

OPTYMALNY ROZKŁAD MATERIAŁÓW W RUSZTACH BIEGUNOWYCH

JACEK GIERLIŃSKI (WARSZAWA)

1. WSTĘP

W pracy przedstawiono zagadnienie określania optymalnego rozkładu materiałów konstrukcyjnych w rusztach biegunowych obciążonych poprzecznie. Rozpatrywane ustroje są podparte i obciążone kołowo-symetrycznie.

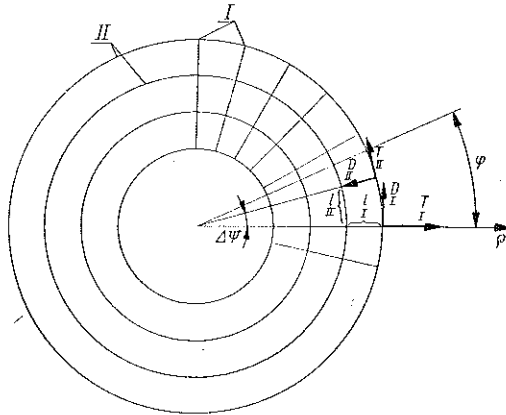
Analizę statyczną tego rodzaju ustrojów znajdziemy w wielu pracach. W. GUTKOWSKI i J. BAUER przedstawili w pracy [5] podejście dyskretne do rozwiązywania tych ustrojów. Zastosowanie teorii ośrodków włóknistych przedstawiono m.in. w pracy S. KONIECZNEGO [6] i w monografii Cz. WOŹNIAKA [11]. Zagadnienie nośności granicznej rusztów pierścieniowych rozpatrzyli M. KWIECIŃSKI i M. KLEIBER w pracy [7].

Sformułowanie i rozwiązanie problemu optymalizacji sprężystych ustrojów siatkowych przedstawione zostało w pracach W. DZIENISZEWSKIEGO [1, 2 i 3]. W pracy [1] sformułowano zagadnienia optymalnego rozkładu materiałów konstrukcyjnych w ustrojach siatkowych; w pracach [2 i 3] podano ogólne warunki kształtowania siatek prętowych i optymalnego rozkładu materiałów.

Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie zagadnienia optymalizacji, sformułowanego w pracach [1, 2, 3] w odniesieniu do ustrojów płaskich pracujących w stanie kołowej symetrii. Przebieg obliczeń przedstawiono na przykładzie rusztów pierścieniowych o dwuteowych przekrojach poprzecznych prętów siatki. Poniższe rozważania oparto na liniowej teorii ośrodków włóknistych przedstawionej przez Cz. WOŹNIAKA w pracach [9, 10 i 11].

2. GEOMETRIA RUSZTÓW BIEGUNOWYCH

Przedmiotem rozważań pracy są gęste, płaskie ruszty pierścieniowe o biegunowej siatce prętów (rys. 1). Siatka rusztów składa się z dwóch rodzin prętów, oznaczonych symbolem $\Delta=I, II$, o długościach segmentów l . Pręty należące do różnych rodzin łączą się w sztywnych węzłach. Segmenty prętów są przyrządzone o głównych osiach bezwładności przekrojów poprzecznych odpowiednio równoległych i prostopadłych do płaszczyzny rusztu. Geometrię siatki prętowej opisują wektory kierunkowe \mathbf{T} i \mathbf{D} przedstawione na rys. 1, przy czym kierunek $\Delta=I$ jest kierunkiem pro-



Rys. 1

mieniowym, a kierunek $\Delta = \Pi$ obwodowym. Składowe kontrawariantne tych wektorów w układzie współrzędnych biegunowych ρ, φ są następujące (por. np. [11]):

$$(2.1) \quad \begin{array}{cccc} T^{\rho} = 1, & T^{\varphi} = 0, & T^{\rho} = 0, & T^{\varphi} = \rho^{-1}, \\ \text{I} & \text{I} & \text{II} & \text{II} \\ D^{\rho} = 0, & D^{\varphi} = \rho^{-1}, & D^{\rho} = -1, & D^{\varphi} = 0. \\ \text{I} & \text{I} & \text{II} & \text{II} \end{array}$$

3. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

W punkcie tym zestawiono według prac [2, 3 i 11] podstawowe równania rusztu biegunowego. Przy zapisie zastosowano symbolikę wprowadzoną w tych pracach.

Równania geometryczne płaskiego ustroju siatkowego w układzie współrzędnych biegunowych ρ, φ przy uwzględnieniu warunków kołowej symetrii w postaci

$$u_{\rho} = 0, \quad u_{\varphi, \varphi} = w_{, \varphi} = 0$$

przedstawimy następująco:

$$(3.1) \quad \begin{array}{l} \kappa_{\rho\rho} = \kappa_{\varphi\varphi} = 0, \\ \kappa_{\rho\varphi} = u_{\varphi, \rho} - \rho^{-1} u_{\varphi}, \quad \kappa_{\varphi\rho} = -\rho^{-1} u_{\varphi}, \\ \gamma_{\rho} = w_{, \rho} + \rho^{-1} u_{\varphi}, \quad \gamma_{\varphi} = 0, \end{array}$$

gdzie $\kappa_{\alpha\beta}$ i γ_{α} ($\alpha, \beta = \rho, \varphi$) są składowymi stanu odkształcenia.

Równania równowagi rusztu we współrzędnych biegunowych, po uwzględnieniu równości

$$m^{\alpha\beta}_{, \varphi} = p^{\alpha}_{, \varphi} = 0,$$

gdzie $m^{\alpha\beta}$ jest tensorem napięć momentowych, a p^{α} wektorem napięć tnących ($\alpha, \beta = \rho, \varphi$), mają postać

$$(3.2) \quad \begin{array}{l} p^{\rho}_{, \rho} + \rho^{-1} p^{\rho} + f = 0, \\ m^{\rho\rho}_{, \rho} + \rho^{-1} m^{\rho\rho} - \rho m^{\varphi\varphi} + \rho p^{\varphi} + h^{\rho} = 0, \\ m^{\rho\varphi}_{, \rho} + 2\rho^{-1} m^{\rho\varphi} + \rho^{-1} m^{\varphi\rho} - \rho^{-1} p^{\rho} + h^{\varphi} = 0. \end{array}$$

Związki fizyczne ustroju są następujące:

$$(3.3) \quad p^\alpha = A^{\alpha\beta} \gamma_\beta, \quad m^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\nu\mu} \kappa_{\nu\mu}.$$

Symbole $A^{\alpha\beta}$ i $C^{\alpha\beta\nu\mu}$ oznaczają składowe tensorów sztywności sprężystej (por. np. [3,11]).

Związki (3.3) po obliczeniu wartości tensorów sztywności sprężystej i uwzględnieniu wzorów (3.1) przyjmują postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} m^{\rho\rho} &= m^{\varphi\varphi} = 0; \\ m^{\rho\varphi} &= \rho^{-2} S \underset{I}{\kappa}_{\rho\varphi}, \quad m^{\varphi\rho} = \rho^{-2} S \underset{II}{\kappa}_{\varphi\rho}, \\ p^\rho &= R \underset{I}{\gamma}_\rho, \quad p^\varphi = 0. \end{aligned}$$

W powyższych równościach wprowadzono następujące oznaczenia: S oznacza gęstość sztywności giętej segmentu pręta Δ

$$S = E J \frac{1}{\underset{\Delta}{\Delta} \underset{\Delta}{\Delta} \underset{\Delta}{\Delta} \underset{\Delta}{l} \underset{\Sigma}{\Sigma}} \quad (\Delta, \Sigma = I, II, \Delta \neq \Sigma);$$

R gęstość sztywności na odkształcenia postaciowe pręta Δ

$$R = \frac{E J}{\underset{\Delta}{\Delta} \underset{\Delta}{\Delta} \underset{\Delta}{\Delta} \underset{\Delta}{l} \underset{\Sigma}{\Sigma}} \frac{1}{I^2 (1 + 12 \rho)},$$

E moduł sprężystości Younga, J główny moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta oraz ρ współczynnik liczbowy określający wpływ sił poprzecznych na odkształcenia segmentu pręta [2].

Po uwzględnieniu (3.4)_{1,5} równania równowagi (3.2) sprowadzają się do postaci

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (pp^\rho)_{,\rho} &= -\rho f, \\ (\rho^2 m^{\rho\varphi})_{,\rho} + \rho m^{\varphi\rho} - \rho p^\rho + \rho^2 h^\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Stan deformacji dowolnego segmentu pręta Δ opisują odkształcenia φ i e .

W układzie współrzędnych biegunowych ρ, φ , po uwzględnieniu kołowej symetrii oraz (2.1), otrzymamy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \varphi &= \rho^{-1} (u_{\varphi,\rho} - \rho^{-1} u_\varphi), & \varphi &= \rho^{-2} u_\varphi, \\ e &= w_{,\rho} + \rho^{-1} u_\varphi, & e &= 0. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach φ określa jednostkowy przyrost kątów wygięcia osi podłużnej Δ segmentu pręta Δ w jego głównej płaszczyźnie bezwładności prostopadłej do płaszczyzny rusztu, e średnią wartość kątów, które tworzą w końcach segmentu Δ

pręta Δ rzuty cięciwy tego segmentu na główną płaszczyznę bezwładności ze stycznymi do jego osi podłużnej w stanie odkształconym.

Stan naprężenia w pręcie Δ określają gęstości sił wewnętrznych zaczepionych w przekrojach środkowych segmentów prętów:

$$(3.7) \quad P = T_{\alpha} P^{\alpha}, \quad M = T_{\alpha} D_{\beta} m^{\alpha\beta}.$$

Równania (3.7) po podstawieniu składowych kowariantnych wektorów T i D przyjmują postać

$$(3.8) \quad \begin{aligned} P &= p^{\rho}, & P &= 0, \\ M &= \rho m^{\rho\sigma}, & M &= -\rho m^{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Pomiędzy składowymi stanu deformacji (3.6) i składowymi stanu naprężenia (3.8) dowolnego segmentu pręta Δ zachodzą następujące związki:

$$(3.9) \quad P = R e, \quad M = S \varphi.$$

4. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA OPTIMALIZACJI

W niniejszej pracy zajęto się określeniem optymalnego rozkładu materiałów konstrukcyjnych w ruszcie pierścieniowym o danych kierunkach siatki prętowej. Oznacza to, że poszukujemy takiego rozkładu materiałów konstrukcyjnych, przy którym energia odkształceń sprężystych U ustroju osiąga minimum. Takie sformułowanie zagadnienia optymalizacji w odniesieniu do ustrojów siatkowych zaproponowano po raz pierwszy w pracy [1]. Opierając się na rozważaniach przedstawionych w pracach [1, 2, 3 i 4] znajdujemy, że energia $U = \min$, gdy spełnione są następujące warunki:

$$(4.1) \quad \delta U = -\frac{1}{2} \Sigma \int_{\Delta} \Delta \mathcal{A} [R' e^2 + S' \varphi^2] d\Omega = 0,$$

$$(4.2) \quad \delta^2 U = -\frac{1}{4} \Sigma \int_{\Delta} \Delta \mathcal{A}^2 [R'' e^2 + S'' \varphi^2] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Delta} Q^2 d\Omega > 0.$$

We wzorach tych $\mathcal{A} = A/l$ oznacza funkcję gęstości rozkładu materiałów, A pole przekroju poprzecznego pręta Δ , Ω obszar rusztu, $\Delta \mathcal{A} = \overset{\circ}{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$ różnicę funkcji gęstości rozkładu materiałów w dowolnej płycie $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$ i analogicznej funkcji w płycie optymalnej \mathcal{A} ;

$$Q^2 = \Sigma [R(\overset{\circ}{T}^{\alpha} \Delta \gamma_{\alpha})^2 + S(\overset{\circ}{T}^{\alpha} D^{\beta} \Delta \kappa_{\alpha\beta})^2],$$

$$(\)' = \frac{d(\)}{d\mathcal{A}}, \quad (\)'' = \frac{d^2(\)}{d\mathcal{A}^2}.$$

przy czym $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha)$ traktujemy jako funkcję jednej zmiennej, gdzie α oznacza dowolny parametr określający kształt przekroju poprzecznego pręta Δ (por. [4]).

Równanie (4.1) jest warunkiem koniecznym, a nierówność (4.2) warunkiem dostatecznym optymalności. Warunki te muszą być spełnione przy dowolnych wartościach $\Delta \mathcal{A}$. Powinien również być spełniony warunek

$$\Delta V = \int_{\Delta} \Delta \mathcal{A} d\Omega = 0,$$

wynikający z założenia stałej objętości V materiału konstrukcyjnego poszczególnych rodzin prętów.

Przy tych założeniach warunek konieczny możemy przedstawić w postaci

$$(4.3) \quad \begin{matrix} R' & e^2 & + & S' & \varphi^2 & = & C = \text{const}, & S' & \varphi^2 & = & C = \text{const}, \\ \text{I} & \text{I} & & \text{I} & \text{I} & & \text{I} & \text{II} & \text{II} & & \text{II} \end{matrix}$$

a warunek dostateczny w postaci

$$(4.4) \quad \begin{matrix} -R'' & e^2 & - & S'' & \varphi^2 & \geq 0, & -S'' & \varphi^2 & \geq 0. \\ \text{I} & \text{I} & & \text{I} & \text{I} & & \text{II} & \text{II} & \end{matrix}$$

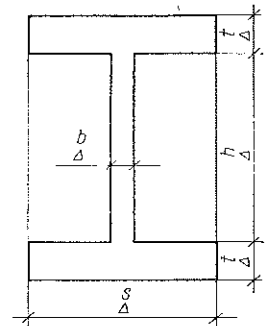
Związki geometryczne (3.1), równania równowagi (3.5), związki fizyczne (3.4) oraz warunki optymalności (4.3) i (4.4) stanowią podstawowy układ równań zagadnienia optymalizacji.

5. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA OPTIMALIZACJI

W punkcie tym przedstawimy rozwiązanie problemu optymalnego rozkładu materiałów w pierścieniowych rusztach biegunowych. Rozważania tego paragrafu przeprowadzimy w odniesieniu do rusztów, których pręty są skonstruowane z belek o przekrojach dwuteowych. Przekroje poprzeczne tych belek przedstawiono na rys. 2. W związku z przyjętymi oznaczeniami oraz wobec założenia $h \approx h + 2t$, spełnione są następujące wzory:

$$A = A_p + A_s = 2ts + bh,$$

$$J = J_p + J_s = \frac{1}{2} ts(h)^2 + \frac{1}{12} b(h)^3.$$



Rys. 2

W dalszych rozważaniach zastosowano uproszczony schemat obliczeniowy prętów. Przyjęto mianowicie, że siły poprzeczne przenoszone są jedynie przez środki prętów promieniowych o polu przekroju A_s , a momenty zginające wyłącznie przez półki o polach przekrojów A_p, A_p . Przy tym założeniu wzory na występujące w dalszych obliczeniach gęstości sztywności mają postać:

$$(5.1) \quad R = \frac{1}{12} \frac{Eh^2}{I^2 + 2(1+\nu)h^2} \mathcal{A}_s, \quad S = \frac{1}{4} E h^2 \mathcal{A}_p,$$

gdzie

$$\rho = 2(1+\nu) \kappa \frac{1}{l^2} \frac{J_s}{\mathcal{A}_s}$$

oraz gdzie ν oznacza współczynnik Poissona, κ współczynnik charakteryzujący kształt przekroju poprzecznego pręta Δ ; w obliczeniach przyjęto $\kappa=1$ [8].

Warunki optymalności (4.3) i (4.4) wyprowadzone zostały przy założeniu, że każdy samodzielnie pracujący przekrój zależy od jednego tylko parametru szczegółowego, określającego kształt tego przekroju, obranego jako parametr optymalizacji. Przyjmując, że wymiar b jest parametrem optymalizacji ze względu na siły poprzeczne, a wymiar t jest parametrem optymalizacji ze względu na momenty zginające, znajdujemy pochodne sztywności:

$$R' = \frac{dR}{d\mathcal{A}_s} = \frac{l}{h} \frac{dR}{db} = \frac{1}{12} \frac{E h^2}{l^2 + 2(1+\nu)h^2}, \quad R'' = 0,$$

$$S' = \frac{dS}{d\mathcal{A}_p} = \frac{l}{2s} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{4} E h^2, \quad S'' = 0.$$

Wstawiając otrzymane wyrażenia do warunków optymalności, zauważamy, że warunek dostateczny (4.4) jest spełniony tożsamościowo, a warunek konieczny (4.3) przyjmuje postać

$$(5.2) \quad \frac{1}{12} \frac{E h^2}{l^2 + 2(1+\nu)h^2} e^2 + \frac{1}{4} E h^2 \varphi^2 = C = \text{const},$$

$$\frac{1}{4} E h^2 \varphi^2 = C = \text{const}.$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy następujące założenia: 1) wszystkie pręty wykonane są z jednakowego materiału konstrukcyjnego, 2) wysokość h wszystkich prętów jest stała, jednakowa i wynosi H , 3) długość L prętów promieniowych jest stała, jednakowa i wynosi L . Przy tych założeniach, na podstawie warunku (5.2)_z znajdujemy

$$(5.3) \quad \varphi^2 = \frac{4C}{EH^2} = \text{const}.$$

Oznaczając przez $\hat{\varepsilon}$ jednostkowe, liniowe odkształcenia dolnych włókien prętów Δ , a przez ε dopuszczalne wydłużenia jednostkowe tych włókien, możemy φ wyrazić za pomocą wzoru

$$(5.4) \quad \varphi_{II} = -\frac{2\hat{\varepsilon}}{H} = -\frac{2\varepsilon \operatorname{sign} \hat{\varepsilon}_{II}}{H}.$$

Z (5.3) i (5.4) znajdujemy stałą:

$$C_{II} = E\varepsilon^2.$$

Przyrównując prawe strony (3.6)₂ i (5.4) otrzymujemy

$$(5.5) \quad u_{\varphi} = -\rho^2 \frac{2\varepsilon \operatorname{sign} \hat{\varepsilon}_{II}}{H},$$

skąd po uwzględnieniu (3.6)₁ mamy

$$(5.6) \quad \varphi_{I} = -\frac{2\varepsilon \operatorname{sign} \hat{\varepsilon}_{II}}{H} = \varphi_{II}.$$

Wyrażając φ jako funkcję $\hat{\varepsilon}$ znajdujemy

$$\operatorname{sign} \hat{\varepsilon}_{I} = \operatorname{sign} \hat{\varepsilon}_{II}.$$

Po podstawieniu (5.6) do warunku (5.2)₁ i po wprowadzeniu oznaczeń

$$\Phi = \frac{1}{12} \frac{EH^2}{L^2 + 2(1+\nu)H^2}, \quad \bar{C}_{I} = \sqrt{\frac{C - E\varepsilon^2}{\Phi}}$$

na podstawie (3.6)₃ i (5.5) mamy

$$e_{I} = w_{,\rho} - \rho \frac{2\varepsilon \operatorname{sign} \hat{\varepsilon}_{II}}{H} = \bar{C}_{I}.$$

Po scałkowaniu powyższego równania otrzymujemy postać funkcji ugięcia rusztu w zależności od dwóch stałych:

$$(5.7) \quad w = \frac{\varepsilon \operatorname{sign} \hat{\varepsilon}_{II}}{H} \rho^2 + \bar{C}_{I} \rho + A,$$

Rozpatrzmy z kolei równania równowagi (3.5). Uwzględniając związki (3.1), (3.4) i (5.1) można równania (3.5) przedstawić w postaci

$$(5.8) \quad \Phi \bar{C}_{I} \mathcal{A}_{sI} = \frac{1}{\rho} \left(B - \frac{f\rho^2}{2} \right),$$

$$(\rho \mathcal{A}_{\rho})_{,\rho} - \mathcal{A}_{\rho II} = \frac{-2}{EH\varepsilon \operatorname{sign} \hat{\varepsilon}_{II}} \left(B - \frac{f\rho^2}{2} \right),$$

gdzie B jest stałą całkowania.

Układ równań (5.8) oraz równanie (5.7) rozwiążemy w dwóch przypadkach podparcia rusztu przy $f = -q = \text{const}$.

5.1. *Ruszt swobodnie podparty na zewnętrznym brzegu*

Przyjmując oznaczenia wg rys. 3a znajdziemy warunki brzegowe dla układu (5.8) w postaci

$$p^p(r) = 0, \quad m^{p\varphi}(r) = m^{p\varphi}(r_1) = 0,$$

skąd wobec (3.1) i (3.4) mamy

$$(5.9) \quad \mathcal{A}_s(r) = 0, \quad \mathcal{A}_p(r) = \mathcal{A}_p(r_1) = 0.$$

Warunek brzegowy dla równania (5.7) jest następujący:

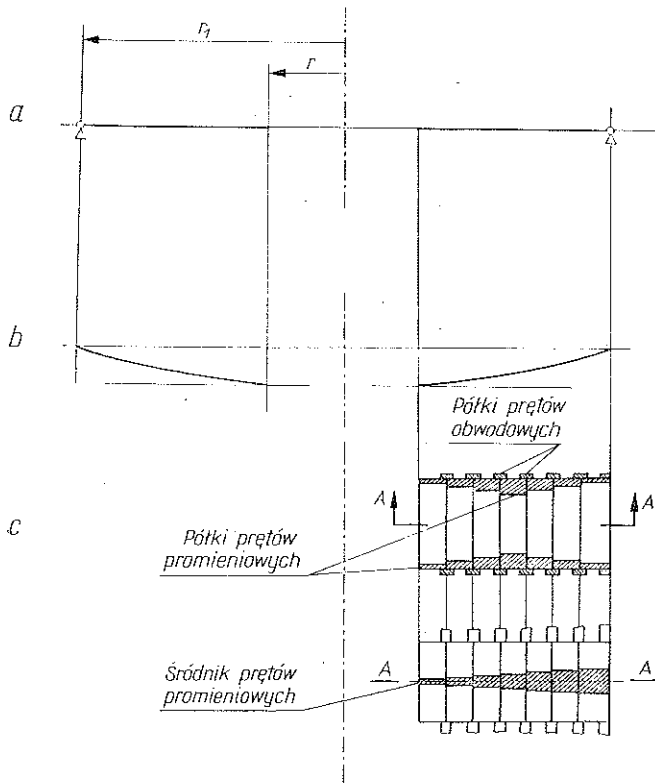
$$(5.10) \quad w(r_1) = 0.$$

Ze związków (5.8)₁ i (5.9)₁ znajdujemy stałą:

$$B = -\frac{qr^2}{2}.$$

Wprowadzając dodatkowy warunek maksymalnego wykorzystania materiału w średnicach prętów promieniowych w postaci

$$p^p(r_1) = \tau \mathcal{A}_s(r_1),$$



Rys. 3

gdzie τ oznacza dopuszczalne naprężenia ścinające materiału środników, otrzymujemy

$$\bar{C}_I = \frac{\tau}{\Phi}.$$

Wstawiając otrzymane stałe do (5.8)₁ dostajemy funkcję gęstości rozkładu materiału w środnikach prętów promieniowych:

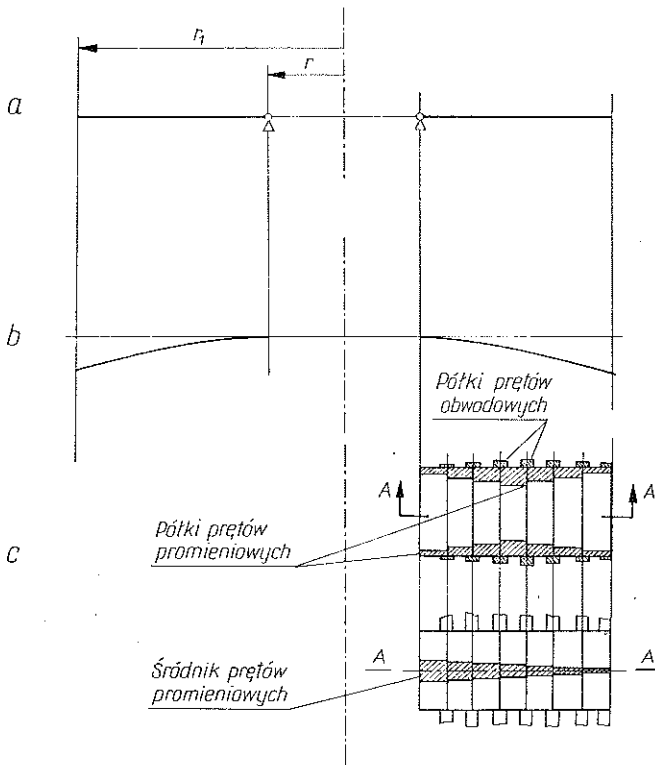
$$(5.11) \quad \mathcal{A}_{sI} = \frac{1}{\tau} \frac{q}{2\rho} (\rho^2 - r^2).$$

W równaniu (5.8)₂ występują dwie funkcje niewiadome \mathcal{A}_{pI} i \mathcal{A}_{pII} . Pozwala to na dowolny wybór postaci jednej z nich pod warunkiem spełnienia (5.9)₂ oraz nierówności $\mathcal{A}_{pI} > 0$, $\mathcal{A}_{pII} > 0$ dla każdego ρ . W rozpatrywanym przypadku podparcia rusztu powyższe warunki spełnimy przyjmując

$$\mathcal{A}_{pII} = \text{const},$$

co po podstawieniu do (5.8)₂ i wobec (5.9)₂ prowadzi do

$$\int_r^{r_1} \left[\mathcal{A}_{pII} - \frac{q}{E H \varepsilon \text{sign } \hat{\varepsilon}} (\rho^2 - r^2) \right] d\rho = 0.$$



Rys. 4

Po wykonaniu całkowania znajdujemy funkcję gęstości rozkładu materiału w półkach prętów obwodowych:

$$(5.12) \quad \mathcal{A}_{p, \text{II}} = \frac{q}{3EH\varepsilon} [r_1(r_1+r) - 2r],$$

przy czym $\text{sign } \hat{\varepsilon} = 1$.

Podstawiając (5.12) do równania (5.8)₂ otrzymujemy po rozwiązaniu funkcję gęstości rozkładu materiału w półkach prętów promieniowych:

$$(5.13) \quad \mathcal{A}_{p, \text{I}} = \frac{q}{3EH\varepsilon} \left[r_1^2 + r_1 r + r^2 - \rho^2 - \frac{r_1 r}{\rho} (r_1 + r) \right].$$

Funkcje (5.11), (5.12) i (5.13) określają gęstość rozkładu materiału w obszarze płyty. Przyjmując zgodnie z założeniami stałe przekroje segmentów prętów rusztu, określamy na podstawie funkcji gęstości rozkładu materiału poszukiwane parametry optymalizacji. Rys. 3c ilustruje schematyczny wykres zmian pola przekroju prętów promieniowych.

Ugięcia rusztu podpartego na obwodzie zewnętrznym opisuje funkcja (5.7), która po podstawieniu wartości stałych przyjmuje postać

$$(5.14) \quad w = -\frac{\varepsilon}{H} (r_1^2 - \rho^2) - \frac{\tau}{\Phi} (r_1 - \rho).$$

Linie ugięcia ustroju przedstawiono na rys. 3b.

5.2. Ruszt swobodnie podparty na wewnętrznym brzegu.

W przypadku rusztu przedstawionego na rys. 4a warunek brzegowy ze względu na siły poprzeczne ma postać

$$p^o(r_1) = 0,$$

co daje

$$\mathcal{A}_s(r_1) = 0.$$

Przeprowadzając obliczenia analogiczne do przedstawionych w p. 5.1. i po przyjęciu warunku

$$p^o(r) = -\tau \mathcal{A}_s(r),$$

znajdujemy funkcje gęstości rozkładu materiału w środkach prętów promieniowych:

$$(5.15) \quad \mathcal{A}_s = \frac{1}{\tau} \frac{q}{2\rho} (r_1^2 - \rho^2).$$

Aby określić pozostałe funkcje gęstości, przyjmiemy

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p + C,$$

gdzie $C = \text{const}$. Biorąc pod uwagę ten związek w równaniu (5.8)₂ otrzymujemy po uwzględnieniu (5.9)₂

$$(5.16) \quad \mathcal{A}_I \rho = \frac{q}{EH\epsilon} \frac{1}{2 \ln r_1/r} (r_1^2 \ln \rho/r + r^2 \ln r_1/\rho - \rho^2 \ln r_1/r),$$

$$(5.17) \quad \mathcal{A}_{II} \rho = \frac{q}{EH\epsilon} \frac{1}{2 \ln r_1/r} [r_1^2 (\ln \rho/r + 2 \ln r_1/r - 1) + r^2 (\ln r_1/\rho + 1) - \rho^2 \ln r_1/r]$$

przy $\text{sign } \hat{\epsilon} = -1$.

Funkcje (5.15), (5.16) i (5.17) określające gęstość rozkładu materiału w obszarze płyty stanowią rozwiązanie problemu optymalizacji. Schematyczny wykres zmian pól przekrojów prętów pokazano na rys. 4c.

Ugięcia tego rusztu określa funkcja

$$(5.18) \quad w = -\frac{\epsilon}{H} (\rho^2 - r^2) - \frac{\tau}{\Phi} (\rho - r),$$

której wykres przedstawiono na rys. 4b.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Przeprowadzona w pracy analiza prowadzi do wniosków:

a) Funkcje przesunięć $w(\rho)$ i obrotów $u_\phi(\rho)$ węzłów nie zależą od sposobu obciążeń i ich wielkości. Funkcję w i u_ϕ można zmieniać dobierając odpowiednio wymiary l i h .

b) W rozpatrzonych przykładach określono zmienne skokowo przekroje środków prętów promieniowych i przekroje półek w obu rodzinach prętów. W ramach przyjętych założeń średniki prętów obwodowych nie przenoszą żadnych sił wewnętrznych. O wielkości pola przekroju tych elementów decydują zatem jedynie wymagania konstrukcyjne.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. DZIENISZEWSKI, *Optimum distribution of materials in the fibrous bodies*, Bul. A.P.S., 8, 1970 Warszawa.
2. W. DZIENISZEWSKI, *Optimization of lattice rod structures*, Arch. Mech. Stos., 2, 1971.
3. W. DZIENISZEWSKI, *Optimization of elastic lattice structures designed on a prescribed surface*, Arch. Mech. Stos., 5, 1971.
4. J. GIERLIŃSKI, *O warunkach koniecznych i dostatecznych optymalizacji sprężystych płyt siatkowych na minimum odkształcalności*, Rozpr. Inżyn., 4, 1973.
5. W. GUTKOWSKI, J. BAUER, *On the analysis of polar lattice plates*, I.J.M.S., 12, 1970, London.
6. S. KONIECZNY, *O zastosowaniu teorii osrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych*, Arch. Inżyn. Łódow., 1, 1967.
7. M. KWIECIŃSKI, M. KLEIBER, *Limit load of polar grids treated as plane fibrous bodies*, Arch. Inżyn. Łódow., 2, 1971.

8. W. WIERZBICKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1961.
9. Cz. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media*, Arch. Mech. Stos., 5, 6, 1965.
10. Cz. WOŹNIAK, *Modele ciągłe gęstych siatek prętowych*, Arch. Inżyn. Ładow., 2, 1965.
11. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА В ПОЛЯРНЫХ КОЛОСНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

В работе рассмотрена задача об оптимизации полярных колосниковых систем с точки зрения минимальной деформируемости под данной нагрузкой. Рассуждения относятся к сооружениям, состоящим из густых и регулярных стержневых сеток, образуемых двумя семействами стержней. Параметрами оптимизации являются функции, определяющие распределение конструкционного материала. Условия оптимизации записаны в полярной системе координат, с учетом вращательной симметрии задачи. Решение задачи иллюстрируется на примере кольцевого колосника, построенного из балок типа сэндвич.

SUMMARY

OPTIMAL DISTRIBUTION OF MATERIALS IN POLAR GRIDWORKS

The papers deals with the problem of optimization of polar gridworks from the point of view of their minimum deformability under prescribed loads. The considerations concern systems constructed of dense, regular rod lattices formed by two families of rods. Optimization parameters are the functions which describe the distribution of structural materials. The optimization condition is written in a polar coordinate system, rotational symmetry of the problem being taken into account. An example of solution concerns an annular gridwork constructed of sandwich beams.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 maja 1973 r.
