

O ZAGADNIENIU ROZPRZESTRZENIANIA SIĘ FAL NAPRĘŻENIA W PLASTYCZNYM OŚRODKU ZAWIERAJĄCYM SZTYWNĄ PŁYTĘ NA GRANICY WARSTW

KRZYSZTOF PODOLAK (WARSZAWA)

1. WSTĘP

Nierzadko w praktyce zachodzi konieczność budowy obiektów na obszarze, który jest miejscem rozprzestrzeniania się zaburzeń powstałych w wyniku stosowania materiałów wybuchowych (przy eksploatacji złóż węgla, w budownictwie fortyfikacyjnym).

Znajomość oddziaływań, jakie w tym przypadku wywiera ośrodek na umieszczony w nim obiekt, jest sprawą zasadniczą dla projektantów tego typu obiektów. Właściwe informacje na ten temat moglibyśmy uzyskać rozwiązując skomplikowane zagadnienie dyfrakcji fal na ciele stanowiącym model obiektu i umiejscowionym w ośrodku, którego własności mechaniczne odzwierciedlają zasadnicze cechy ośrodka rzeczywistego. Musimy jednak zdawać sobie sprawę z faktu, że rozwiązanie takiego zagadnienia, mimo swej złożoności, będzie tylko w jakiś sposób przybliżony opisowało zachowanie się realnej konstrukcji z uwagi na konieczność idealizacji rzeczywistych warunków, dającej w efekcie możliwość uzyskania wspomnianego rozwiązania. Biorąc to pod uwagę, zdecydujemy się na wprowadzenie uproszczeń, które pozwolą uzyskać przybliżone informacje o zachowaniu się obiektu, jako rezultat rozważania prostszych, a przez to mniej pracochłonnych zagadnień.

Pewnych danych dotyczących interesującego nas tematu dostarczają publikacje poświęcone jednowymiarowym problemom rozprzestrzeniania się i odbicia fal sprężysto-plastycznych od różnego rodzaju przeszkód [1–3]. Dalszym ich uzupełnieniem są rozważania dotyczące propagacji fal w sprężysto-plastycznych ośrodkach warstwowych [4–6].

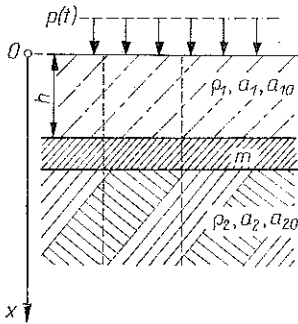
Jako następny krok w omawianym zagadnieniu można uznać rozważania, których przedmiotem jest badanie rozprzestrzeniania się fal w ośrodku składającym się z dwu warstw o różnych własnościach mechanicznych oraz sztywnej płyty reprezentującej obiekt i umieszczonej między tymi warstwami. Rozwiązanie takiego problemu przedstawili autorzy pracy [7] przyjmując, że warstwa zewnętrzna, której brzeg obciążono ciśnieniem powstałym w rezultacie wybuchu, wykazuje cechy materiału plastycznego ze sztywnym odciążeniem, natomiast półprzestrzeń oddzielona od niej płytą jest sprężysta.

Przedmiotem tej pracy jest zagadnienie analogiczne do [7] dla przypadku warstwy z materiału plastycznego o liniowym odciążeniu, która działa za pośrednictwem nieodkształcalnej płyty na półprzestrzeń o własnościach reprezentowanych przez model ciała plastycznego ze sztywnym bądź liniowym odciążeniem.

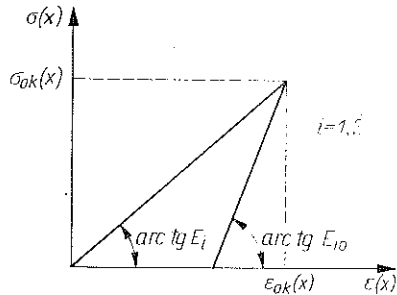
2. ANALITYCZNY OPIS ZAGADNIENIA

2.1

Rozważmy zagadnienie rozprzestrzeniania się płaskich fal naprężenia w ośrodku dwuwarstwowym, w którym warstwy są oddzielone od siebie sztywną płytą o masie m , przypadającej na jednostkę powierzchni płyty (rys. 1). Przyjmijmy, że własności mechaniczne warstwy mającej skończoną grubość h reprezentowane są przez ośrodek plastyczny o liniowej charakterystyce zarówno w zakresie plastycznego obciążenia jak i odciążenia (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

W zagadnieniach, które stanowią przedmiot tych rozważań, druga warstwa wykazująca również własności materiału plastycznego posiada znacznie większą grubość. Możemy ją zatem traktować w obliczeniach jako półprzestrzeń, bowiem efekty uzyskane w rezultacie uwzględnienia odbicia fal od jej drugiej granicy są w tej sytuacji mało istotne. Zbadamy dalej dwa przypadki w zależności od tego, czy materiał półprzestrzeni charakteryzuje się sztywnym, czy liniowym odciążeniem.

Ze względu na jednowymiarowość rozważanego zagadnienia (w celu umożliwienia jego matematycznego opisu) wprowadzimy jedną oś współrzędnych x , skierowaną w głąb półprzestrzeni o początku 0 na powierzchni warstwy (rys. 1).

Przyjmijmy, że na płaszczyźnie $x=0$ działa powstałe wskutek wybuchu ciśnienie, którego zmienność najczęściej jest opisywana za pomocą następującej funkcji czasu (por. np. [6 i 7]):

$$(2.1) \quad p(t) = \begin{cases} p_m \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, & \text{jeśli } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{jeśli } t > \tau, \end{cases}$$

gdzie n oznacza liczbę naturalną oraz τ okres czasu, po upływie którego ciśnienie osiąga wartość zera.

2.2

Na podstawie przyjętych w p. 2.1 założeń otrzymamy w sposób przedstawiony w [8] następujące równania ruchu we współrzędnych Lagrange'a, opisujące zachowanie się badanego ośrodka:

$$(2.2) \quad v_{,t} = \frac{1}{\rho_i} \sigma_{,x}, \quad v_{,x} = \frac{1}{\rho_i a_k^2} \sigma_{,t},$$

gdzie $v(x, t)$ oznacza prędkość przemieszczeń, $\sigma(x, t)$ naprężenie, ρ_i gęstość ośrodka oraz gdzie $a_k = \sqrt{E_k / \rho_i}$,

$$k = \begin{cases} i & \text{w obszarze plastycznego obciążenia,} \\ i_0 & \text{w obszarze odciążenia (z wyjątkiem sztywnego odciążenia),} \end{cases}$$

$$i = \begin{cases} 1 & \text{dotyczy materiału warstwy,} \\ 2 & \text{dotyczy materiału półprzestrzeni; wielkość } E_k \text{ oznaczyliśmy na rys. 2.} \end{cases}$$

Podany układ równań uzupełniają następujące warunki graniczne:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \text{dla } t=0: & \quad v(x, 0)=0, \quad \sigma(x, 0)=0; \\ \text{dla } x=0: & \quad \sigma(0, t)=-p(t); \\ \text{dla } x=h: & \quad \sigma_{(v)}(h, t)-\sigma_{(w)}(h, t)=m\bar{v}_{,t}, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_{(w)}(h, t)$ oznacza naprężenie w warstwie na styku z płytą, $\sigma_{(v)}(h, t)$ naprężenie w półprzestrzeni na styku z płytą oraz $\bar{v}(t)$ prędkość ruchu płyty.

Układ równań (2.2) z warunkami granicznymi (2.3) rozwiążemy stosując metodę charakterystyk [6 i 8].

2.3

Rozwiązanie przedstawionego wyżej zagadnienia wyrazimy za pomocą następującego układu wielkości bezwymiarowych [7]:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} T &= \frac{t}{\tau}, & X &= \frac{x}{a_1 \tau}, & H &= \frac{h}{a_1 \tau}, & \alpha &= \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1}, & P_i &= \frac{\sigma_i}{p_m}, \\ P_0 &= \frac{p(t)}{p_m}, & R_1 &= \frac{r_1}{p_m}, & R_2 &= \frac{r_2}{p_m}, & M &= \frac{m}{\rho_1 a_1 \tau}, \\ U &= \frac{\rho_1 a_1}{p_m \tau} u, & V_i &= \frac{\rho_1 a_1}{p_m} v_i, & W &= \frac{\rho_1 a_1 \tau}{p_m} w, \\ \mu_{10} &= \frac{a_{10}}{a_1}, & \mu_2 &= \frac{a_2}{a_1}, & \mu_{20} &= \frac{a_{20}}{a_2}, \end{aligned}$$

gdzie

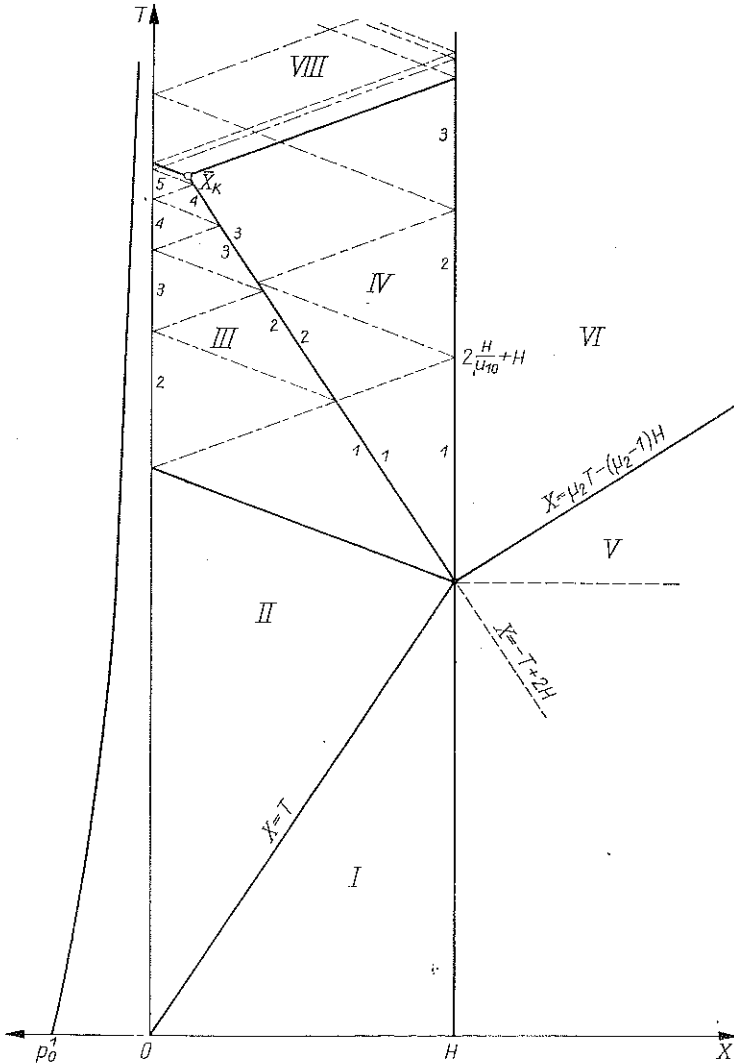
$$\sigma_{(w)}(h, t) = -r_1(t), \quad \sigma_{(v)}(h, t) = -r_2(t).$$

Indeks i stojący obok wielkości P oraz V oznacza numer kolejny obszaru na płaszczyźnie fazowej.

Wprowadzimy poza tym [7] oznaczenie indeksowe $0i$, które wskazuje, że dana wielkość występuje wzdłuż fali silnej nieciągłości od strony obszaru i .

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA W PRZYPADKU WYSTĘPOWANIA OBCIĄŻENIA W PÓŁPRZESTRZENI

Zamieszczone w tym punkcie wzory określające naprężenie i prędkości przemieszczeń stanowią podstawę dla dalszych rozważań, których celem jest określenie parametrów ruchu płyty w przypadku pojawienia się obciążenia w półprzestrzeni. Mając ten fakt na uwadze ograniczymy się dalej do podania tylko istotnych dla wspomnianego celu elementów rozwiązania. Będą to w zasadzie wzory określające rozkład naprężenia i prędkości przemieszczeń wzdłuż granic obszarów (rys. 3). Znalazienie na ich podstawie rozwiązań we wnętrzu każdego obszaru na podstawie metody charakterystyk nie przedstawia trudności.



Rys. 3

Przyjmijmy na wstępie, że w rezultacie działania warunków scharakteryzowanych w p. 2 ukształtuje się obraz rozwiązań pokazany na rys. 3. Oznaczenia przyjęte w podanych niżej wzorach, zgodnie z obowiązującą na podstawie p. 2 symboliką, są związane z następującą numeracją obszarów, wprowadzoną na rys. 3.

Obszar I. Obszar niezaburzony

$$P_1(X, T) = 0, \quad V_1(X, T) = 0.$$

Obszar II. Obszar odciążenia, na którego granicach naprężenia i prędkości przemieszczeń wyrażają się następująco:

a) Wzdłuż frontu fali odciążenia $X = T$

$$(3.1) \quad P_{02}(X) = -\frac{2}{\mu_{10} + 1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\left(\frac{\mu_{10}-1}{\mu_{10}}\right)^k}{1 - A^{k+1}} X^k,$$

$$V_{02}(X) = -P_{02}(X),$$

gdzie $\binom{n}{k}$ oznacza symbol Newtona oraz gdzie $A = \frac{\mu_{10}-1}{\mu_{10}+1}$.

b) Rozkład prędkości na brzegu $X=0$ warstwy

$$(3.2) \quad V_2(0, T) = \frac{1}{\mu_{10}} P_0(T) - \frac{\mu_{10}-1}{\mu_{10}} P_{02}\left(\frac{\mu_{10}}{\mu_{10}+1} T\right).$$

Obszar III. Obszar odciążenia

a) Rozwiązania przed frontem fali odbitej silnej nieciągłości $X = -T + 2H$

$$(3.3) \quad P_{03}(X) = P_{02}(X),$$

$$V_{03}^{(k)}(X) = \frac{2}{\mu_{10}} \sum_{i=1}^k [P_0(T_i) + P_{02}(X_i)] - \frac{P_{02}(X)}{\mu_{10}} - \frac{\mu_{10}-1}{\mu_{10}} P_{02}(X_0),$$

gdzie

$$T_i = -\frac{\mu_{10}+1}{\mu_{10}} A^{-(k-i)} X + 2H, \quad X_i = A^{-(k-i)} X,$$

$$X_0 = -A^{-(k-1)} X + 2 \frac{\mu_{10}}{\mu_{10}+1} H.$$

Współrzędne przestrzenne X punktów należących do kolejnego odcinka k spełniają warunek

$$X \in \langle A^{k-1} H, A^k H \rangle.$$

b) Rozkład prędkości na brzegu $X=0$ warstwy

$$(3.4) \quad V_3^{(k)}(0, T) = \frac{2}{\mu_{10}} \sum_{i=1}^{k-1} [P_0(T_i) + P_{02}(X_i)] + \frac{P_0(T)}{\mu_{10}} - \frac{\mu_{10}-1}{\mu_{10}} P_{02}(X_0),$$

gdzie

$$T_i = A^{-(k-i)} T + 2H(1 - A^{-(k-i)}),$$

$$X_i = -\frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} A^{-(k-i)} (T - 2H),$$

$$X_0 = \frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} [A^{-(k-1)} T + 2H(1 - A^{-(k-1)})].$$

Współrzędne T punktów należących do k -tego przedziału czasu spełniają warunek

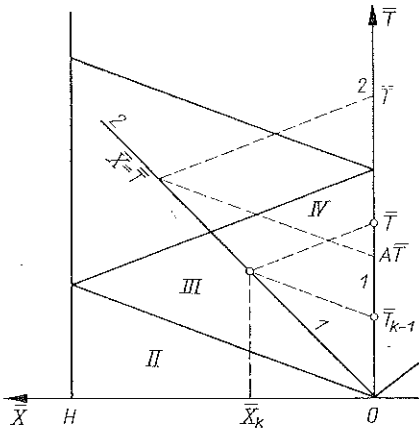
$$T \in \left\langle \left(2 - \frac{\mu_{10} + 1}{\mu_{10}} A^{k-1} \right) H, \left(2 - \frac{\mu_{10} + 1}{\mu_{10}} A^k \right) H \right\rangle.$$

Obszar IV. Zanim podamy odnoszące się do tego obszaru rozwiązanie, przedstawimy pokrótce sposób, w jaki możemy je uzyskać, przyjmując za podstawę fakt występowania odciążenia w rozważanym obszarze (por. np. [5]). Aby wyjaśnić stosowaną metodę, wykorzystamy rys. 4, który przedstawia fragment płaszczyzny fazowej, zawierający obszar IV. Należy zwrócić uwagę, iż przyjęto tutaj nowy układ współrzędnych

$$(3.5) \quad \bar{X} = -X + H, \quad \bar{T} = T - H.$$

Krok ten jest podyktowany dążeniem do uzyskania wzorów w możliwie zwartej postaci.

Na rysunku zaznaczono dwie charakterystyki: dodatnią i ujemną, poprowadzone z punktu o współrzędnej \bar{X}_k , leżącego na prostej reprezentującej falę odbitą silnej nieciągłości. Charakterystyki te przecinają prostą $\bar{X} = 0$ odpowiednio w punktach wyróżnionych współrzędnymi \bar{T}_{k-1} i \bar{T}_k .



Rys. 4

Równanie służące do obliczania prędkości ruchu płyty uzyskamy przekształcając układ równań, w którego skład wchodzi skalkowane związki wzdłuż charakterystyk $\bar{X}_k - \bar{T}_{k-1}$ i $\bar{X}_k - \bar{T}_k$, warunek ciągłości dynamicznej na froncie fali silnej nieciągłości (w punkcie \bar{X}_k), warunek brzegowy dla $\bar{X} = 0$ [por. (2.3) dla $x = h$] oraz związek między naprężeniem i prędkością przemieszczeń w płaszczyźnie stycznej półprzestrzeni z płytą, poprawny w przypadku obciążenia.

Rezultatem wspomnianych przekształceń jest równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu z przesuniętym argumentem [9] dla funkcji $\vartheta(\bar{T})$ określającej prędkość poruszania się płyty. Równanie to ma następującą formę:

$$(3.6) \quad \dot{\vartheta}(\bar{T}) + \frac{\alpha + \mu_{10}}{M} \vartheta_1(\bar{T}) + A \dot{\vartheta}(A\bar{T}) + A \frac{\alpha - \mu_{10}}{M} \vartheta(A\bar{T}) =$$

$$= -\frac{4}{M(\mu_{10}+1)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (\bar{T})^i \left(\frac{\mu_{10}-1}{\mu_{10}} H \right)^{k-i} \times \\ \times \left\{ \frac{A^{k+1}}{1-A^{k+1}} [(-1)^i A^{-(k-i)} + 1] + 1 \right\},$$

gdzie

$$[\vartheta(\bar{T})]_{\bar{T}=T-H} = -V_4(H, T) = -V_6(H, T),$$

$$\dot{\vartheta}(\bar{T}) = \frac{d\vartheta}{d\bar{T}}, \quad \dot{\vartheta}(A\bar{T}) = \left[\frac{d}{d\xi} \vartheta(\xi) \right]_{\xi=A\bar{T}}.$$

Warunek początkowy dla równania (3.6) wynika z prac [7 i 8] i ma postać:

$$(3.7) \quad [\vartheta(\bar{T})]_{\bar{T}=0} = 0.$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania z przesuniętym argumentem (3.6) i warunkiem (3.7) wynika z twierdzenia KAMIENSKIEGO (por. np. [9]). W celu znalezienia wspomnianego rozwiązania wykorzystamy metodę rozwinięcia w szereg potęgowy. Przyjmiemy w związku z tym następującą postać funkcji opisującej prędkość ruchu płyty:

$$(3.8) \quad \vartheta(\bar{T}) = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \bar{T}^j,$$

gdzie współczynniki występujące w sumie, określone zgodnie z przyjętą metodą postępowania, można przedstawić w postaci następujących wzorów rekurencyjnych:

$$b_0 = 0, \\ b_{j+1} = -b_j \frac{\alpha + \mu_{10} + (\alpha - \mu_{10}) A^{j+1}}{M(j+1)(1+A^{j+1})} - \frac{4}{M(\mu_{10}+1)(j+1)(1+A^{j+1})} \times \\ \times \sum_{k=j}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} \left(\frac{\mu_{10}-1}{\mu_{10}} H \right)^{k-j} \times \\ \times \left\{ \frac{A^{k+1}}{1-A^{k+1}} [(-1)^j A^{-(k-j)} + 1] + 1 \right\}, \quad \text{jeżeli } j \leq n, \\ b_{j+1} = -b_j \frac{\alpha + \mu_{10} + (\alpha - \mu_{10}) A^{j+1}}{M(j+1)(1+A^{j+1})}, \quad j > n,$$

gdzie n jest wykładnikiem potęgi w wyrażeniu (2.1).

Wykazano, że szereg (3.8) o współczynnikach (3.9) jest zbieżny jednostajnie. Ponadto dzięki temu, iż jest on przemienny, można z łatwością oszacować błąd, jaki popełniamy ograniczając się w rozwiązaniu do skończonej ilości wyrazów (np. m):

$$\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j \bar{T}^j - \sum_{j=n+1}^m b_j \bar{T}^j \right| < b_{(m+1)} \bar{T}^{m+1}.$$

Znając prędkość ruchu płyty (3.8) jesteśmy w stanie obliczyć naprężenie w płaszczyźnie styczności warstwy z płytą:

$$(3.10) \quad \bar{P}_4(0, \bar{T}) = \alpha \vartheta(\bar{T}) + M \dot{\vartheta}(\bar{T}),$$

a także naprężenie na styku półprzestrzeni z płytą:

$$(3.11) \quad \bar{P}_6(0, \bar{T}) = \alpha \vartheta(\bar{T}).$$

Równanie (3.6) oraz wynikające z niego wzory (3.8)–(3.11) są poprawne w skończonym przedziale czasu $\langle 0, \bar{T}_s \rangle$. Wielkość \bar{T}_s określamy na podstawie warunku

$$(3.12) \quad \bar{T}_s = \min \left(2 \frac{H}{\mu_{10}}, \frac{\mu_{10} + 1}{\mu_{10}} \bar{X}_K, \bar{T}_p \right).$$

Poszczególne wielkości występujące w (3.12) można obliczyć z następujących warunków:

- a) $2H/\mu_{10}$ z przyjętej postaci prawej strony w równaniu (3.6);
- b) $[(\mu_{10} + 1) \bar{X}_K]/\mu_{10}$ biorąc pod uwagę efekt zaniku silnej nieciągłości na froncie fali odbitej w punkcie o współrzędnej przestrzennej \bar{X}_K , którą określamy na podstawie równości

$$\bar{P}_{04}(\bar{X}_K) = \bar{P}_{02}(\bar{X}_K);$$

- c) \bar{T}_p stanowi ograniczenie ze względu na występowanie procesu odciążenia w płaszczyźnie styczności półprzestrzeni z płytą. Wartość \bar{T}_p obliczamy z równania

$$[\dot{\vartheta}(\bar{T})]_{\bar{T}=\bar{T}_p} = 0.$$

Znając [na podst. (3.8)] prędkość ruchu płyty $\vartheta(\bar{T})$ w przedziale czasu $\langle 0, \bar{T}_s \rangle$ możemy określić funkcje opisujące naprężenie i prędkość przemieszczeń wzdłuż frontu fali odbitej silnej nieciągłości. Przyjmą one następującą postać:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{04}(\bar{X}) &= \frac{1}{\mu_{10} + 1} \left[M \dot{\vartheta} \left(\frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} \bar{X} \right) + (\alpha - \mu_{10}) \vartheta \left(\frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} \bar{X} \right) \right] + \\ &+ \frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} [\bar{P}_{02}(\bar{X}) + \bar{V}_{03}(\bar{X})], \\ \bar{V}_{04}(\bar{X}) &= - \frac{1}{\mu_{10} + 1} \left\{ M \dot{\vartheta} \left(\frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} \bar{X} \right) + (\alpha - \mu_{10}) \vartheta \left(\frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} \bar{X} \right) - \right. \\ &\left. - [\bar{P}_{02}(\bar{X}) + \bar{V}_{03}(\bar{X})] \right\}. \end{aligned}$$

Ze wzorów (3.13) możemy korzystać, gdy

$$(3.14) \quad \bar{X} \in \langle 0, \bar{X}_s \rangle,$$

gdzie

$$\bar{X}_s = \min \left(\frac{2H}{\mu_{10} - 1}, \bar{X}_K, \frac{\mu_{10}}{\mu_{10} - 1} \bar{T}_p \right).$$

W uzupełnieniu rozważań podamy równanie różniczkowe, służące do obliczania prędkości ruchu płyty w kolejnym przedziale czasu od momentu $2H/\mu_{10}$:

$$(3.15) \quad \frac{d}{d\bar{T}} Y(\bar{T}) + \frac{\alpha + \mu_{10}}{M} Y(\bar{T}) = -A [\dot{\vartheta}(\eta)]_{\eta=A\bar{T}} - \frac{\alpha - \mu_{10}}{M} A \vartheta(A\bar{T}) + \\ + \frac{2\mu_{10}}{M(\mu_{10} + 1)} \left[\bar{P}_{02} \left(\frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} \bar{T} \right) + \bar{V}_{03} \left(\frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} \bar{T} \right) \right],$$

gdzie

$$Y(\bar{T}) = \bar{V}_4(0, \bar{T}).$$

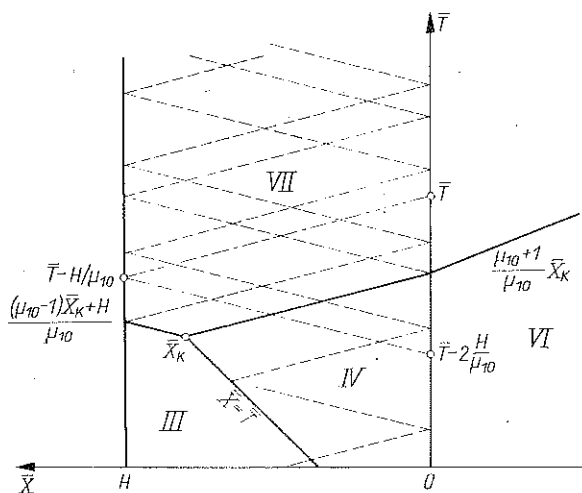
Oczywiście warunek początkowy jest następujący:

$$(3.16) \quad [Y(\bar{T})]_{\bar{T} = \frac{2H}{\mu_{10}}} = \vartheta \left(\frac{2H}{\mu_{10}} \right).$$

Równanie (3.15) jest poprawne do momentu, w którym w półprzestrzeni wystąpi odciążenie, jeżeli ponadto spełniona jest nierówność

$$\bar{X}_K > 2 \frac{H}{\mu_{10} + 1}.$$

Ze wzorów typu (3.13), (3.15) i (3.16) można korzystać przy obliczaniu naprężenia i prędkości przemieszczeń wzdłuż dalszych odcinków obu granic obszaru IV. Należy jednak pamiętać, że są one poprawne w przypadku, gdy w płaszczyźnie stycznej półprzestrzeni z płytą trwa proces odciążenia; natomiast na froncie fali odbitej $\bar{X} = \bar{T}$ występuje silna nieciągłość.



Rys. 5

Obszar VII. Jeżeli półprzestrzeń znajduje się ciągle w stanie obciążenia, natomiast w punkcie o współrzędnej \bar{X}_K zaniknie silna nieciągłość na froncie fali odbitej, to na płaszczyźnie fazowej powstanie nowy obszar VII (rys. 3 i 5).

a. Prędkość przemieszczenia powierzchni $\bar{X}=H$ warstwy (stanowiącej lewostronną granicę rozważanego obszaru) obliczamy w tym przypadku na podstawie równości

$$(3.17) \quad \bar{V}_7(H, \bar{T}) = -\frac{\bar{P}_0(\bar{T})}{\mu_{10}} +$$

$$+ \begin{cases} -\frac{\alpha - \mu_{10}}{\mu_{10}} \bar{V}_4\left(0, \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}\right) - M \left[\frac{d}{d\eta} \bar{V}_4(0, \eta) \right]_{\eta = \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}}, & \text{jeżeli } \bar{T} \leq \frac{(\mu_{10} + 1)\bar{X}_K + H}{\mu_{10}}, \\ -\frac{\alpha - \mu_{10}}{\mu_{10}} \bar{V}_7\left(0, \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}\right) - M \left[\frac{d}{d\eta} \bar{V}_7(0, \eta) \right]_{\eta = \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}}, & \text{jeżeli } \bar{T} > \frac{(\mu_{10} + 1)\bar{X}_K + H}{\mu_{10}}, \end{cases}$$

gdzie $\bar{V}_4(0, \bar{T} - H/\mu_{10})$ i $\bar{V}_7(0, \bar{T} - H/\mu_{10})$ są znane z poprzednich obliczeń.

b. Równanie różniczkowe, na podstawie którego obliczamy prędkość ruchu płyty w zakresie obszaru VII, przyjmuje postać

$$(3.18) \quad \frac{d}{d\bar{T}} Y(\bar{T}) + \frac{\mu_{10} + \alpha}{M} Y(\bar{T}) = -\frac{\bar{P}_0\left(\bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}\right)}{M} +$$

$$+ \begin{cases} \mu_{10} \bar{V}_3\left(H, \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}\right), & \text{jeżeli } \bar{T} \leq \frac{(\mu_{10} - 1)\bar{X}_K + 2H}{\mu_{10}}, \\ \mu_{10} \bar{V}_7\left(H, \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}\right), & \text{jeżeli } \bar{T} > \frac{(\mu_{10} - 1)\bar{X}_K + 2H}{\mu_{10}}, \end{cases}$$

gdzie

$$Y(\bar{T}) = \bar{V}_7(0, \bar{T});$$

$$\bar{V}_3\left(H, \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}\right) = -[\bar{V}_3^{(k)}(0, T)]_{T = \bar{T} + H}$$

znajdujemy wg (3.4), a

$$\bar{V}_7\left(H, \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}}\right)$$

otrzymujemy na podstawie (3.17).

Warunek początkowy dla równania (3.18) określamy korzystając z ciągłości prędkości w punktach granicznych każdego z dwu przedziałów czasu.

Napężenie w płaszczyźnie stycznej warstwy z płytą dla przedziału czasu odpowiadającego (3.18) wyznaczamy ze wzoru:

$$(3.19) \quad \bar{P}_7(0, \bar{T}) = M \frac{d}{d\bar{T}} Y(\bar{T}) + \alpha Y(\bar{T}).$$

Naprężenie na styku półprzestrzeni z płytą znajdujemy korzystając z zależności:

$$(3.20) \quad \bar{P}_c(0, \bar{T}) = \alpha Y(\bar{T}).$$

Procedura wyznaczania prędkości przemieszczeń powierzchni $\bar{X} = H$ warstwy wg (3.17) jak również prędkości ruchu płyty wg (3.18) oraz naprężenia w płaszczynach jej kontaktu z warstwą (3.19) i półprzestrzenią (3.20) jest powtarzalna. Znaczna jednakże liczba czynników i będąca ich rezultatem złożoność konstrukcji «odcinków obliczeniowych» wzdłuż granic obszaru praktycznie uniemożliwia wypracowanie ogólnych wzorów rekurencyjnych dla wymienionych wyżej wielkości.

Na podstawie zamieszczonych w tym punkcie wzorów jesteśmy w stanie określić wielkości oddziaływań wywieranych na płytę przez otaczający ją ośrodek w przypadku, gdy w półprzestrzeni ma miejsce proces obciążenia.

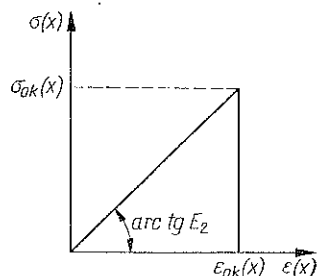
Następne informacje dotyczące zachowania się płyty, gdy w półprzestrzeni występuje odciażenie, zawarte są w dwu dalszych punktach.

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA W PRZYPADKU WYSTĄPIENIA SZTYWNEGO ODCIĄŻENIA W PÓLPRZESTRZENI

Zbadamy z kolei ruch płyty, charakter i wielkość oddziaływań wywieranych na nią przez otaczający ośrodek, gdy w półprzestrzeni ma miejsce proces sztywnego odciażenia. W związku z tym przyjmijmy charakterystykę materiału półprzestrzeni przedstawioną na rys. 6 (por. własności warstwy w [7]).

Oznaczmy przez \bar{T}_p (rys. 7) czas, w którym w płaszczyźnie stycznej półprzestrzeni i płyty rozpocznie się odciażenie. Wyznaczony w ten sposób punkt stanowi początek fali odciażenia propagującej się w głąb półprzestrzeni. W dalszym ciągu zajmijmy się określeniem postaci tej fali, jako zagadnieniem podstawowym dla wyznaczenia parametrów ruchu płyty w rozważanym przypadku odciażenia.

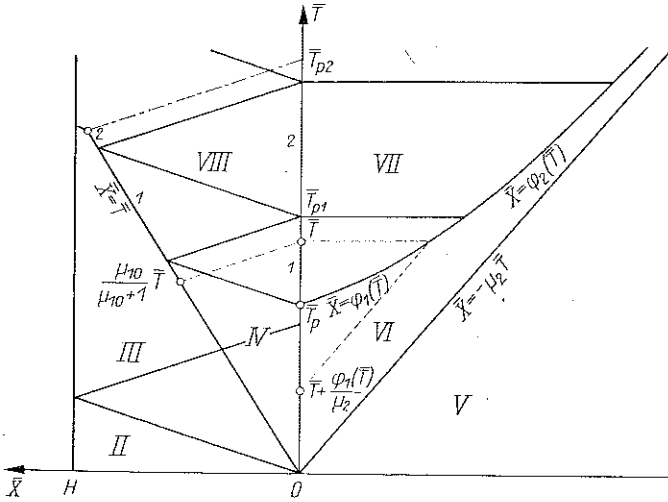
Prowadzimy w tym celu przez punkt \bar{T}_p , jak to przedstawiono na rys. 7, charakterystykę dodatnią dla obszaru odciażenia w warstwie do przecięcia się z prostą $\bar{X} = \bar{T}$. Utworzony w ten sposób odcinek stanowi granicę między obszarami odciażenia IV i VIII. Z końca \bar{X}_p tego odcinka, leżącego na fali odbitej, prowadzimy odcinek charakterystyki ujemnej do przecięcia z osią \bar{T} . Oznaczmy uzyskany w ten sposób punkt za pomocą jego współrzędnej czasowej \bar{T}_{p1} . Powtarzając przedstawioną konstrukcję, uzyskamy na osi \bar{T} kolejne punkty \bar{T}_{p2} , \bar{T}_{p3} , ..., \bar{T}_{pk} ; natomiast na prostej $\bar{X} = \bar{T}$ znajdziemy punkty \bar{X}_{p2} , \bar{X}_{p3} , ..., \bar{X}_{p1} . Współrzędne tych punktów obliczamy na podstawie wzorów



Rys. 6

$$(4.1) \quad \bar{T}_{pk} = A^{-k} \bar{T}_p, \quad \bar{X}_{p1} = \frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} A^{-1} \bar{T}_p.$$

Przyporządkujmy dalej odcinkowi leżącemu na osi \bar{T} i zawartemu między punktami o współrzędnych $\bar{T}_{pk-1}, \bar{T}_{pk}$ numer kolejny k . Oznaczmy podobnie odcinek prostej $\bar{X}=\bar{T}$, którego współrzędne $\bar{X} \in \langle \bar{X}_{pl}, \bar{X}_{pl+1} \rangle$, kolejną liczbą naturalną l . Konieczność wprowadzenia omówionego wyżej podziału wynika ze względów obliczeniowych.



Rys. 7

Założymy w dalszym ciągu, że równanie opisujące falę odciążenia w półprzestrzeni ma następującą postać:

$$(4.2) \quad \bar{X} = \varphi_k(\bar{T})$$

w przedziale czasu $\langle \bar{T}_{k-1}, \bar{T}_k \rangle$.

Kolejne odcinki k fali określamy rozwiązując równanie różniczkowe zwyczajne względem funkcji (4.2). Równanie to wyprowadzamy korzystając z układu równań, do którego wchodzić sałkowane równania wzdłuż ujemnych charakterystyk w obszarze VIII, warunek graniczny dla $\bar{X}=0$ [por. (2.3)], równanie ruchu półprzestrzeni w zakresie sztywnego odciążenia (por. odpowiednie równanie dla warstwy w [7]) oraz zależność wiążąca naprężenie i prędkości przemieszczeń, występujące w punktach należących do fali odciążenia z tymi samymi wielkościami na powierzchni $\bar{X}=0$ półprzestrzeni — w zakresie obciążenia.

Otrzymane tą drogą równanie na $\varphi_k(\bar{T})$ ma następującą postać:

$$(4.3) \quad \left[M - \frac{\rho_2}{\rho_1} \varphi_k(\bar{T}) \right] \frac{d}{d\bar{T}} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T} + \frac{1}{\mu_2} \varphi_k(\bar{T}) \right] + (\alpha + \mu_{10}) \bar{V}_{6c} \left[\bar{T} + \frac{1}{\mu_2} \varphi_k(\bar{T}) \right] = \\ = \bar{P}_{08}^{(k-1)} \left(\frac{\mu_{10}}{\mu_{10}+1} \bar{T} \right) + \mu_{10} \bar{V}_{08}^{(k-1)} \left(\frac{\mu_{10}}{\mu_{10}+1} \bar{T} \right),$$

gdzie

$$\bar{V}_{6c}(\xi) = \bar{V}_6(0, \xi)$$

jest znaną wielkością z punktu 2;

$$\bar{V}_{6c}(\xi) = \mathfrak{B}(\xi)$$

w szczególnym przypadku, gdy $\xi \in \left\langle 0, 2 \frac{H}{\mu_{10}} \right\rangle$ (por. (3.8));

$$\bar{P}_{08}^{(0)}(\xi) = \bar{P}_{04}(\xi), \quad \bar{V}_{08}^{(0)}(\xi) = \bar{V}_{04}(\xi)$$

dla pierwszego ($k=1$) odcinka fali odciążenia.

Równanie (4.3) rozwiązujemy z warunkiem początkowym

$$(4.4) \quad \varphi_k(\bar{T}_{pk-1}) = \varphi_{k-1}(\bar{T}_{pk-1}).$$

Chcąc określić prawą stronę (4.3) w przypadku $k > 1$ korzystamy ze wzoru określającego naprężenie i prędkości przemieszczeń na froncie fali odbitej silnej nieciągłości ($\bar{X} = \bar{T}$). Dla kolejnego odcinka k mamy zatem

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \bar{V}_{08}^{(k)}(\bar{X}) = & \frac{1}{\mu_{10} + 1} \{ \bar{P}_{02}(\bar{X}) + \bar{V}_{03}(\bar{X}) - (-A)^{k-1} [\bar{P}_{04}(\bar{X}_0) + \mu_{10} \bar{V}_{04}(\bar{X}_0)] \} - \\ & - \frac{2\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} \left\{ \frac{1}{\mu_{10} + 1} \sum_{i=1}^{k-1} (-A)^{k-(i+1)} [\bar{P}_{02}(\bar{X}_i) + \bar{V}_{03}(\bar{X}_i)] - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^k (-A)^{k-i} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T}_i + \frac{1}{\mu_2} \varphi_i(\bar{T}_i) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{08}^{(k)}(\bar{X}) = & \frac{1}{\mu_{10} + 1} \{ \mu_{10} [\bar{P}_{02}(\bar{X}) + \bar{V}_{03}(\bar{X})] + (-A)^{k-1} [\bar{P}_{04}(\bar{X}_0) + \\ & + \mu_{10} \bar{V}_{04}(\bar{X}_0)] \} + \frac{2\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} \left\{ \frac{1}{\mu_{10} + 1} \sum_{i=1}^{k-1} (-A)^{k-(i+1)} [\bar{P}_{02}(\bar{X}_i) + \right. \\ & \left. + \bar{V}_{03}(\bar{X}_i)] - \sum_{i=1}^k (-A)^{k-i} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T}_i + \frac{1}{\mu_2} \varphi_i(\bar{T}_i) \right] \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{X}_i = A^{k-i} \bar{X}, \quad \bar{T}_i = \frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} A^{k-i} \bar{X}.$$

Z przedstawionych równań (4.3) i (4.5) wynika wniosek, że określenie postaci fali odciążenia na k -tym odcinku wg (4.2) wymaga znajomości funkcji $\varphi_i(\bar{T})$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Działanie wywierane na płytę przez ośrodek znajdujemy na podstawie warunku podanego w (2.4) korzystając z następujących wzorów:

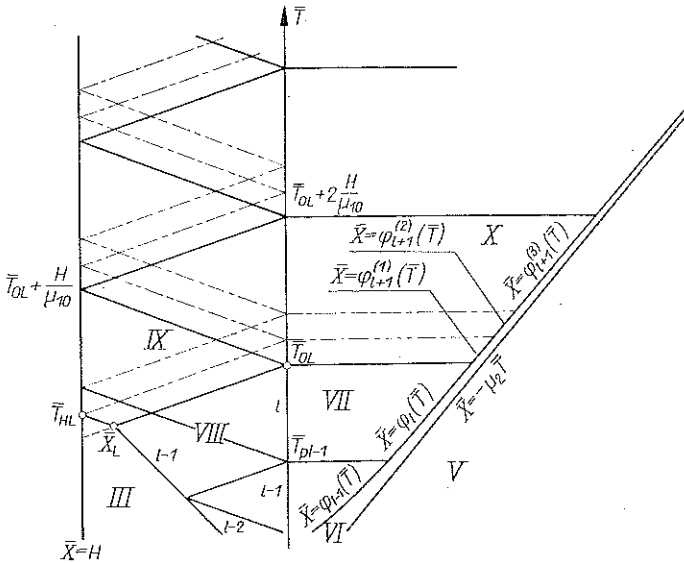
$$(4.6) \quad \begin{aligned} \bar{P}_7^{(k)}(0, \bar{T}) = & \bar{P}_8^{(k)}(0, \bar{T}) - \frac{d}{d\bar{T}} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T} + \frac{1}{\mu_2} \varphi_k(\bar{T}) \right], \\ \bar{P}_8^{(k)}(0, \bar{T}) = & \bar{P}_{08}^{(k-1)} \left(\frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} \bar{T} \right) + \mu_{10} \bar{V}_{08}^{(k-1)} \left(\frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} \bar{T} \right) - \\ & - \mu_{10} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T} + \frac{1}{\mu_2} \varphi_k(\bar{T}) \right]. \end{aligned}$$

Wzory, jakie podaliśmy, związane są z występowaniem silnej nieciągłości na froncie fali odbitej.

Stwierdzenie faktu, że równość

$$(4.7) \quad \bar{P}_{0S}^{(k)}(\bar{X}_L) = \bar{P}_{02}(\bar{X}_L)$$

jest spełniona w punkcie o współrzędnej \bar{X}_L (rys. 8), położonym na prostej $\bar{X} = \bar{T}$, reprezentującej wspomnianą falę odbitą, oznacza zanik silnej nieciągłości na froncie tej fali. Niżej zajmiemy się określeniem działania ośrodka na płytę, gdy zachodzi równość (4.7).



Rys. 8

Przyjmijmy, że punkt o współrzędnej \bar{X}_L leży na $l-1$ -szym odcinku [por. określenie wynikające z (4.1)] fali odbitej. W tej sytuacji powstanie obraz rozwiązania przedstawiony na rys. 8. Oznaczmy kolejną liczbą IX obszar położony powyżej odcinków charakterystyk poprowadzonych z punktu L (\bar{X}_L, \bar{X}_L). Charakterystyki te wyznaczają na prostej $\bar{X} = H$ punkt o współrzędnej

$$\bar{T}_{HL} = \frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} \bar{X}_L + \frac{H}{\mu_{10}}$$

oraz na osi \bar{T} punkt o współrzędnej

$$\bar{T}_{OL} = \frac{\mu_{10} + 1}{\mu_{10}} \bar{X}_L.$$

Przyjmijmy, że $2H/\mu_{10}$ jest długością «podstawowego odcinka», na jakie podzielimy granice obszaru IX $\bar{X} = H$ i $\bar{X} = 0$ mając na uwadze wzory rekurencyjne, za pomocą których przedstawimy rozwiązanie.

Pierwszy podstawowy odcinek granicy lewostronnej ma zwykle długość mniejszą od obranego wyżej. Przyjmijmy, że zawarty jest między punktami, których współrzędne czasowe są równe \bar{T}_{HL} i $\bar{T}_{OL} + H/\mu_{10}$. Długość pozostałych odcinków jest zgodna z założeniem początkowym.

Numerację odcinków granicy prawostronnej obszaru rozpoczniemy od odcinka zawartego między punktami o współrzędnych \bar{T}_{OL} i $\bar{T}_{OL} + 2H/\mu_{10}$. W dalszym ciągu każdy odcinek podstawowy obu granic dzieli się dodatkowo na trzy kolejne części ($m=1, 2, 3$) o długościach odpowiednio równych:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \text{dla } m=1: & \quad \frac{2}{\mu_{10}}(H - \bar{X}_L), \\ \text{dla } m=2: & \quad (\mu_{10} - 1) \left(A^{-1} \frac{\bar{T}_p}{\mu_{10} + 1} - \frac{\bar{X}_L}{\mu_{10}} \right), \\ \text{dla } m=3: & \quad \frac{\mu_{10} + 1}{\mu_{10}} \bar{X}_L - A^{-(l-1)} \bar{T}_p. \end{aligned}$$

Rozwiązania wzdłuż kolejnych podstawowych odcinków k obu granic obszaru IX wyrażają się za pomocą wzorów rekurencyjnych, związanych z omówionym wyżej sposobem podziału granic.

Na wstępie podajemy analogiczne do (4.3) równanie różniczkowe zwyczajne względem funkcji $\varphi_{i+k}^{(m)}(\bar{T})$, opisującej postać fali odciążenia w półprzestrzeni, odpowiadającą m -tej części k -tego odcinka podstawowego granicy prawostronnej obszaru IX:

$$(4.9) \quad \left[M - \frac{\rho_2}{\rho_1} \varphi_{i+k}^{(m)}(\bar{T}) \right] \frac{d}{d\bar{T}} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T} + \frac{1}{\mu_2} \varphi_{i+k}^{(m)}(\bar{T}) \right] + \\ + (\alpha + \mu_{10}) \bar{V}_{6c} \left[\bar{T} + \frac{1}{\mu_2} \varphi_{i+k}^{(m)}(\bar{T}) \right] = -\bar{P}_0 \left(\bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}} \right) + \mu_{10} \bar{V}_9^{(km)} \left(H, \bar{T} - \frac{H}{\mu_{10}} \right),$$

gdzie l oznacza w tym przypadku numer kolejny ostatniego odcinka prawostronnej granicy obszaru VIII.

Funkcję $\bar{V}_9^{(km)}(H, \dots)$, występującą po prawej stronie równania (4.9) i opisującą prędkość przemieszczeń powierzchni $\bar{X}=H$ warstwy, przedstawiamy następująco:

$$(4.10) \quad \bar{V}_9^{(km)}(H, \bar{T}) = -\frac{2}{\mu_{10}} \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \bar{P}_0(\bar{T}_{bi}) + \frac{1}{\mu_{10}} \bar{P}_0(\bar{T}) - \\ - 2 \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k+i} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T}_i + \frac{1}{\mu_2} \varphi_{i+i}^{(m)}(\bar{T}_i) \right] - (-1)^k \Psi_{(km)}(\bar{T}_{b1}),$$

gdzie

$$\bar{T}_{bi} = \bar{T} - (k-i) \frac{H}{\mu_{10}}, \quad \bar{T}_i = \bar{T} - [2(k-i) - 1] \frac{H}{\mu_{10}},$$

$$\Psi_{(km)}(\bar{T}_{b1}) = \begin{cases} \bar{V}_{03} \left(\frac{\mu_{10} \bar{T}_{b1} - H}{\mu_{10} - 1} \right) - \frac{1}{\mu_{10}} \bar{P}_{02} \left(\frac{\mu_{10} \bar{T}_{b1} - H}{\mu_{10} - 1} \right), & \text{jeżeli } m=1, \\ \bar{V}_8^{(l-1)} \left(0, \bar{T}_{b1} - \frac{H}{\mu_{10}} \right) - \frac{1}{\mu_{10}} \bar{P}_8^{(l-1)} \left(0, \bar{T}_{b1} - \frac{H}{\mu_{10}} \right), & \text{jeżeli } m=2, \\ \bar{V}_8^{(l)} \left(0, \bar{T}_{b1} - \frac{H}{\mu_{10}} \right) - \frac{1}{\mu_{10}} \bar{P}_8^{(l)} \left(0, \bar{T}_{b1} - \frac{H}{\mu_{10}} \right), & \text{jeżeli } m=3. \end{cases}$$

Należy dodać, że w przypadku $k=1$, przyjmujemy $m=2, 3$.

Naprężenie w płaszczyźnie kontaktu warstwy i płyty, w kolejnym, podstawowym przedziale czasu k , obliczamy ze wzoru:

$$(4.11) \quad \bar{P}_9^{(km)}(0, \bar{T}) = -2 \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \bar{P}_0(\bar{T}_{bi}) - 2\mu_{10} \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \times \\ \times \bar{V}_{6c} \left[\bar{T}_i + \frac{1}{\mu_2} \varphi_{i+i}^{(m)}(\bar{T}_i) \right] + \mu_{10} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T} + \frac{1}{\mu_2} \varphi_{i+k}^{(m)}(\bar{T}) \right] - (-1)^k \mu_{10} \Psi_{(km)}(\bar{T}_{b1}),$$

gdzie

$$\bar{T}_{bi} = \bar{T} - [2(k-i)+1] \frac{H}{\mu_{10}}, \quad \bar{T}_i = \bar{T} - 2(k-i) \frac{H}{\mu_{10}}.$$

Naprężenie w płaszczyźnie styczności półprzestrzeni i płyty określamy na podstawie warunku brzegowego dla $\bar{X}=0$ [por. (2.3)]:

$$(4.12) \quad \bar{P}_{10}^{(km)}(0, \bar{T}) = \bar{P}_9(0, \bar{T}) - \frac{d}{d\bar{T}} \bar{V}_{6c} \left[\bar{T} + \frac{1}{\mu_2} \varphi_{i+k}^{(m)}(\bar{T}) \right].$$

Podanym wyżej wzorem zakończymy część ogólną rozważań związanych ze sztywnym odcieżeniem w półprzestrzeni. Powrócimy jeszcze do tej tematyki w p. 6 pracy przy okazji omawiania przykładów numerycznych.

5. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA W PRZYPADKU LINIOWEGO ODCIĄŻENIA W PÓLPRZESTRZENI

Należy stwierdzić na wstępie, że próby uzyskania ścisłego rozwiązania zagadnienia w rozważanym przypadku liniowego odcieżenia w półprzestrzeni oraz dowolnej postaci wymuszenia jej brzegu $\bar{X}=0$ nie prowadzą do praktycznie użytecznych rezultatów [8].

Niżej przedstawimy zasadnicze rezultaty przybliżonego rozwiązania, jakie możemy uzyskać zastępując funkcją «schodkową» (sposób ten omówiono w [8]) rzeczywisty przebieg naprężenia w zakresie obciążenia na powierzchni $\bar{X}=0$ półprzestrzeni. Oznaczenia przyjęte w zamieszczonych wyrażeniach są związane z obrazem rozwiązań, przedstawionym na rys. 9.

W przypadku założonej aproksymacji dwustopniowej otrzymamy fałę odcieżenia w półprzestrzeni, w postaci łamanej złożonej z odcinków prostych [8]. Pierwszy

z nich jest odcinkiem charakterystyki ujemnej dla obszaru odciążenia, przechodzącej przez punkt \bar{T}_p . Następny, określony równaniem

$$(5.1) \quad \bar{X} = -\mu_2(\bar{T} - \bar{T}_a)$$

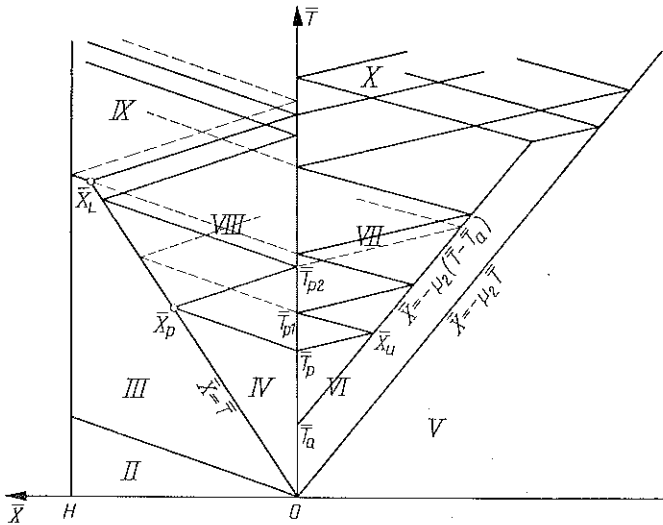
reprezentuje równocześnie falę obciążenia silnej nieciągłości.

Wzdłuż trzeciego odcinka pokrywającego się z charakterystyką ujemną, przechodzącą przez punkt, w którym zanikła silna nieciągłość na froncie (5.1), występują stałe naprężenia i prędkości przemieszczeń $\bar{V}_6(0, \bar{T}_a)$, $\bar{P}_6(0, \bar{T}_a)$.

Ostatni odcinek reprezentuje, podobnie jak (5.1), równocześnie falę obciążenia silnej nieciągłości i leży na prostej

$$(5.2) \quad \bar{X} = -\mu_2 \bar{T}.$$

Przyjmijmy, że oś \bar{T} w części stanowiącej granicę między obszarami VII i VIII jest podzielona na kolejne przedziały czasu k za pomocą punktów \bar{T}_p , \bar{T}_{p1} , \bar{T}_{p2} , ..., \bar{T}_{pk} , które otrzymujemy w sposób widoczny na rys. 9.



Rys. 9

Zgodnie z wprowadzonym podziałem równanie różniczkowe, na podstawie którego obliczamy prędkość ruchu płyty w k -tym przedziale, czasu przyjmie postać następującą:

$$(5.3) \quad M \frac{d}{d\bar{T}} \bar{V}_7^{(k)}(0, \bar{T}) + (\alpha\mu_{20} + \mu_{10}) \bar{V}_7^{(k)}(0, \bar{T}) = \alpha(\mu_{20} - 1) \bar{V}_{07}(\bar{X}_{k-1}) + \\ + (\mu_{10} - 1) \bar{V}_{08}(\bar{X}_r) + \bar{P}_{02}(\bar{X}_r) + \bar{V}_{03}(\bar{X}_r),$$

gdzie

$$\bar{X}_{k-1} = \frac{-\mu_{20} \mu_2}{\mu_{20} + 1} \bar{T},$$

jeżeli \bar{X}_{k-1} leży na (5.2);

$$\bar{X}_{k-1} = -\frac{\mu_{20} \mu_2}{\mu_{20} + 1} (\bar{T} - \bar{T}_a),$$

jeżeli \bar{X}_{k-1} leży na (5.1);

$$\bar{X}_r = \frac{\mu_{10}}{\mu_{10} + 1} \bar{T},$$

jeżeli $\bar{X}_r < \bar{X}_L$.

Przy obliczaniu prędkości płyty w pierwszym przedziale czasu podstawiamy:

$$\bar{V}_{07}(\bar{X}_{k-1}) = \bar{V}_6(0, \bar{T}_p), \quad \bar{V}_{08}(\bar{X}_r) = \bar{V}_{04}(\bar{X}_r).$$

Warunek początkowy dla równania (5.3) ma postać

$$(5.4) \quad [\bar{V}_7^{(k)}(0, \bar{T})]_{T=\bar{T}_{pk-1}} = [\bar{V}_7^{(k-1)}(0, \bar{T})]_{T=\bar{T}_{pk-1}}.$$

Znając w wyniku całkowania równania (5.3) prędkość ruchu płyty określamy dalej działanie ośrodka na płytę. Postępowanie w tym przypadku jest podobne do przyjętego w p. 3 oraz 4 i w związku z tym pominiemy je tutaj. Ograniczymy się w dalszym ciągu do podania zależności, na podstawie których obliczamy prędkości przemieszczeń wzdłuż kolejnych odcinków k na frontach fal: odciążenia w półprzestrzeni i odbitej w warstwie. Mają one następujące postacie:

$$(5.5) \quad \bar{V}_{07}^{(k)}(\bar{X}) = \frac{2\mu_{20}}{\mu_{20} + 1} \bar{V}_7^{(k)}(0, \bar{T}) - \frac{\mu_{20} - 1}{\mu_{20} + 1} \bar{V}_{07}(\bar{X}_s),$$

gdzie

$$T = \begin{cases} -\frac{\mu_{20} - 1}{\mu_{20} \mu_2} \bar{X}, & \text{jeżeli } \bar{X} \text{ leży na (5.2),} \\ \bar{T}_a - \frac{\mu_{20} - 1}{\mu_{20} \mu_2} \bar{X}, & \text{jeżeli } \bar{X} \text{ leży na (5.1);} \end{cases}$$

$$\bar{X}_s = \frac{\mu_{20} - 1}{\mu_{20} + 1} \bar{X},$$

$$(5.6) \quad \bar{V}_{08}^{(k)}(\bar{X}) = -\frac{\alpha\mu_{20} - \mu_{10}}{\mu_{10} + 1} \bar{V}_7^{(k)}(0, \bar{T}) - \frac{M}{\mu_{10} + 1} \frac{d}{d\bar{T}} \bar{V}_7^{(k)}(0, \bar{T}) - \\ - \frac{1}{\mu_{10} + 1} [\bar{P}_{07}(\bar{X}_s) - \alpha\mu_{20} \bar{V}_{07}(\bar{X}_s)] + \frac{1}{\mu_{10} + 1} [\bar{P}_{02}(\bar{X}) + \bar{V}_{03}(\bar{X})],$$

gdzie

$$\bar{T} = \frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} \bar{X},$$

$$\bar{X}_s = \begin{cases} -\frac{\mu_{20} \mu_2}{\mu_{20} + 1} \frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} \bar{X}, & \text{jeżeli } \bar{X}_s \text{ leży na (5.2),} \\ -\frac{\mu_{20} \mu_2}{\mu_{20} + 1} \left(\frac{\mu_{10} - 1}{\mu_{10}} \bar{X} - \bar{T}_a \right), & \text{jeżeli } \bar{X}_s \text{ leży na (5.1).} \end{cases}$$

Naprężenia występujące wzdłuż tych odcinków obliczamy na podstawie warunków ciągłości dynamicznej.

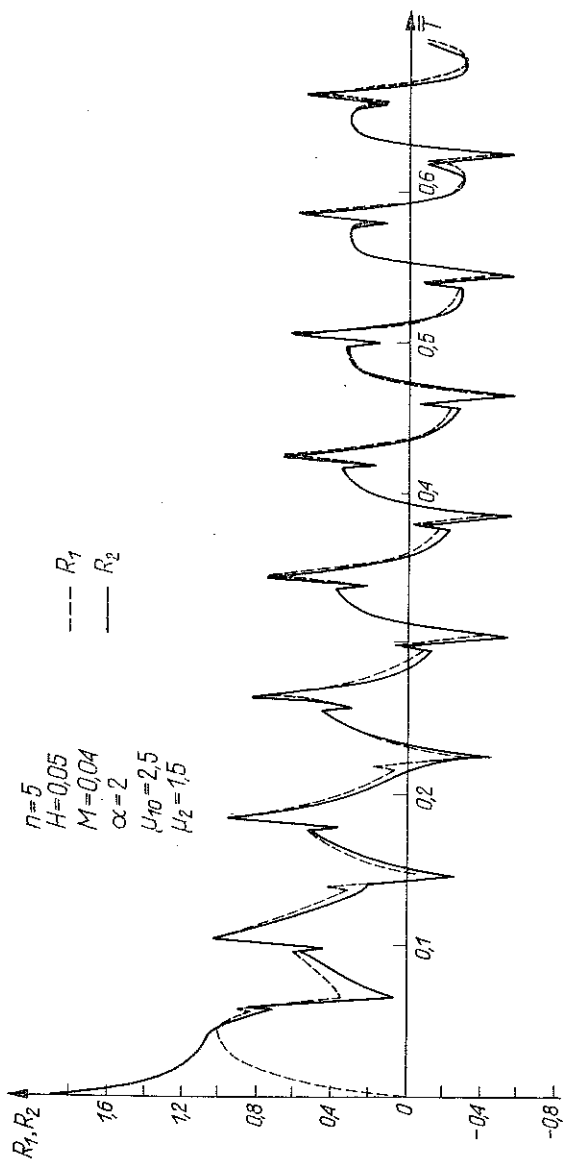
Na zakończenie zawartych w tym punkcie rozważań należy podkreślić, że mimo daleko idących uproszczeń w przyjętej metodzie rozwiązywania, praktycznie niemożliwe jest uzyskanie ogólnych zależności opisujących zachowanie się ośrodka, jak to miało miejsce w przypadku sztywnego odciążenia. Przyczyną tego stanu jest znaczna liczba czynników wpływających w omawianym przypadku na ukształtowanie obrazu rozwiązań, co z kolei utrudnia wyprowadzenie niezbędnych zależności rekurencyjnych.

6. OMÓWIENIE REZULTATÓW NUMERYCZNYCH W PRZYPADKU SZTYWNEGO ODCIĄŻENIA W PÓLPRZESTRZENI

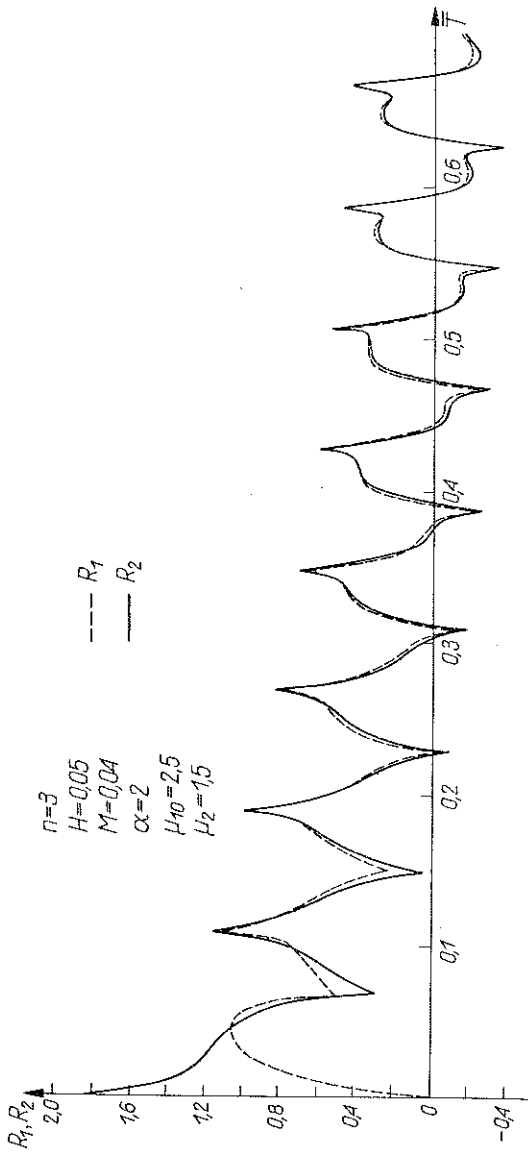
Wyniki numeryczne wskazują na jakościowo inny w porównaniu z [7] charakter zmienności obciążeń R_1 , R_2 , działających na umieszczoną między warstwami płytę, czego efektem jest również odmienne zachowanie się płyty. Jak wskazują wykresy przedstawione na rys. 10 i 11 oddziaływanie zarówno warstwy jak i półprzestrzeni na płytę przyjmuje postać oscylacji o malejącej w czasie amplitudzie. Oscylacyjny charakter działającego na płytę obciążenia spowodowany jest wielokrotnymi odbiciami fal naprężenia od zewnętrznej powierzchni warstwy i od płyty. Świadczy o tym «okres» oscylacji, który jest dokładnie czterokrotnie większy od czasu, jaki potrzebuje fala poruszająca się z prędkością, odpowiadającą stanowi odciążenia na przebycie odległości równej grubości warstwy. Przebieg zmienności R_1 , R_2 w ramach jednego okresu charakteryzuje się występowaniem (przynajmniej w początkowej fazie zjawiska) ich maksymalnej i minimalnej wartości odległych od siebie o pół okresu. Jak łatwo zauważyć, tego rodzaju efekt zawdzięczamy w głównej mierze oddziaływaniu swobodnego brzegu. Opisane wyżej zjawisko nie może mieć miejsca przy założeniu sztywnego odciążenia w warstwie, czego potwierdzeniem są rezultaty uzyskane w pracy [7].

Należy dalej zauważyć, że wykresy na rys. 10 i 11 pokazują jedynie zmiany obciążenia płyty, występujące w procesie dynamicznym, natomiast nie uwzględniają ciśnienia statycznego, panującego na odpowiedniej głębokości w gruncie. Mimo to stosowalność rezultatów przedstawionych rozważań w przypadku ośrodków gruntowych jest ograniczona przez możliwość występowania naprężeń rozciągających [por. wyjaśnienie do wzoru (2.4)]. Pojawia się one najwcześniej, jak wiadomo, na zewnętrznej powierzchni warstwy. Od momentu ich wystąpienia ruch płyty umieszczonej między dwoma warstwami gruntu będzie różnił się od tego, jaki wynika z dotychczasowych rozważań. Oczywiście ograniczenie to nie ma miejsca w przypadku ośrodków wykazujących zdolność przenoszenia naprężeń rozciągających.

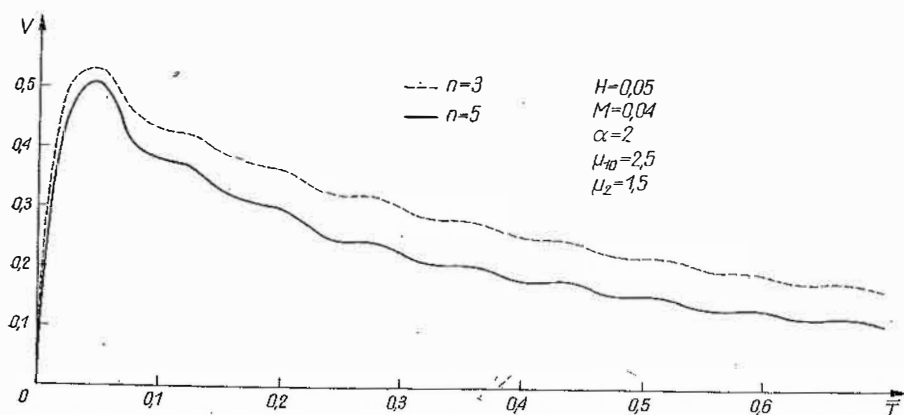
Oscylacyjny charakter oddziaływań wywieranych na płytę jest również przyczyną niemonotonicznego malenia prędkości ruchu płyty, co widać na rys. 12.



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. KALISKI, J. OSIECKI, *Problem odbicia się fali odciążenia od sztywnej ściany dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia*, Biul. WAT, 2(85), VIII (1959).
2. J. OSIECKI, *Odbicie się płaskich fal naprężenia słabej nieciągłości w ośrodku sprężysto-plastycznym*, Biul. WAT, 11/12 (111/112), X/1961.
3. Н. В. Зволинский, Г. В. Рыков, *Отражение пластической волны от преграды*, ПММ, 27, 1, 1963.
4. S. KALISKI, *Fala odciążenia dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia w ośrodku warstwowym*, Biul. WAT, 3(103), X(1961).
5. Н. В. Зволинский, *Отражение и преломление плоской пластической волны при наличии граничной плоскости*, ПММ, 31, 5, 1967.
6. K. PODOLAK, *Odbicie płaskich fal naprężenia w ośrodku sprężysto-plastycznym o zmiennej granicy plastyczności*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 10, 1972.
7. A. PAPLIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Współdziałanie sprężysto-plastycznych fal naprężenia z nieściśliwą płaską przegrodą spoczywającą na półprzestrzeni sprężystej*, Rozpr. Inżyn., 20, 2, 1972.
8. E. WŁODARCZYK, *Wpływ liniowo-sprężystego odciążenia na parametry ruchu sztywnej płyty, spoczywającej na sprężysto-plastycznym gruncie*, Biul. WAT, 7(203), XVIII(1969).
9. Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Изд. «Наука», Москва, 1971.

Резюме

ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ В СЛОЙСТОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ЖЕСТКУЮ ПЛИТУ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СЛОВ

В работе решена задача о движении жесткой плиты, помещенной между слоем пластического материала и пластическим полупространством, причем законы разгрузки для слоя и полупространства различны. На внешнюю поверхность слоя действует внезапно приложенное давление, убывающее затем с течением времени. Решение задачи получено в виде равномерно сходящихся бесконечных рядов.

В заключение приводятся численные результаты, полученные за ЭЦВМ, содержащие интересные данные о динамическом поведении исследуемой плиты.

SUMMARY

ON THE STRESS WAVE PROPAGATION PROBLEM
IN A PLASTIC MEDIUM CONTAINING THE RIGID PLATE ON THE BOUNDARY
OF THE LAYERS

The problem of interaction of a plane stress wave with a rigid plate placed between the plastic layer and semi-space which are characterized by different unloading laws is studied. At outer surface of the layer a suddenly increasing pressure (which then monotonically decreases to zero) is given.

The solution of the problem is obtained in the form of an infinite series which converges uniformly. Using an electronic computer, some numerical results are obtained. They give us interesting informations concerning the dynamic behaviour of the plate.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 września 1973 r.
