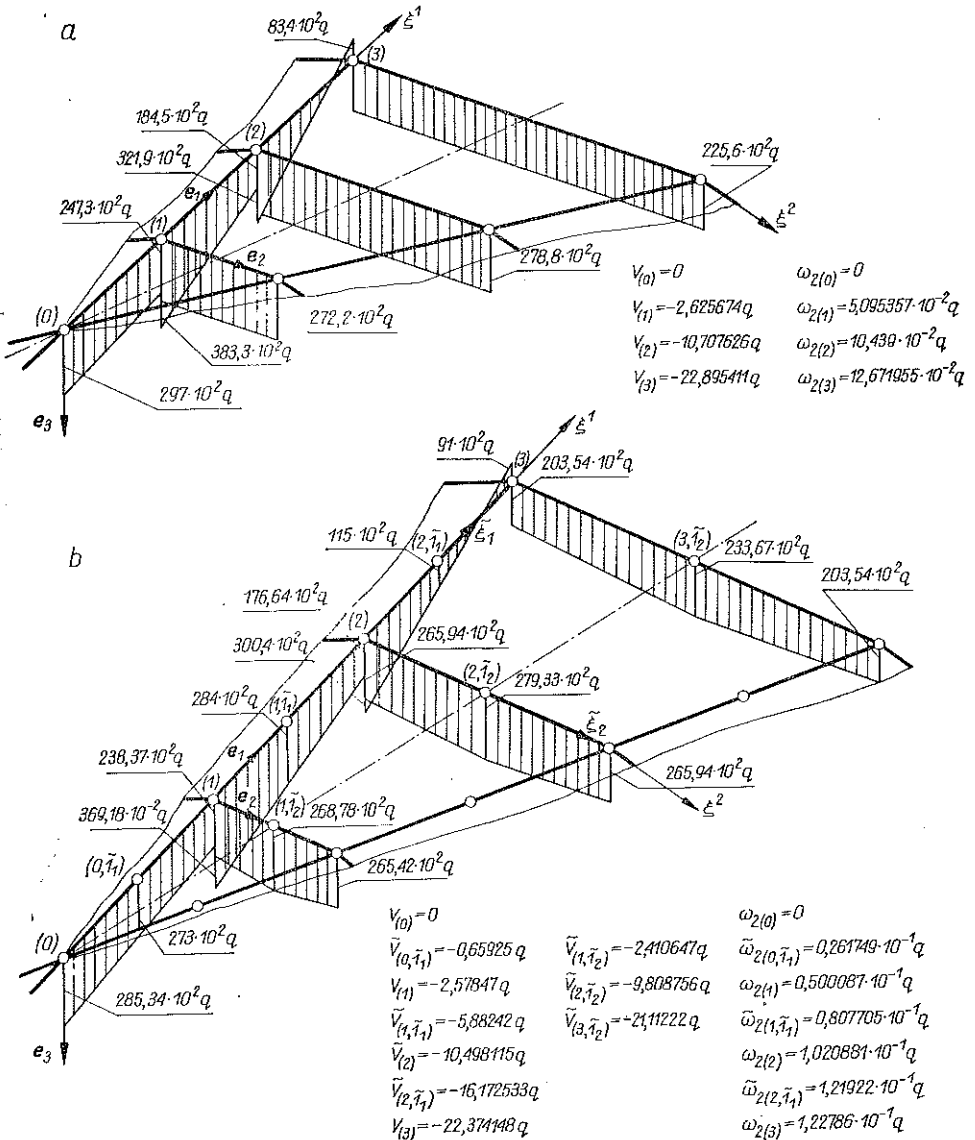
dla odpowiednich przekroji łączników promieniowych oraz

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \tilde{m}_{2(\xi^1, \tilde{\xi}_2)} &= -\frac{6D_2}{\rho^2} \frac{(n_2 + 1)^2}{4 \sin^2 \alpha/2} \frac{\delta_2 \tilde{V}_{(\xi^1, \tilde{\xi}_2)}}{(\xi^1)^2} + \frac{2D_2}{\rho} \frac{(n_2 + 1)}{2 \sin \alpha/2} \frac{(3 + \delta_2) \tilde{\omega}_{1(\xi^1, \tilde{\xi}_2)}}{\xi^1}, \\ \tilde{m}_{2(\xi^1, \tilde{\xi}_2)} &= -\frac{6D_2}{\rho^2} \frac{(n_2 + 1)^2}{4 \sin^2 \alpha/2} \frac{\delta_2 \tilde{V}_{(\xi^1, \tilde{\xi}_2)}}{(\xi^1)^2} + \frac{2D_2}{\rho} \frac{(n_2 + 1)}{2 \sin \alpha/2} \frac{(3 + 2\delta_2) \tilde{\omega}_{1(\xi^1, \tilde{\xi}_2)}}{\xi^1}, \\ \tilde{q}_{2(\xi^1, \tilde{\xi}_2)} &= -\frac{12D_2}{\rho^3} \frac{(n_2 + 1)^3}{8 \sin^3 \alpha/2} \frac{\delta_2 \tilde{V}_{(\xi^1, \tilde{\xi}_2)}}{(\xi^1)^3} + \frac{6D_2}{\rho^2} \frac{(n_2 + 1)^2}{4 \sin^2 \alpha/2} \frac{(2 + \delta_2) \tilde{\omega}_{1(\xi^1, \tilde{\xi}_2)}}{(\xi^1)^2} \end{aligned}$$

dla odpowiednich przekroji łączników obwodowych.

Układ równań (7.1)–(7.3) został rozwiązany numerycznie dla szczególnej siatki z rys. 9 raz dla przypadku $n_1 = n_2 = 0$ (zadanie klasyczne; rys. 9b) a następnie dla przypadku $n_1 = n_2 = 1$ (zadanie z rys. 9c). Ostateczne wyniki przedstawione są na rys. 10a i 10b. Rysunki ilustrują przebieg momentów gnących w płycie. Wykres na rys. 10a odpowiada zadaniu z rys. 9b, wykres zaś na rys. 10b zadaniu z rys. 9c. Widać, że zastąpienie rzeczywistego obciążenia schematem statycznie równoważnym

(rys. 9c) dają zmniejszenie ekstremalnych wartości momentów gnących (w porównaniu z wykresem na rys. 10a). Wynika z tego wniosek, że przez zmianę liczby węzłów pośrednich n_1 i n_2 można problem płyty siatkowej rozwiązać z dowolną dokładnością, a tym samym oszacować wartość rozwiązania klasycznego. Należy zaznaczyć, że przez zwiększanie liczby węzłów pośrednich otrzymuje się szereg zbieżny rozwiązań do rozwiązania ścisłego, jakie można by otrzymać traktując łącznik jako belkę zamocowaną sprężysto na końcach. Otrzymanie jednak rozwiązania ścisłego jest kłopotliwe ze względów rachunkowych.



Rys. 10

8. WNIOSKI

Problem płyty siatkowej, obciążonej zarówno w węzłach jak i między węzłami, jest znacznie bardziej złożony w porównaniu z zagadnieniem klasycznym. Uwidacznia się to w zwiększonej liczbie równań opisujących ten problem. Stosując przemieszczeniową metodę rozwiązywania otrzymuje się układ równań dający po rozwiązaniu pełniejszy opis pola przemieszczeń aniżeli w zagadnieniu klasycznym. Metoda przedstawiona w pracy nie jest jedyną metodą rozwiązania omawianego problemu. Została ona opracowana głównie pod kątem zastosowania jej do rozwiązania problemu wybożenia płyt siatkowych [3].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, 1970, Warszawa.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *The bending problem of plane grates of discrete structures*, Arch. Mech. Stos., 22, 2, 1970.
3. J. LEWIŃSKI, *Stateczność rusztów siatkowych*, rozpr. dokt., PW, 1972.
4. J. ŚLIŻEWICZ, *Zginanie i skręcanie osiowo-symetrycznej płyty o dyskretnej strukturze*, Rozpr. Inżyn., 19, 2, 1971.

Резюме

ПРОБЛЕМА СЕТОЧНОЙ ПЛИТЫ НАГРУЖЕННОЙ В УЗЛАХ И МЕЖДУ УЗЛАМИ

Работа обсуждает проблему сеточной плиты нагруженной так в узлах, как и между узлами в произвольном количестве промежуточных точек на соединителях плиты. Для так нагруженной плиты описано состояние перемещений и деформаций, приведены физические соотношения и выведены уравнения равновесия в перемещениях. Кроме этого описан способ решения проблемы граничных условий, а также способ решения полученных уравнений равновесия. Работа иллюстрирована частным примером.

SUMMARY

PROBLEM OF A LATTICE PLATE LOADED AT THE NODES AND BETWEEN THE NODES

The paper presents the problem of a lattice plate which is loaded both at the nodes and between the nodal points, at an arbitrary number of intermediate points of the beam elements. Under such loading conditions, the state of stress and displacement is described, physical relations are given, and the equations of equilibrium are derived in terms of displacements. Moreover, presented is the method of solution of the boundary value problem as also the method of solution of the equilibrium equations derived. The paper is illustrated by a particular example.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1973 r.