

## BADANIE WPŁYWU EFEKTU BAUSCHINGERA NA PLASTYCZNE PRZYSTOSOWANIE SIĘ KONSTRUKCJI (NA PRZYKŁADZIE UKŁADU PRĘTOWEGO)

KAZIMIERZ KOWALCZYK i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

### 1. UWAGI WSTĘPNE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Większość prac poświęconych problemowi plastycznego przystosowania dotyczy konstrukcji z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, chociaż E. MELAN [10] już w r. 1938 sformułował odpowiednie twierdzenie dla konstrukcji z materiału przejawiającego wzmocnienie. Twierdzenie to dotyczy idealnego efektu Bauschingera. B. G. NEAL [14] niezależnie wykazał szczególny przypadek tego twierdzenia dla konstrukcji prętowej i jednoosiowego stanu naprężenia.

Dopiero w ostatnich latach w teorii przystosowania zaczęto uwzględniać bardziej ogólnie pojęte wzmocnienie materiału. Najczęściej jest przyjmowana jedna z dwóch hipotez wzmocnienia: wzmocnienie izotropowe albo wzmocnienie kinematyczne. Dowody twierdzeń przystosowania, uwzględniających wymienione hipotezy, można znaleźć w pracach J. A. KÖNIGA [4 i 5] oraz G. MAIERA [7].

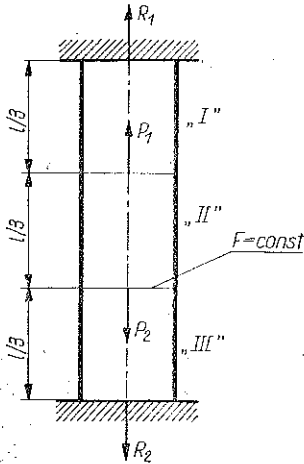
Zastosowanie ogólniejszej hipotezy wzmocnienia, tzw. wzmocnienia mieszanego (kinematyczno-izotropowego), w teorii przystosowania napotyka na dość poważne trudności. Pewne dane na ten temat można znaleźć we wspomnianych już pracach [4, 5 i 7], gdzie autorzy rozpatrują bardziej ogólne przypadki wzmocnienia niż wzmocnienie kinematyczne i izotropowe.

MAIER szczególnie dużo uwagi poświęcił teorii przystosowania się konstrukcji z materiału podlegającego prawu wzmocnienia. Jego prace obejmują również materiały wykazujące zmienność modułów wzmocnienia w trakcie obciążeń cyklicznych. MAIER zajmował się także procesami dynamicznymi w teorii przystosowania [7 i 9]. Rozszerzył on na przypadek wzmocnienia podane przez G. CERADINIEGO [1] uogólnienie twierdzenia MELANA w ujęciu dynamicznym. W pracy [8] przedstawił macierzową teorię przystosowania, uwzględniającą wzmocnienie materiału i efekty zmian wielkości geometrycznych konstrukcji.

W świetle przedstawionych prac nasuwa się pytanie, w jakim stopniu efektywnie wpływa rodzaj wzmocnienia (przyjęta hipoteza wzmocnienia) na możliwość przystosowania się konstrukcji. Jednoznaczna odpowiedź wydaje się dość trudna i na pewno zależna od samej konstrukcji oraz typu przyłożonego obciążenia. Niniejsza praca będzie próbą odpowiedzi na powyższe pytanie, jednakże zwięźle do przypadku

układu jednoosiowego rozciągania-ściskania. Postawione pytanie można więc zastąpić innym: jak wpływa udział efektu Bauschingera na plastyczne przystosowanie się konstrukcji.

Rozważania przeprowadzimy na prostym przykładzie pręta pryzmatycznego, umocowanego obydwoma końcami do idealnie sztywnych ścian, obciążonego dwiema osiowymi siłami zmieniającymi się zarówno co do wartości, jak i zwrotu (rys. 1).



Rys. 1. Schemat badanej konstrukcji z podziałem na odcinki I, II, III

Zbadamy zakres przystosowania się konstrukcji przy pewnych danych programach zmienności sił  $P_1$  i  $P_2$  oraz wartościach współczynników charakteryzujących udział efektu Bauschingera i wzmocnienie materiału. Następnie, traktując poszczególne etapy tych programów jako «cykle sterujące» (wyznaczające rozkład naprężeń resztkowych), określimy odpowiednie obszary przystosowania w płaszczyźnie  $P_1, P_2$ .

## 2. PRZYJĘTY OPIS ZACHOWANIA SIĘ MATERIAŁU PRĘTA PRZY OBCIĄŻENIACH PRZEMIENNYCH

W analizie wpływu efektu Bauschingera na plastyczne przystosowanie się pręta (rys. 1) posłużymy się modelem materiału przedstawionym w pracy [3]. Odpowiednią hipotezę liniowego wzmocnienia plastycznego nazwano w tej pracy hipotezą dowolnego, ustalonego udziału efektu Bauschingera. Ograniczymy się przy tym do materiałów, które w stanie naturalnym mają jednakowe własności przy rozciąganiu i przy ściskaniu.

Będziemy rozważali procesy przemienne (w szczególności procesy jednoosiowego rozciągania-ściskania), niekoniecznie cykliczne w poszczególnych punktach konstrukcji. Jednak w dalszym ciągu ograniczymy się do obciążeń cyklicznie zmiennych i część procesu pomiędzy kolejnymi zerowaniami się obciążeń nazwiemy półcyklem obciążeniowym lub krócej półcyklem. Przy powtarzaniu takich półcykli na ogół ani naprężenia, ani odkształcenia w poszczególnych punktach ciała nie zmieniają się cyklicznie.

Dla krótkiego przedstawienia wspomnianej hipotezy oraz w dalszej części pracy użyjemy następujących oznaczeń (rys. 2):

$$s = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad e = \frac{E\varepsilon}{\sigma_0} \quad \text{ogólnie bezwymiarowe naprężenie i odkształcenie, odniesione do granicy plastyczności } \sigma_0,$$

$E$  moduł Younga,

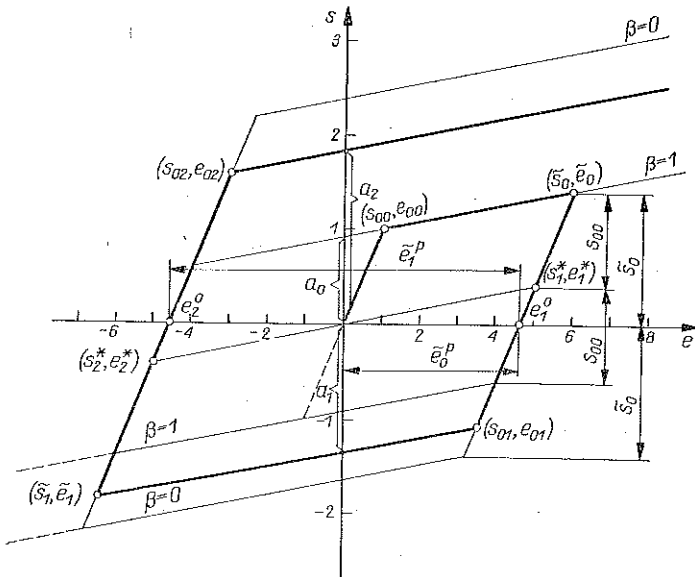
$n$  numer kolejnego półcyklu, przy czym  $n=0$  oznacza półcykl wyjściowy,

$s_n, e_n$  bieżące (zmiennie) naprężenia i odkształcenia w  $n$ -tym półcyklu,

- $\bar{s}_n, \bar{e}_n$  ekstremalne naprężenia i odkształcenia w  $n$ -tym półcyklu, od których rozpoczyna się proces bierny (odciążanie),
- $e_n^0$  odkształcenie  $e_n$  odpowiadające naprężeniom  $s_n=0$ ; są to odkształcenia plastyczne po  $(n-1)$ -szym półcyklu, przy czym  $e_0^0=0$ ,
- $e_n^p$  bieżąca, bezwzględna wartość zmian odkształceń plastycznych w  $n$ -tym półcyklu  $\bar{e}_n^p$  — po  $n$ -tym półcyklu,
- $s_{0n}, e_{0n}$  «kolejna granica plastyczności» i odpowiadające jej odkształcenie w  $n$ -tym półcyklu, przy czym  $s_{00}=e_{00}=\pm 1$ ,
- $s_n^*, e_n^*$  wartości naprężenia i odkształcenia resztkowego po  $(n-1)$ -szym półcyklu, przy czym  $s_0^*=e_0^*=0$ .

Za miarę udziału efektu Bauschingera (wyznaczającą granicę plastyczności  $s_{0n}$ ) w kolejnych półcyklach  $n$  przyjmiemy współczynnik  $\beta_n$  zdefiniowany wyrażeniem

$$(2.1) \quad \beta_n = \frac{(\bar{s}_{n-1} - s_{0n-1}) - (\bar{s}_{n-2} - s_{0n})}{2(\bar{s}_{n-1} - s_{0n-1})}, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

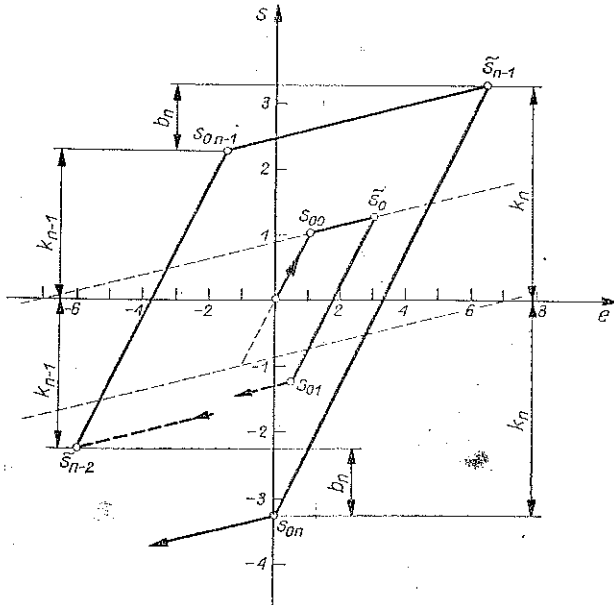


Rys. 2. Schemat hipotezy dowolnego, ustalonego udziału efektu Bauschingera

przy czym dla  $n=1$  należy przyjmować wartość  $\bar{s}_{n-2} = \pm 1$ , wynikającą z założenia jednakowych własności materiału po stronie rozciągania i ściskania. W tym miejscu i w dalszej części pracy górny znak odnosi się do procesów, w których półcyklem wyjściowym jest rozciąganie (rys. 2), natomiast dolny — do procesów rozpoczynających się od ściskania.

Współczynnik  $\beta_n$  został dobrany tak, by przyjęcie  $\beta_n=0$  odpowiadało hipotezie wzmocnienia izotropowego, natomiast  $\beta_n=1$  — hipotezie wzmocnienia kinematycznego dla dowolnego  $n$ . Istotnie, na dowolnym etapie cyklicznie zmiennego obciążenia przy wzmocnieniu izotropowym (rys. 3) zachodzi równość

$$(2.2) \quad |s_{0n}| = |\tilde{s}_{n-1}| = k_n, \quad n=1, 2, 3, \dots;$$



Rys. 3. Schemat hipotezy wzmocnienia izotropowego,  $\beta=0$

wobec tego wyrażenia w liczniku (2.1) są sobie równe:

$$(2.3) \quad \tilde{s}_{n-1} - s_{0n-1} = \tilde{s}_{n-2} - s_{0n} = b_n,$$

oraz

$$(2.4) \quad \beta_n = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Podstawowym założeniem hipotezy wzmocnienia kinematycznego (rys. 4) jest natomiast stałość sumy

$$(2.5) \quad |s_{0n}| + |\tilde{s}_{n-1}| = 2 |s_{00}| = 2, \quad n=1, 2, 3, \dots;$$

zatem licznik (2.1) po przekształceniu przyjmuje postać

$$(2.6) \quad (\tilde{s}_{n-1} - s_{0n-1}) + (s_{0n} - \tilde{s}_{n-2}) = c_n + c_n = 2c_n$$

i jest równy mianownikowi, natomiast

$$(2.7) \quad \beta_n = 1, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Ogólnie, wartość współczynnika  $\beta_n$  może zależeć od

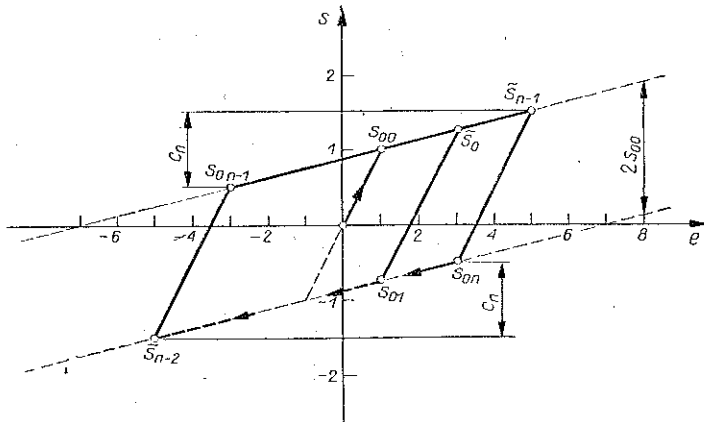
$$(2.8) \quad \beta_n = \beta_n(n, \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n-1}), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

i może opisywać procesy o nieustalonym, dowolnym udziale efektu Bauschingera.

W przedstawionej pracy ograniczymy się do stałego  $\beta_n = \text{const}$  w trakcie całego procesu [3]. Wówczas, opuszczając wskaźnik  $n$ , możemy określić (2.1); np. dla  $n = 1$  [16] (rys. 2)

$$(2.9) \quad \beta = \frac{\tilde{s}_0 + s_{01}}{2(\tilde{s}_0 - s_{00})}$$

Wartości  $\beta$  leżące w przedziale  $0 < \beta < 1$  będą reprezentować hipotezę wzmocnienia mieszanego, izotropowo-kinematycznego (częściowy udział efektu Bauschingera).



Rys. 4. Schemat hipotezy wzmocnienia kinematycznego,  $\beta=1$

Przyjmijmy ponadto miarę liniowego wzmocnienia materiału w postaci współczynnika  $\lambda$  [2], stałego w trakcie całego procesu:

$$(2.10) \quad \lambda = \frac{E-B}{E}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

gdzie  $E$  oznacza moduł Younga oraz  $B$  moduł liniowego wzmocnienia.

Przy takich założeniach naprężenia i odkształcenia w  $n$ -tym półcyklu są związane zależnościami [3]:

w trakcie odkształceń plastycznie czynnych

$$(2.11) \quad s_n = a_n + (1 - \lambda) e_n,$$

gdzie

$$a_0 = \pm \lambda,$$

$$a_n = \pm \lambda (2\lambda\beta - 2\lambda - 2\beta + 1)^n - 2\lambda(1-\lambda)(1-\beta) \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i (2\lambda\beta - 2\lambda - 2\beta + 1)^{n-1-i} \quad \text{dla } n \geq 1;$$

w trakcie odkształceń plastycznie biernych (zmian sprężystych)

$$(2.12) \quad s_n = e_n - e_n^0,$$

gdzie

$$e_0^0 = 0, \quad e_1^0 = \mp \lambda + \lambda \tilde{e}_0, \quad e_n^0 = \mp \lambda (2\lambda\beta - 2\lambda - 2\beta + 1)^{n-1} + \\ + 2\lambda(1-\lambda)(1-\beta) \sum_{i=0}^{n-2} \tilde{e}_i (2\lambda\beta - 2\lambda - 2\beta + 1)^{n-2-i} + \lambda \tilde{e}_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Naprężenie (2.11) można również wyrazić jako funkcję bezwzględnej wartości zmian odkształcenia trwałego  $e_n^p$  (rys. 2):

$$(2.13) \quad s_n = \pm (-1)^n \left[ 1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{e}_i^p \{1 - \beta [1 - (-1)^{n-i}]\} + e_n^p \right) \right].$$

Podkreślmy jeszcze w tym miejscu zależność między bezwzględną wartością zmian odkształceń plastycznych, będących odpowiednikiem parametru Odqvista  $I_{ep}$  [16]:

$$(2.14) \quad \sum_n \tilde{e}_n^p = \frac{2}{3} I_{ep},$$

a algebraicznymi wartościami odkształceń trwałych  $e_n^0$ , w kolejnych półcyklach (rys. 2):

$$(2.15) \quad \tilde{e}_n^p = |e_{n+1}^0 - e_n^0|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Kolejną granicę plastyczności określają wzory

$$(2.16) \quad s_{00} = \pm 1, \\ s_{01} = \mp 2\beta - (1 - 2\beta) \tilde{s}_0, \\ s_{0n} = (1 - 2\beta) (s_{0n-1} - \tilde{s}_{n-1}) + \tilde{s}_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Przedstawiona hipoteza jest oparta na liniowej schematyzacji wykresu rozciągania i stałości współczynników  $\lambda$  i  $\beta$  [11 i 15]. Dla pewnej klasy materiałów istnieje możliwość wystąpienia istotnych odchyłeń wyników obliczonych wzorami (2.11) – (2.13) i (2.16) od wartości rzeczywistych. Ma to bezpośredni wpływ na możliwość przystosowania się konstrukcji. Na ten problem zwrócono uwagę m.in. w pracach [6, 12 i 13]. Z. Mróz zaproponował odcinkowo-liniową schematyzację wykresu, lepiej opisującą rzeczywisty wykres rozciągania. W naszym przypadku jakościowej oceny wpływu efektu Bauschingera na przystosowanie wspomniany problem nie ma większego znaczenia.

Hipoteza, którą się będziemy posługiwali, jest natomiast bardzo wygodnym i prostym narzędziem do realizacji celu tej pracy; jednym zapisem obejmuje wszystkie najważniejsze hipotezy wzmocnienia plastycznego, mianowicie wzmocnienie kinematyczne, izotropowe i mieszane.

Przy przyjęciu liniowego wzmocnienia plastycznego uzasadnione jest ograniczenie wykresu na rys. 2, 3 i 4 (np:  $s \leq s_{\max}$  lub  $e \leq e_{\max}$ ), co bardziej szczegółowo omówimy w dalszych rozdziałach.

## 3. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI I POJĘCIA DLA ANALIZOWANEGO UKŁADU

Dla konsekwencji wprowadźmy jeszcze następujące wielkości:  $p = P/F\sigma_0$  oznacza obciążenie bezwymiarowe i odpowiednio  $r = R/F\sigma_0$  — reakcję bezwymiarową, gdzie  $P$  oznacza ogólnie siłę  $P_1$  lub  $P_2$ , a  $R$  reakcję  $R_1$  lub  $R_2$  (rys. 1).

Bez względu na przebieg uplastycznienia pręta w kolejnym półcyklu  $n$ , warunek równowagi i warunek przemieszczeniowy mają postać

$$(3.1) \quad p_{1n} + r_{1n} - p_{2n} - r_{2n} = 0$$

oraz

$$(3.2) \quad \sum_j e_n^j = 0, \quad j = \text{I, II, III}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Naprężenia w poszczególnych odcinkach pręta (I, II, III; rys. 1) wyrażają się wzorami

$$(3.3) \quad s_n^{\text{I}} = r_{1n}, \quad s_n^{\text{II}} = p_{1n} + r_{1n} = p_{2n} + r_{2n}, \quad s_n^{\text{III}} = r_{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

W trakcie kolejnego półcyklu w poszczególnych odcinkach pręta mogą wystąpić procesy plastyczne czynne lub nie. W rozpatrywanym przypadku decydujące będą tu stany odpowiadające ekstremalnym wartościom obciążeń, które konsekwentnie oznaczmy przez  $\tilde{p}_{1n}$  i  $\tilde{p}_{2n}$  (przy odstępstwach od zasady zeszywnienia ekstremalnym wartościom obciążeń mogłyby już odpowiadać procesy lokalnie bierne następujące po procesach czynnych, jednak takich przypadków nie rozważamy). Zajmiemy się więc przede wszystkim określeniem rozkładu naprężeń i odkształceń w poszczególnych odcinkach pręta przy obciążeniach  $\tilde{p}_{1n}$  i  $\tilde{p}_{2n}$ .

Jeżeli w trakcie obciążania do  $\tilde{p}_{1n}$  i  $\tilde{p}_{2n}$  w danym odcinku I, II lub III wystąpi proces czynny, to odpowiednie naprężenia i odkształcenia są związane ogólnym równaniem (2.11), które dla ekstremalnych wartości przedstawimy w postaci

$$(3.4) \quad \tilde{\epsilon}_n^j = \frac{\tilde{s}_n^j - a_n^j}{1 - \lambda}, \quad j = \text{I, II lub III}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

W odcinkach pręta, w których zachodzą zmiany czysto sprężyste, odpowiednim związkiem jest «przesunięte» prawo Hooke'a (2.12), które po przekształceniu dla ekstremalnych wartości naprężeń i odkształceń napiszemy w postaci

$$(3.5) \quad \tilde{\epsilon}_n^j = \tilde{s}_n^j + e_n^{0j}, \quad j = \text{I, II lub III}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

W równaniach (3.4) i (3.5) wielkości  $a_n^j$  i  $e_n^{0j}$  wyznaczamy tak jak odpowiednio w (2.11) i (2.12) dla danych odcinków pręta. Układ równań (3.1) – (3.3) (poprawnych dla wszystkich wartości obciążeń, a więc i dla  $\tilde{p}_{1n}$  i  $\tilde{p}_{2n}$ ) oraz odpowiednio (3.4) lub (3.5) pozwala każdorazowo określić naprężenia  $\tilde{s}_n^j$  i odkształcenia  $\tilde{\epsilon}_n^j$ .

Znając naprężenia ekstremalne  $\tilde{s}_n^j$ , ze związku (2.13) możemy określić bezwzględne wartości zmian odkształceń plastycznych  $\tilde{\epsilon}_n^{pj}$ , a z (2.16) kolejne granice plastyczności  $s_{0n+1}^j$  dla odpowiednich odcinków  $j = \text{I, II, III}$ .

Po odciążeniu, w trakcie którego zakładamy występowanie zmian czysto sprężystych, w pręcie ustala się nowy stan równowagi, mianowicie jednorodny stan naprężeń resztkowych:

$$(3.6) \quad s_n^{*j} = s_n^*, \quad j = \text{I, II, III}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

W trakcie takich zmian są spełnione między przyrostami naprężeń  $\Delta s^{ej}$ , przyrostami odkształceń  $\Delta e^{ej}$  i przyrostem obciążeń  $\Delta p_1$  i  $\Delta p_2$  związki:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \Delta s^{e\text{I}} &= \Delta e^{e\text{I}} = \frac{1}{3} (\Delta p_2 - 2\Delta p_1), \\ \Delta s^{e\text{II}} &= \Delta e^{e\text{II}} = \frac{1}{3} (\Delta p_1 + \Delta p_2), \\ \Delta s^{e\text{III}} &= \Delta e^{e\text{III}} = \frac{1}{3} (\Delta p_1 - 2\Delta p_2). \end{aligned}$$

Wobec tego naprężenia resztkowe po  $n$ -tym półcyklu można wyznaczyć ze wzoru

$$(3.8) \quad s_{n+1}^{*j} = \tilde{s}_n^j - \Delta \tilde{s}_n^{ej}, \quad j = \text{I, II, III}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Analogicznie znajdziemy odkształcenia resztkowe, które nie są jednak równe w poszczególnych odcinkach:

$$(3.9) \quad \tilde{e}_{n+1}^{*j} = \tilde{e}_n^j - \Delta \tilde{e}_n^{ej}, \quad j = \text{I, II, III}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

We wzorach (3.8) i (3.9) różnice  $\Delta \tilde{s}_n^{ej}$  i  $\Delta \tilde{e}_n^{ej}$  są określone związkami (3.7) po podstawieniu  $\Delta p_1 = \tilde{p}_{1n}$  i  $\Delta p_2 = \tilde{p}_{2n}$ .

Po każdym półcyklu, znając  $\tilde{s}_n^j$ ,  $s_{n+1}^*$  i  $s_{0n+1}$ , napiszemy równania kolejnej, zmodyfikowanej powierzchni sprężystej w płaszczyźnie obciążeń  $p_1, p_2$ ; równania te podamy w postaci ogólnej, opisującej możliwość uplastycznienia każdego z przedziałów zarówno przez rozciąganie, jak i ściskanie:

$$(3.10) \quad \Delta s^{ej} + s_{n+1}^* = \begin{cases} \tilde{s}_n^j, \\ s_{0n+1}^j, \end{cases} \quad j = \text{I, II, III}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie  $\Delta s^{ej}$  są określone wzorami (3.7) przy podstawieniu  $\Delta p_1 = p_1$  i  $\Delta p_2 = p_2$ .

Powierzchnie te rozgraniczają procesy czynne od biernych po  $n$ -tym półcyklu obciążenia (powierzchnie czynno-bierne [16]), określając tym samym pewną rodzinę obszarów przystosowania. W rozpatrywanym tu przypadku dwóch niezależnych parametrów obciążenia przestrzeń obciążeń zredukuje się do płaszczyzny, a powierzchnie czynno-bierne — do krzywych. Rodzina obszarów przystosowania zależy w zasadniczy sposób od sprecyzowania cyklu obciążenia, który w dalszym ciągu będziemy nazywali «cyklem sterującym». Cykl sterujący wyznacza każdorazowo rozkład naprężeń resztkowych i kolejne granice plastyczności po stronie



rozciągania i ściskania, modyfikując w ten sposób początkową krzywą czynno-bierną (w naszym przypadku krzywą nośności sprężystej) pokazaną na rys. 5.

Rodziny obszarów przystosowania są przy tym wyznaczone przez cykl sterujący niezależnie od tego, czy przy wielokrotnym powtarzaniu tego cyklu nastąpi przystosowanie, czy też nie nastąpi. Jeżeli po  $n$ -tym półcyklu nastąpi przystosowanie, to dalsza zmiana obciążeń zgodnie z przyjętym prawem nie powoduje już tworzenia nowych obszarów przystosowania w płaszczyźnie obciążeń.

Rodziny obszarów przystosowania zależą również od rodzaju wzmocnienia plastycznego materiału pręta, opisanego współczynnikami  $\beta$  i  $\lambda$ . Zbadanie zależności tych obszarów od  $\beta$  i  $\lambda$  jest właśnie przedmiotem pracy.

Rozważania ograniczymy przy tym do dwóch typowych cykli sterujących, które teraz sprecyzujemy.

W półcyklu wyjściowym i parzystych ( $n=0, 2, 4, \dots$ ) zawsze będzie działać obciążenie

$$(3.11) \quad \begin{aligned} p_{1n} &= \alpha p, \\ p_{2n} &= 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad n=0, 2, 4, \dots, \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha$  jest rosnącą do wartości  $\alpha_1$ , a następnie malejącą do zera funkcją czasu (rys. 5, punkt A).

Jeśli w półcyklach nieparzystych obciążenie zmieniać się będzie według prawa

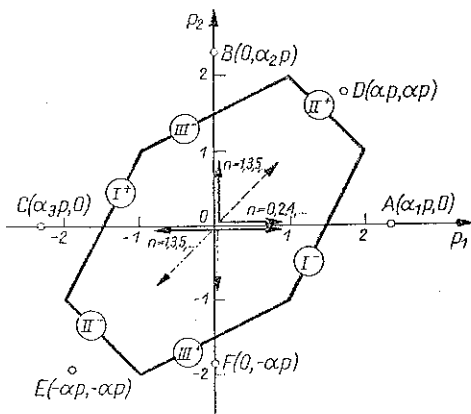
$$(3.12) \quad \begin{aligned} p_{1n} &= 0, \\ p_{2n} &= \alpha p, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad n=1, 3, 5, \dots, \end{aligned}$$

gdzie odpowiednio  $\alpha$  jest rosnącą do wartości  $\alpha_2$ , a następnie malejącą do zera funkcją czasu (rys. 5, punkt B), to takie obciążenie pręta nazwiemy łamanym cyklem sterującym (OAOB). Natomiast jeżeli w półcyklach nieparzystych

$$(3.13) \quad \begin{aligned} p_{1n} &= -\alpha p, \\ p_{2n} &= 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_3, \quad n=1, 3, 5, \dots, \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha$  jest podobnie zmieniającą się funkcją czasu (rys. 5, punkt C), to na takie obciążenie przyjmujemy nazwę przeciwwrotnego cyklu sterującego (OAOOC). Na rys. 5 zaznaczono kilka innych typów cykli sterujących (OAOOC, OAOE, OAOE, ...).

Dla ułatwienia obliczeń przyjmujemy, że  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ . Przy takich założeniach, obciążenie pręta w kolejnych półcyklach wyznaczone jest rodzajem cyklu sterującego i wartością siły  $p$ .



Rys. 5. Krzywa nośności sprężystej pręta i schemat wybranych typów cykli sterujących I<sup>+</sup>, I<sup>-</sup>, II<sup>+</sup>, ... oznacza odcinek krzywej, na której wystąpi uplastycznienie danego przedziału pręta odpowiednio przez rozciąganie (+) i ściskanie (-)

4. RODZINY OBSZARÓW (W PŁASZCZYŹNIE OBCIĄŻEŃ) PRZYSTOSOWANIA SIĘ PRĘTA PRZY ŁAMANYM CYKLU STERUJĄCYM

Weźmy pod uwagę wyjściowy półcykl obciążenia o takiej wartości  $p$ , aby uplastycznieniu uległ jedynie odcinek I pręta. Obrazuje to schemat odkształcenia na rys. 6. Z warunku

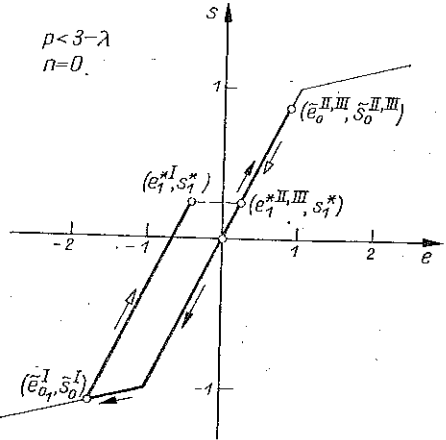
$$(4.1) \quad \bar{s}_0^{II,III} = 1$$

wyliczymy graniczną wartość  $p$ , po przekroczeniu której we wszystkich przedziałach pręta w półcyklu wyjściowym wystąpi proces plastycznie czynny (rys. 7):

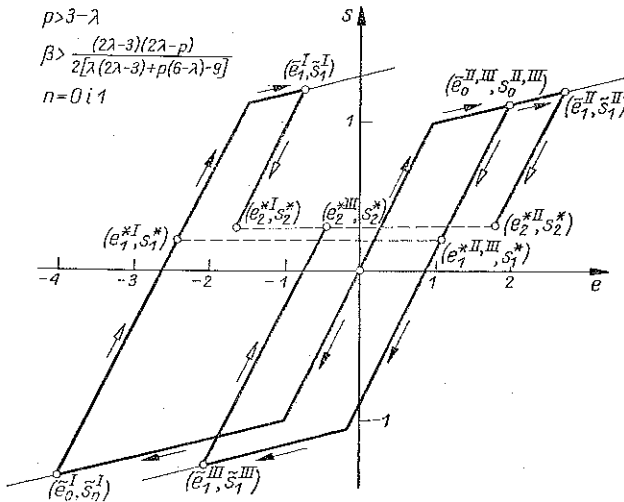
$$(4.2) \quad p_{gr} = 3 - \lambda.$$

Zatem dla  $n=0$  możliwe są dwa różne schematy odkształcenia (z punktu widzenia uplastycznień poszczególnych przedziałów pręta) zależnie od wartości  $p$  w stosunku do  $p_{gr}$ . W obu przypadkach ( $p \leq p_{gr}$  lub  $p \geq p_{gr}$ ) rozwiązując układ równań (3.1) – (3.3) oraz (3.4)  $j=I$  i (3.5)  $j=II, III$  lub (3.1) – (3.4)  $j=I, II, III$  znajdziemy  $\bar{s}_0^j$  i  $\bar{e}_0^j$ , a z (3.8) i (3.9)  $s_1^*$  i  $e_1^*$  jako funkcję  $p$  i  $\lambda$ .

W następnym etapie ( $n=1$ ) łamanego cyklu sterującego, zależnie od wartości parametrów  $p, \lambda$  i  $\beta$ , możliwe jest utworzenie się kilku różnych schematów odkształ-



Rys. 6. Schemat odkształcenia pręta w półcyklu wyjściowym dla  $p < p_{gr}$



Rys. 7. Schemat odkształcenia pręta przy łamanym cyklu sterującym ( $n=0$  i  $1$ ) dla  $p > p_{gr}$  (nierówność na  $\beta$  jest warunkiem uplastycznienia się odcinka I w półcyklu  $n=1$ )

czenia, z których jeden pokazano na rys. 7. Podobnie jak poprzednio, rozwiążemy wszystkie z możliwych schematów, znajdując naprężenia i odkształcenia, ale już jako funkcje trzech parametrów  $p$ ,  $\lambda$  i  $\beta$ . Dla przykładu w tablicy 1 zestawiono wzory na odpowiednie naprężenia i odkształcenia, opisujące schemat z rys. 7. W ten sposób metodą «krok po kroku» można rozwiązywać każdy przypadek pracy pręta (rys. 1), scharakteryzowany ogólnie parametrami  $p$ ,  $\lambda$  i  $\beta$  dla kolejnych półcykli  $n$ . Znajdziemy  $\tilde{s}_n^j$ ,  $s_{n+1}^*$  i  $s_{0n+1}^j$ , a następnie równania typu (3.10) odpowiedniej rodziny obszarów przystosowania.

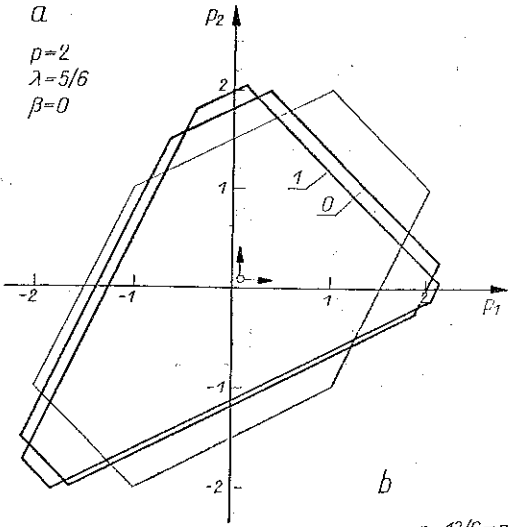
Tablica 1

$n$	$p_1$	$p_2$	$s_n^j$	$e_n^j$
0	$p$	0	$\tilde{s}_0^I = \frac{\lambda - 2p}{3}$ $\tilde{s}_0^{II} = \tilde{s}_0^{III} = \frac{\lambda + p}{3}$	$\tilde{e}_0^I = \frac{2(2\lambda - p)}{3(1 - \lambda)}$ $\tilde{e}_0^{II} = \tilde{e}_0^{III} = \frac{p - 2\lambda}{3(1 - \lambda)}$
	0	0	$s_1^* = \frac{\lambda}{3}$	$e_1^{*I} = \frac{2\lambda(2 - p)}{3(1 - \lambda)}$ $e_1^{*II} = e_1^{*III} = \frac{\lambda(p - 2)}{3(1 - \lambda)}$
I	0	$p$	$\tilde{s}_1^I = \tilde{s}_1^{II} =$ $= \frac{2\lambda(p - 2\lambda)(1 - \beta) + 3(\lambda + p)}{9}$ $\tilde{s}_1^{III} = \frac{2\lambda(p - 2\lambda)(1 - \beta) + 3(\lambda - 2p)}{9}$	$\tilde{e}_1^I = \frac{2\lambda[(\lambda - 5p)(1 - \beta) + 3(2 - 3\beta)] + 3p}{9(1 - \lambda)}$ $\tilde{e}_1^{II} = \frac{(p - 2\lambda)[2\lambda(1 - \beta) + 3]}{9(1 - \lambda)}$ $\tilde{e}_1^{III} = \frac{2\lambda[(\lambda + 4p)(1 - \beta) - 3(1 - 3\beta)] - 6p}{9(1 - \lambda)}$
	0	0	$s_2^* = \frac{\lambda[2(p - 2\lambda)(1 - \beta) + 3]}{9}$	$e_2^{*I} = \frac{\lambda[2\lambda(1 - \beta) - p(7 - 10\beta) + 6(2 - 3\beta)]}{9(1 - \lambda)}$ $e_2^{*II} = \frac{\lambda[-4\lambda(1 - \beta) + p(5 - 2\beta) - 6]}{9(1 - \lambda)}$ $e_2^{*III} = \frac{2\lambda[\lambda(1 - \beta) + p(1 - 4\beta) - 3(1 - 3\beta)]}{9(1 - \lambda)}$

Na rys. 8. przedstawiono kilka charakterystycznych przykładów rodzin obszarów przystosowania, odpowiadających różnym wartościom  $p$ ,  $\lambda$  i  $\beta$  łamanego cyklu sterującego. Na każdym rysunku linią cienką zaznaczono krzywą nośności sprężystej, a grubą ponumerowane kolejne obszary przystosowania, które ulegają zmianie co do wielkości, położenia i kształtu. Trudno jednak podać ogólną regułę tych zmian. Dla  $p < p_{gr}$  obszary przystosowania są nadal sześciokątami (zmienionymi; rys. 8a), natomiast dla  $p \geq p_{gr}$  stają się pięciokątami lub nawet trójkątami dla  $\beta = 1$  (rys. 8b).

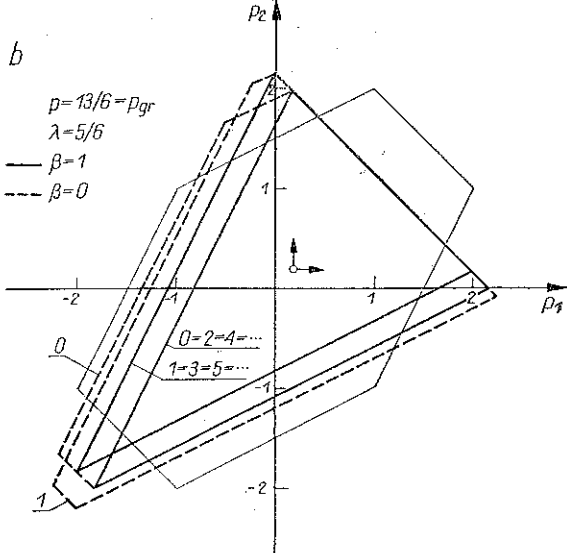
a

$p=2$   
 $\lambda=5/6$   
 $\beta=0$



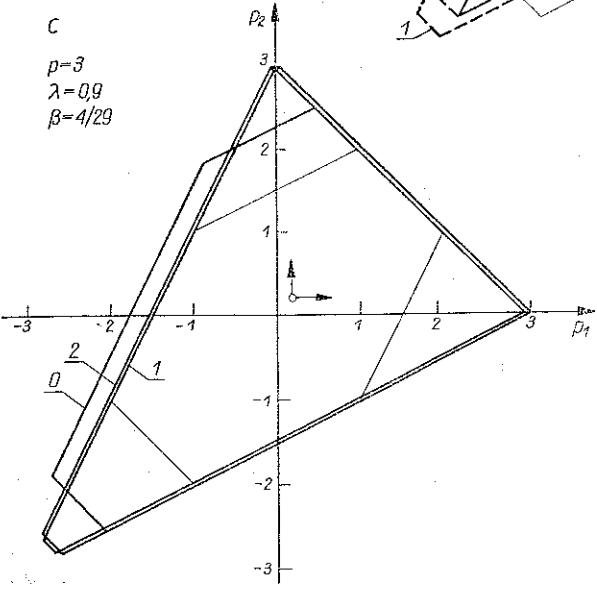
b

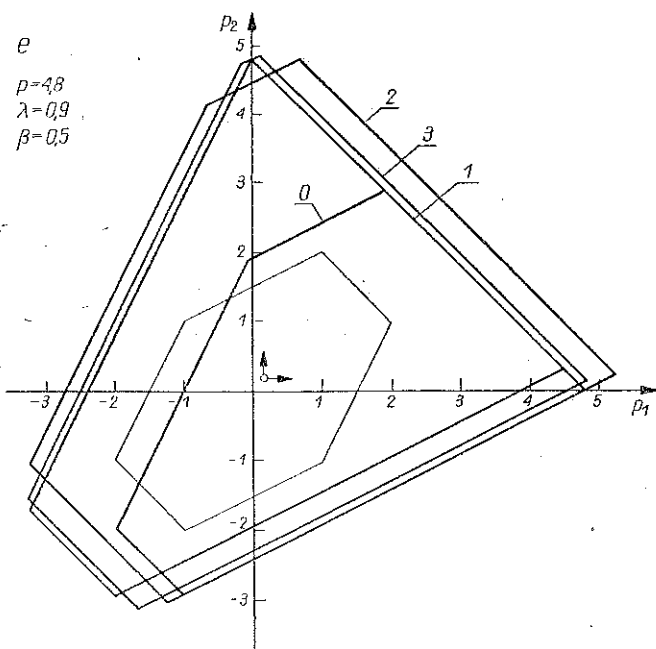
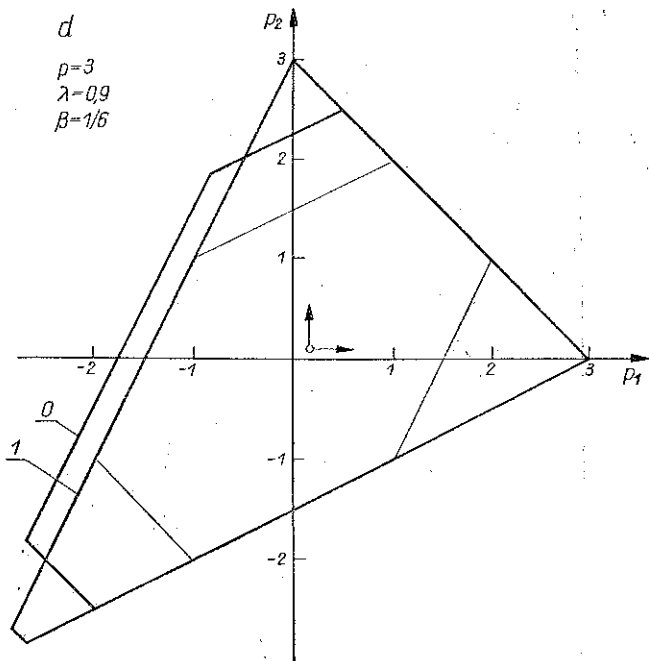
$p=13/6 = p_{gr}$   
 $\lambda=5/6$   
 —  $\beta=1$   
 - - -  $\beta=0$



c

$p=3$   
 $\lambda=0.9$   
 $\beta=4/29$





Rys. 8. Rodziny obszarów przystosowania się pręta dla różnych wartości parametrów  $p$ ,  $\lambda$  i  $\beta$  łamanego cyklu sterującego;  $n$  oznacza numer kolejnego obszaru po  $n$ -tym półcyklu obciążenia.

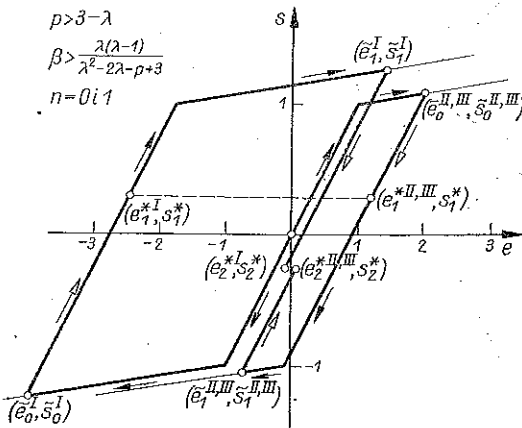
Wielkość kolejnego obszaru wyraźnie zależy od wartości współczynnika efektu Bauschingera (rys. 8b,  $\beta=1$  i  $\beta=0$ ). W przypadkach pokazanych na rys. 8a i 8b ( $\beta=0$ ) i 8d już po  $n=1$  nastąpi przystosowanie się pręta do przyjętego cyklu sterującego. Krzywe z numerem  $\odot$  wyznaczają ostatnie z odpowiednich rodzin obszary przystosowania, które w dalszym ciągu nie ulegną już zmianie.

Parametry charakteryzujące przypadki na rys. 8c i 8d różnią się jedynie wartością współczynnika  $\beta$ . W pierwszym wartość współczynnika  $\beta=4/29$  jest mniejsza, a więc w zasadzie korzystniejsza z punktu widzenia możliwości przystosowania, a jednak po pełnym cyklu  $n=1$  pręt się nie przystosuje. Nastąpi to dopiero w następnym półcyklu. Interpretację tego faktu przedstawimy w dalszej części pracy.

Najciekawsze, graniczne pod względem przystosowania przykłady pokazano na rys. 8b ( $\beta=1$ ) i 8e. W pierwszym z nich występuje stałe, przeciwwrotne uplastycznienie odcinków I i III, czego wynikiem jest stała, przeciwwrotna translacja krzywej czynno-biernej (trójkąta). Wiąże się z tym stałe rozpraszanie energii i nieprzystosowanie. W drugim — odpowiednie obszary oprócz translacji każdorazowo ulegają zwiększeniu (w kierunkach  $p_1$  i  $p_2$  w postępie geometrycznym). W granicy  $n \rightarrow \infty$  prowadzi to do przystosowania.

## 5. RODZINY OBSZARÓW (W PŁASZCZYŹNIE OBCIĄŻEŃ) PRZYSTOSOWANIA SIĘ PRĘTA PRZY PRZECIWWROTNYM CYKLU STERUJĄCYM

Przy przeciwwrotnym cyklu sterującym dla  $n=0$  możliwe są omówione poprzednio dwa schematy odkształcenia (rys. 6 i 7). W następnych półcyklach  $n=1, 2, 3, \dots$  odpowiednie schematy będą inne w zależności od wartości parametrów  $p, \lambda$  i  $\beta$ .

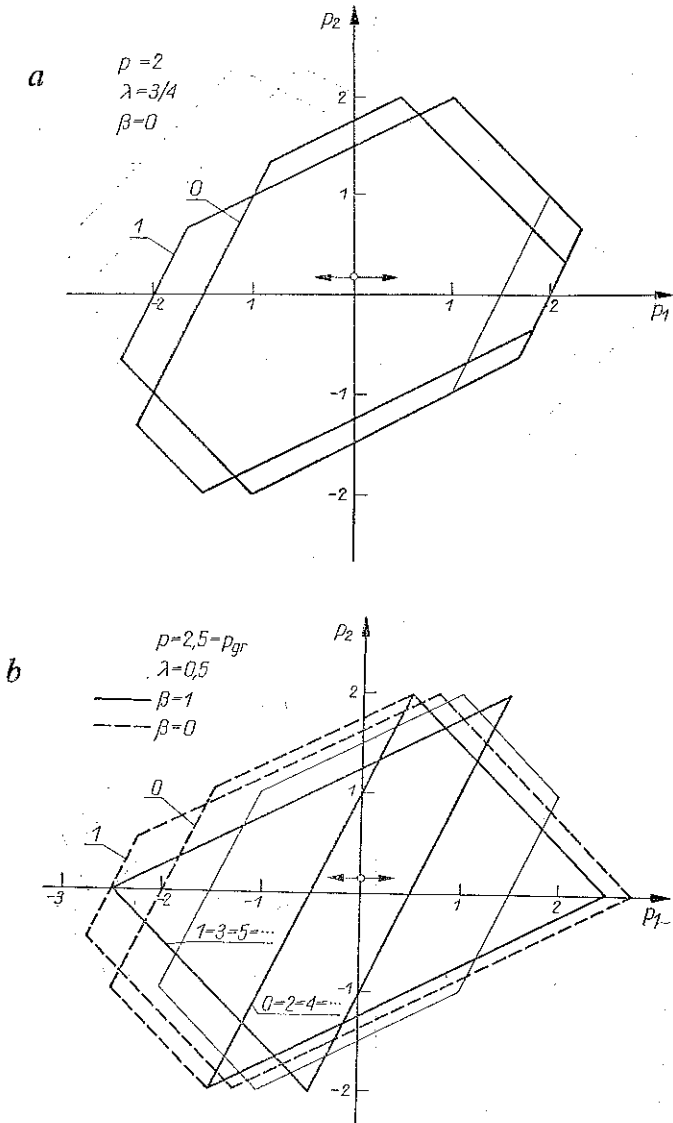


Rys. 9. Schemat odkształcenia pręta przy przeciwwrotnym cyklu sterującym ( $n=0$  i  $1$ ) dla  $p > p_{gr}$  (nierówność na  $\beta$  jest warunkiem uplastycznienia się odcinków II i III w półcyklu  $n=1$ )

Szerzej omówimy tylko przypadki graniczne pod względem przystosowania, mianowicie rys. 10b ( $\beta=1$ ) i 10d.

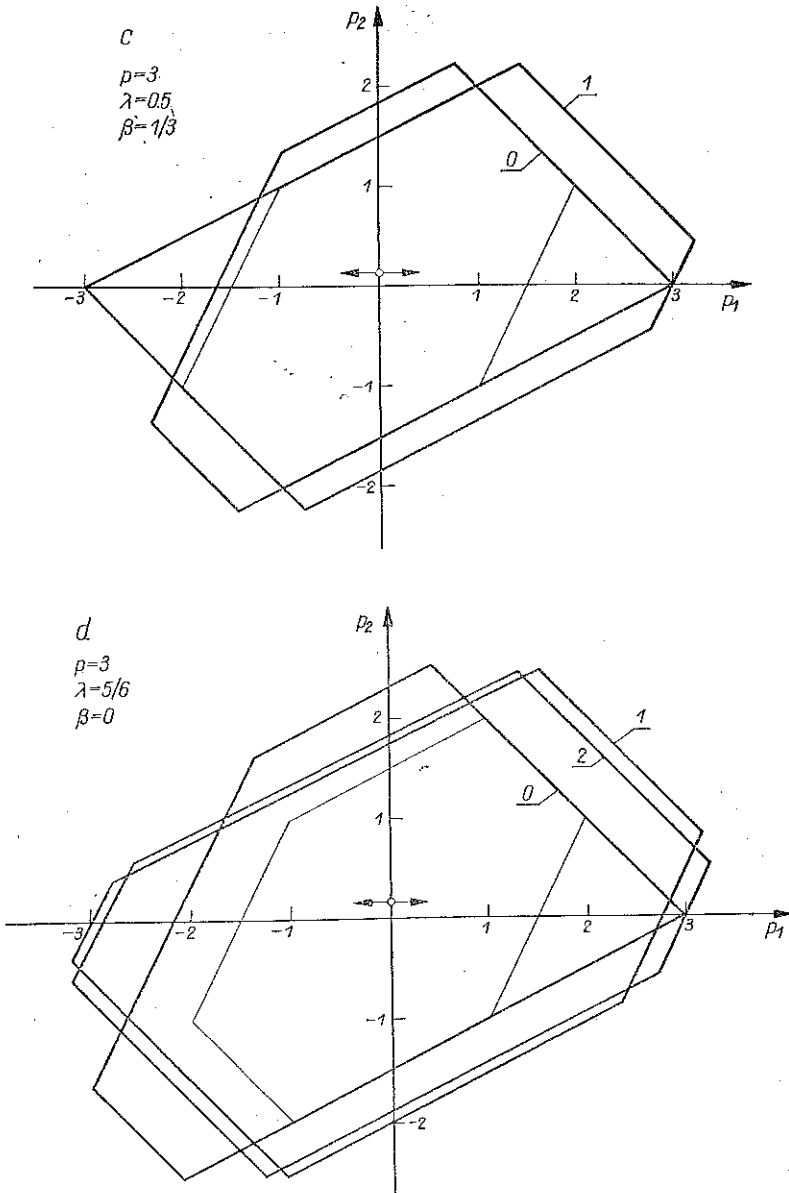
Na rys. 9 przykładowo przedstawiono schemat odkształcenia, w którym występuje uplastycznienie przeciwwrotne wszystkich odcinków pręta ( $p > p_{gr}$ ) dla  $n=0$  i  $n=1$ .

Postępując podobnie jak w rozdziale poprzednim można wyznaczyć  $\bar{s}_n^j, \bar{s}_{n+1}^*$  i  $\bar{s}_{0n+1}^j$  jako funkcje parametrów  $p, \lambda$  i  $\beta$  dla kolejnych półcykli  $n$ , a następnie określić równania rodziny obszarów przystosowania typu (3.10). Również i tym razem pokazane na rys. 10 przykłady wybrano tak, aby zaobserwować wpływ współczynników  $\beta$  i  $\lambda$  na kształt i wielkość kolejnych obszarów przystosowania.



Rys. 10. Rodziny obszarów przystosowania się pręta dla różnych wartości parametrów  $p$ ,  $\lambda$  i  $\beta$ , przeciwwrotnego cyklu sterującego

Pierwszy jest przykładem nieprzystosowania do danego cyklu sterującego (stałe, przeciwwrotne uplastycznienie odcinka I). Kolejne obszary przystosowania są tu trójkątami wzajemnie przesuniętymi i obróconymi. Z obrotem obszaru, który jest efektem przejścia punktu (wierzchołka trójkąta dla  $n=0, 2, 4, \dots$ ) w odcinek (bok trójkąta dla  $n=1, 3, 5, \dots$ ) i odwrotnie, boku w wierzchołek, wiążą się tu poważne zmiany jakościowe, np. po  $n=0, 2, 4, \dots$  odcinek I pręta może ulec uplastycznieniu przez ściskanie jedynie przy równoczesnym uplastycznieniu przedziałów II i III przez rozciąganie (wierzchołek o współrzędnych  $(5/2, 0)$ ) natomiast po  $n=1, 3, 5, \dots$



Rys. 10. Rodziny obszarów przystosowania się pręta dla różnych wartości parametrów  $p$ ,  $\lambda$  i  $\beta$ , przeciwwrotnego cyklu sterującego

uplastycznieniu I przez ściskanie nie towarzyszy uplastycznienie II i III (odcinek prostej o równaniu  $2p_1 - p_2 = 1$ ).

Na rys. 10d natomiast pokazano przykład przeciwwrotnego przesuwania i równoczesnego powiększania się (w postępie geometrycznym w kierunku  $\pm p_1$ ) kolejnych obszarów przystosowania. Prowadzi to przy  $n \rightarrow \infty$  do przystosowania się pręta.



6. OBSZAR PRZYSTOSOWANIA SIĘ KONSTRUKCJI W PRZESTRZENI PARAMETRÓW  $p, \lambda$  I  $\beta$   
 PRZY ŁAMANYM CYKLU OBCIĄŻENIA

Z kolei zajmiemy się wyznaczeniem obszarów przystosowania się pręta w przestrzeni parametrów  $p, \lambda, \beta$  przy zawężaniu się do pewnych określonych typów cyklu obciążenia. Są to obszary o innym charakterze, a z punktu widzenia celu tej pracy korzystniejsze do dyskusji od poprzednio omawianych rodzin obszarów przystosowania w płaszczyźnie obciążeń. Przedstawiają one w sposób bezpośredni wpływ udziału efektu Bauschingera, a ponadto liniowego wzmocnienia na przystosowanie. Każdy punkt  $(p, \lambda, \beta)$  takiego obszaru odpowiada plastycznemu przystosowaniu się pręta przy określonym cyklu obciążenia do tegoż cyklu. W tym punkcie zajmiemy się cyklami łamanymi (3.11) i (3.12).

Metodą krok po kroku, jak w poprzednich rozdziałach, znajdziemy kolejne naprężenia ekstremalne  $\tilde{s}_n^j$ , naprężenia resztkowe  $s_{n+1}^*$  i granice plastyczności  $s_{0n+1}^j$  jako funkcje  $p, \lambda$  i  $\beta$  dla każdego z możliwych schematów odkształcenia.

Warunki przystosowania się pręta po  $n$ -tym półcyklu mają następującą postać:

$$(6.1) \quad |As_{n+1}^{ej} + s_{n+1}^*| \leq \begin{cases} |\tilde{s}_n^j| \\ \text{lub } |s_{0n+1}^j|, \end{cases} \quad j = \text{I, II, III}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie  $As_{n+1}^{ej}$  oznacza zmiany naprężeń w  $(n+1)$ -szym półcyklu przy założeniu wystąpienia tylko procesów biernych (zmian sprężystych), wyznaczone wzorami (3.7) po podstawieniu  $\Delta p_1 = \tilde{p}_{1n}$  i  $\Delta p_2 = \tilde{p}_{2n}$  określonych prawem (3.11) i (3.12) lub (3.13), dla danego półcyklu.

Jeden z ogólnie napisanych warunków (6.1) (wystarczających ale nie koniecznych) po rozwikłaniu opisze obszar plastycznego przystosowania się pręta, po  $n$ -tym półcyklu obciążenia w przestrzeni parametrów  $p = f(\lambda, \beta)$ . Dla cyklu łamanego obszar taki przedstawia rys. 11. Najpierw wyznaczono obszar przystosowania po jednym pełnym cyklu,  $n=1$  (na rys. 11 zaznaczony liniami przerywanymi), a następnie dla  $n \rightarrow \infty$  (linie ciągłe, grube). Objaśnienia tego wykresu dokonamy na jego przekroju płaszczyzną o równaniu  $\lambda = 0,9$ , odrzucając sprężystą część obszaru (rys. 12).

Wewnątrz części  $a$  obszaru (dla  $p > p_{gr}$ ) na rys. 12 przystosowanie w sensie warunków (6.1) wystąpi po skończonej liczbie półcykli. Na jej granicy ( $\beta = 0,5$ ) dla  $n \rightarrow \infty$  bezwzględne wartości zmian odkształceń plastycznych (odcinka III)  $\tilde{\epsilon}_n^p$  tworzą ciąg geometryczny o ilorazie

$$(6.2) \quad q = \frac{\lambda}{3-2\lambda} < 1 \quad \text{dla} \quad 0 < \lambda < 1.$$

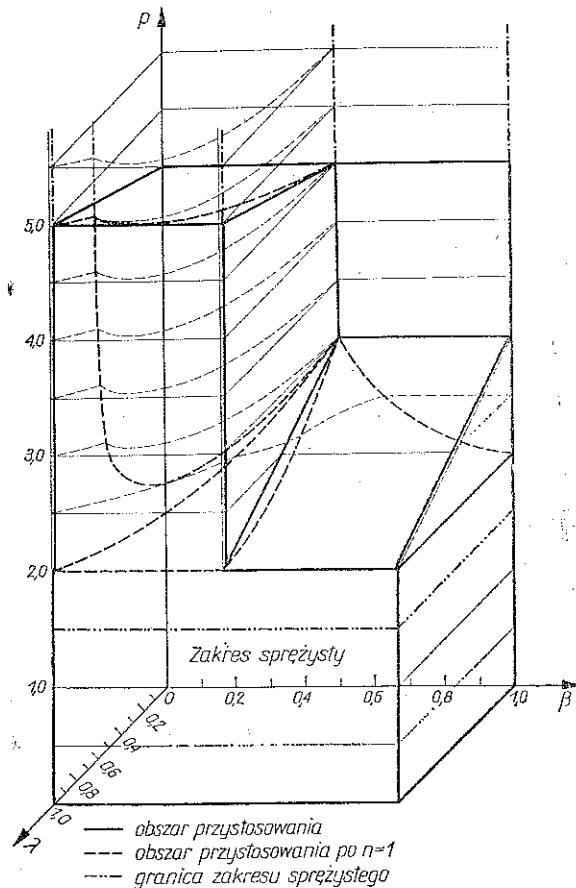
Wykluczaliśmy tu  $\lambda = 1$  (materiał idealnie sprężysto-plastyczny), ponieważ przy obciążeniu siłą  $p > p_{gr} = 2$  wcześniej wystąpi zniszczenie pręta, oraz  $\lambda = 0$  (idealna sprężystość), gdyż odkształcenia trwale są wtedy równe zero.

Wobec (6.2) utworzony szereg  $\tilde{\epsilon}_n^p$  jest zbieżny i ograniczony:

$$(6.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\epsilon}_n^p = \tilde{\epsilon} < \infty.$$

Dla rozważanego modelu materiału bezwymiarowa praca rozpraszana w kolejnym półcyklu jest określona wzorem [3]

$$(6.4) \quad W_n^d = e_n^p \left[ 1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} (1-\beta) \left( \sum_{i=0}^{n-1} e_i^p + \frac{1}{2} e_n^p \right) \right], \quad n=1, 2, 3, \dots$$



Rys. 11. Obszar plastycznego przystosowania się pręta w przestrzeni parametrów  $p=f(\lambda, \beta)$  przy cyklu łamanym (wygięcia linii oznaczają wykluczenie odpowiednich krawędzi i płaszczyzn z obszaru)

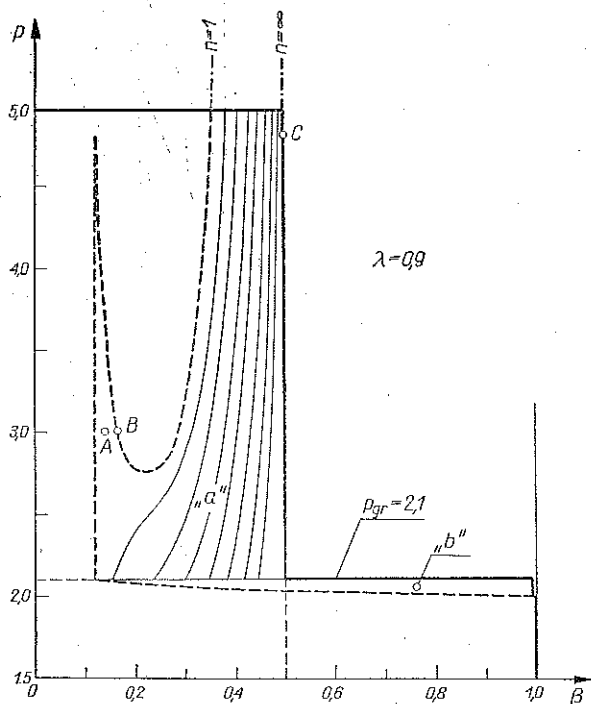
Można zatem stwierdzić, wobec (6.3), że praca dysypowana w całym procesie ma wartość skończoną:

$$(6.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} W_n^d = W < \infty,$$

a w dyskutowanych przypadkach ( $p > p_{gr}$ ,  $\beta = 0,5$ ) wystąpi przystosowanie po  $n = \infty$  półcykli (por. punkt C z rys. 8e).

W całej części  $b$  obszaru ( $p \leq p_{gr}$ ) na rys. 12 nastąpi przystosowanie pręta w sensie (6.3) i (6.5) po  $n=\infty$  półcyklach. Granicą, nie wchodzącą do obszaru, jest tu prosta (płaszczyzna) o równaniu  $\beta=1$ ; iloraz odpowiedniego szeregu (6.3) jest wówczas równy  $q=1$  (por. rys. 8b,  $\beta=1$ ).

Wyjaśnienia wymaga pewna osobliwość obszaru odpowiadającego przystosowaniu już po  $n=1$  półcyklu obciążenia przy  $p > p_{gr}$ . Jest ona wyraźnie widoczna na rys. 12 (linia przerywana). Mianowicie, punkt  $A$  ( $3, 9/10, 4/29$ ) mimo że reprezentuje przypadek (z uwagi na możliwość przystosowania) korzystniejszy (mniejsza wartość



Rys. 12. Przekrój obszaru przystosowania płaszczyzną  $\lambda=0,9$  (punkty  $A, B$  i  $C$  odpowiadają kolejno rys. 8c, 8d i 8e)

współczynnika  $\beta=4/29$ ) niż punkt  $B$  ( $3, 9/10, 1/6$ ), to jednak do omawianego obszaru nie wchodzi. Nieciągłość obszaru w kierunku rosnących wartości  $\beta$  (przy ustalonych  $p$  i  $\lambda$ ) jest wynikiem przyjętej schematyzacji wykresu rozciągania i związanej z tym zmiany schematu odkształcenia.

Mianowicie, podczas półcyklu  $n=1$  w przypadku  $B$  uplastycznieniu ulegną wszystkie odcinki pręta i suma  $\sum_j \varepsilon_1^{n,j}$  będzie większa niż w przypadku  $A$ , gdzie odcienki I pozostanie w zakresie sprężystym. Ponieważ wzrost odkształceń trwałych zmniejsza rolę efektu Bauschingera, mianowicie zwiększa bezwzględną wartość

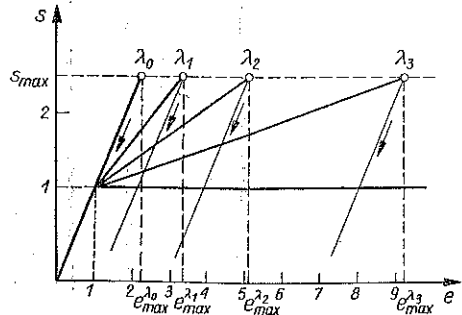
granicy plastyczności po przeciwnej stronie, przeto w przypadku  $B$  po  $n=1$  nastąpi już przystosowanie, a w przypadku  $A$  — jeszcze nie. Przystosowanie to nastąpi dopiero po  $n=2$  (por. rys. 8c i 8d).

Obszar na rys. 11 teoretycznie jest nieograniczony od góry. Mogłoby zatem wystąpić przy większych wartościach  $p$  przekroczenie wytrzymałości rozdzielczej pręta. Zapobiegać temu będzie wprowadzone w rozważanym przypadku dogodne ograniczenie naprężeń typu  $\bar{s}_0^I \leq s_{\max}$  w sposób pokazany na rys. 13. Pociąga to za sobą ograniczenie wartości siły  $p \leq p_{\max}$ , gdzie

$$(6.6) \quad p_{\max} = \frac{3s_{\max} + \lambda}{2}$$

oraz największego, jednorazowego odkształcenia  $\bar{\epsilon}_0^I \leq e_{\max}$  (tablica 1)

$$(6.7) \quad e_{\max} = \frac{s_{\max} - \lambda}{1 - \lambda}$$



Rys. 13. Schemat wprowadzonego ograniczenia naprężeń typu  $s \leq s_{\max}$

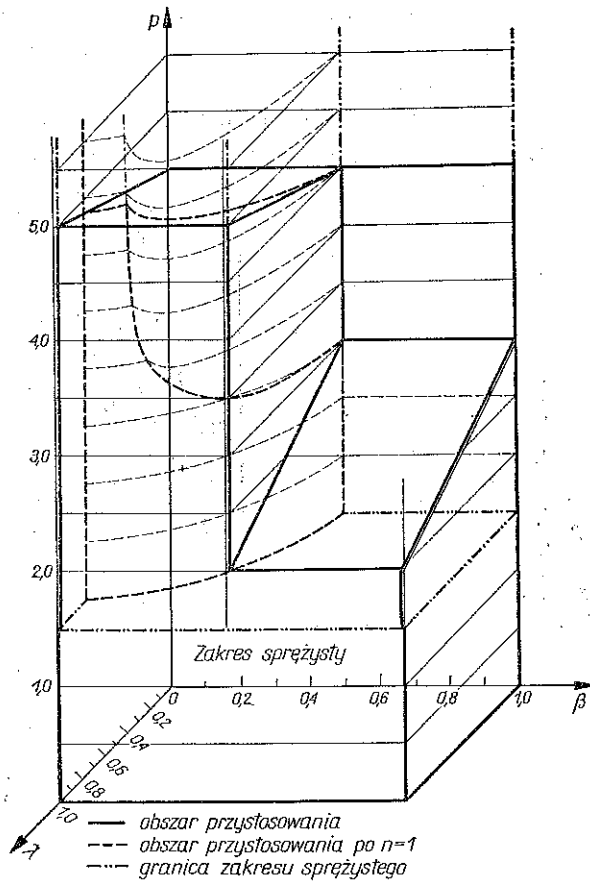
Jeżeli przyjmiemy  $s_{\max} = 3$  (tak dużą wartość przyjęto jedynie ze względów poglądowych), to z zależności (6.6) otrzymamy równanie powierzchni ograniczającej od góry obszar przystosowania na rys. 11; wzór (6.7) określi wówczas wartość odkształceń  $\bar{\epsilon}_0^I$  na tej powierzchni.

## 7. OBSZAR PRZYSTOSOWANIA SIĘ KONSTRUKCJI W PRZESTRZENI $p, \lambda, \beta$ PRZY PRZECIWWZROTNYM CYKLU OBCIĄŻENIA

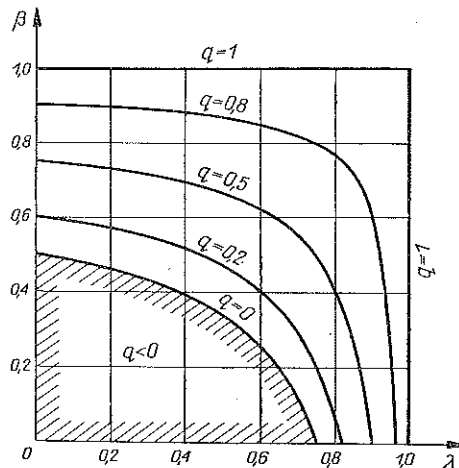
Podobnie jak w poprzednim punkcie wyznaczono obszar przystosowania się pręta  $p = f(\lambda, \beta)$  (rys. 14) przy cyklu przeciwwrotnym, przy którym również powinny być spełnione warunki (6.1). I w tym przypadku część obszaru przystosowania pomiędzy liniami przerywanymi (po  $n=1$ ), a ciągłymi (po  $n=\infty$ ) można podzielić na  $a$  (dla  $p > p_{gr}$ ) i  $b$  (dla  $p \leq p_{gr}$ ) (rys. 12). Obydwie części obszaru  $a$  i  $b$  mają odpowiednio taki sam charakter jak dla cyklu łamanego. Przytoczymy tu jedynie wzór na iloraz odpowiedniego szeregu bezwzględnych wartości zmian odkształceń plastycznych (przedziału I) w części obszaru  $b$ , w którym wystąpi przystosowanie w sensie kryterium (6.3) i (6.5):

$$(7.1) \quad q = \frac{4\lambda - 6\lambda\beta + 6\beta - 3}{3 - 2\lambda}$$

Ze wzoru (7.1) i jego wykresu na rys. 15 wynika, że tylko dla  $\beta=1$  lub dla  $\lambda=1$  iloraz  $q=1$ . Powoduje to wówczas niespełnienie kryterium (6.3) i (6.5) (rys. 10b,  $\beta=1$ ); płaszczyzna o równaniu  $\beta=1$  nie wchodzi do obszaru przystosowania. Obszar na rys. 14 ograniczono od góry w ten sam sposób jak w poprzednim punkcie.



Rys. 14. Obszar plastycznego przystosowania się pręta w przestrzeni parametrów  $p=f(\lambda, \beta)$  przy cyklu przeciwwrotnym



Rys. 15. Wykres zależności ilorazu  $q$  (7.1) od współczynników  $\lambda$  i  $\beta$

## 8. UWAGI KOŃCOWE

Prowadzono również badania obszarów plastycznego przystosowania się konstrukcji przy innych cyklach obciążenia. Ponieważ jednak wyniki co do wniosków ogólnych są podobne, więc rezygnujemy z ich przedstawienia. Mimo ograniczenia badań przystosowania się konstrukcji do badań pręta (rys. 1), przy kilku różnych typach cykli obciążenia wnioski dotyczące wpływu efektu Bauschingera na możliwość przystosowania wydają się mieć charakter ogólniejszy. Zmniejszenie udziału efektu Bauschingera (mianowicie zmniejszenie parametru  $\beta$ ) powoduje wzrost obszarów plastycznego przystosowania się konstrukcji; podobna uwaga odnosi się do zmniejszenia parametru  $\lambda$ , czyli wzrostu modułu wzmocnienia plastycznego.

W ilościowej ocenie wyników badań musimy mieć na uwadze przyjętą hipotezę ustalonego udziału efektu Bauschingera. Nieciągłość obszarów przystosowania przy wartości współczynnika  $\beta=0,5$  jest niewątpliwie związana z tą hipotezą. Przedstawione wyniki badań mogą być również pomocne przy doborze rodzaju materiału na konstrukcje projektowane optymalnie z uwagi na przystosowanie.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. CERADINI, *Sull' adattamento dei corpi elasto-plastici soggetti ad azioni dinamiche*, Giornale del Genio Civile, 4/5, 239-250, 1969.
2. A. A. ILIUSZIN, *Plastičnost'*, cz. I, GTTI, Moskwa 1948.
3. K. KOWALCZYK, *Liniowa schematyzacja wykresu naprężenie-odkształcenie przy obciążeniach cyklicznych i dowolnym, ustalonym udziale efektu Bauschingera*, Czasopismo Techniczne, 8-M, 1973.
4. J. A. KÖNIG, *Shakedown of strainhardening structures*, I Canadian Congr. Appl. Mech., Quebec 1967.
5. J. A. KÖNIG, *O przystosowaniu się konstrukcji z materiału przejawiającego wzmocnienie*, Prace IPPT PAN, 18/1971.
6. J. A. KÖNIG, *Teoria przystosowania się konstrukcji. Analiza plastyczna konstrukcji*, Wyd. PAN Warszawa, 185 - 290, 1972.
7. G. MAIER, *A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes*, Meccanica 1, 5, 54 - 66, 1970.
8. G. MAIER, *A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects*, Technical Report I.S.T.C., No 539, 1971.
9. G. MAIER, *On quasi-static and dynamic shakedown of workhardening plastic structures with unstable parts*, Technical Report I.S.T.C., No 523, 1971.
10. E. MELAN, *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*, Ing. Archiv, 9, 116 - 126, 1938.
11. W. W. MOSKWIȚIN, *Plastičnost' pri pierieniennych nagruženijach*, Izd. Mosk. Uniw., 1965.
12. Z. MRÓZ, *At attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using a more general workhardening model*, Acta Mechanica, 7, 2 - 3, 199 - 212, 1969.
13. Z. MRÓZ, Cz. GOSS, *O złożonych modelach wzmocnienia plastycznego*, Mech. Teor. i Stos., 10, 2, 259 - 279, 1972.
14. B. G. NEAL, *Plastic collapse and shakedown theorems for structures of strainhardening material*, J. Aero. Sci., 17, 297 - 305, 1950.
15. G. B. TALYPOW, *Plastičnost' i pročnost' stali pri složnom nagruženii*, Izd. Len. Uniw., 1968.
16. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1973.

## Резюме

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТА БАУШИНГЕРА НА ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПРИСПОСОБЛЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ НА ПРИМЕРЕ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Принятая гипотеза пластического упрочнения материала имеет влияние на возможность приспособления конструкции. В представленной работе исследование этой проблемы сведено к анализу влияния участия эффекта Баушингера на приспособление. Рассуждения проведены на примере стержня нагруженного циклически, поосно (рис. 1), применяя общую гипотезу смешанного упрочнения с установившимся произвольным участием эффекта Баушингера (2.11) и (2.12).

Исследования проведены методом „шаг за шагом” для последовательных полупериодов нагрузки. Остаточное напряжение определено как напряжение отвечающие некоторым, избранным циклам нагрузки (управляющим циклам). Результаты иллюстрированы на плоскости нагрузок, а также в пространстве параметров  $p=f(\lambda, \beta)$ , где:  $p$  — безразмерная нагрузка,  $\lambda$  — безразмерный коэффициент упрочнения материала,  $\beta$  — коэффициент участия эффекта Баушингера.

Уменьшение участия эффекта Баушингера вызывает рост области пластического приспособления конструкции; аналогичное замечание относится к уменьшению параметра  $\lambda$ .

## SUMMARY

## INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF THE BAUSCHINGER EFFECT ON THE PLASTIC SHAKEDOWN, ON THE EXAMPLE OF A ROD STRUCTURE

The strain hardening hypothesis assumed exerts a certain influence on the shakedown of the structure. In the present paper the problem is reduced to an analysis of the influence of the Bauschinger effect on the shakedown process. The considerations concern an example of a rod subject to cyclic axial load (Fig. 1), a general hypothesis of combined strain hardening, with an arbitrary but fixed contribution of the Bauschinger effect, (2.11) and (2.12).

The analysis was performed by the “step by step” method for the consecutive semicycles of loading. The residual stress was determined as the stress corresponding to certain selected loading cycles (control cycles). The results were illustrated on the plane of stresses and in the space of parameters  $p=f(\lambda, \beta)$ , where  $p$  — dimensionless load,  $\lambda$  — dimensionless strain hardening parameter of the material,  $\beta$  — coefficient of contribution of the Bauschinger effect.

Decreasing the contribution of the Bauschinger effect increases the domain of plastic shakedown of the structure; a similar remark applies to the decrease of  $\lambda$ .

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 października 1973 r.*