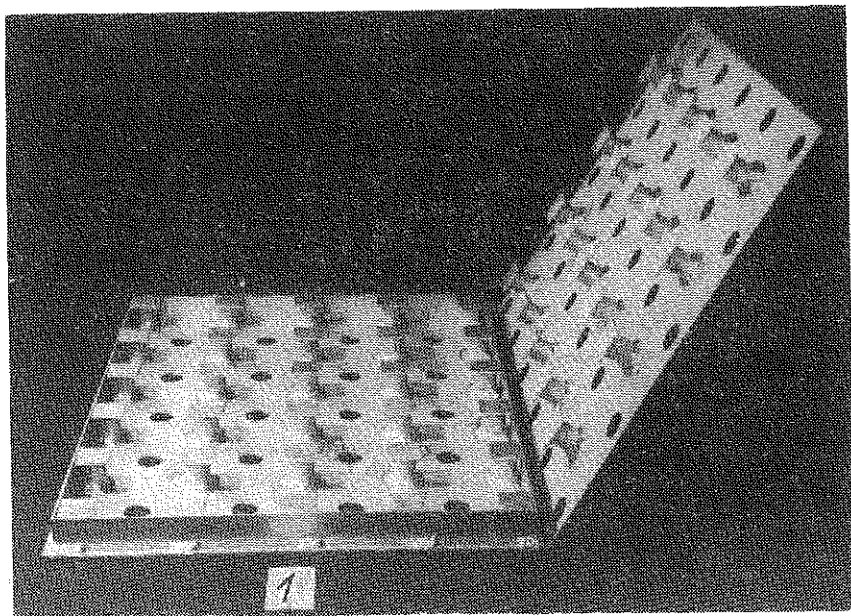


METALOWA PŁYTA WARSTWOWA Z WYPEŁNIACZEM SZKIELETOWYM

HENRYK BOROCH i JÓZEF KANIA (WROCLAW)

1. WSTĘP

W pracy przedstawiono wyniki badań modelowych oraz model matematyczny płyty warstwowej z wypełniaczem nieciągłym. Rozpatrujemy płytę powstałą przez połączenie spoinami dwóch metalowych płytów zewnętrznych za pomocą elementów



Rys. 1. Struktura wnętrza płyty przed scaleniem płytów ze sobą

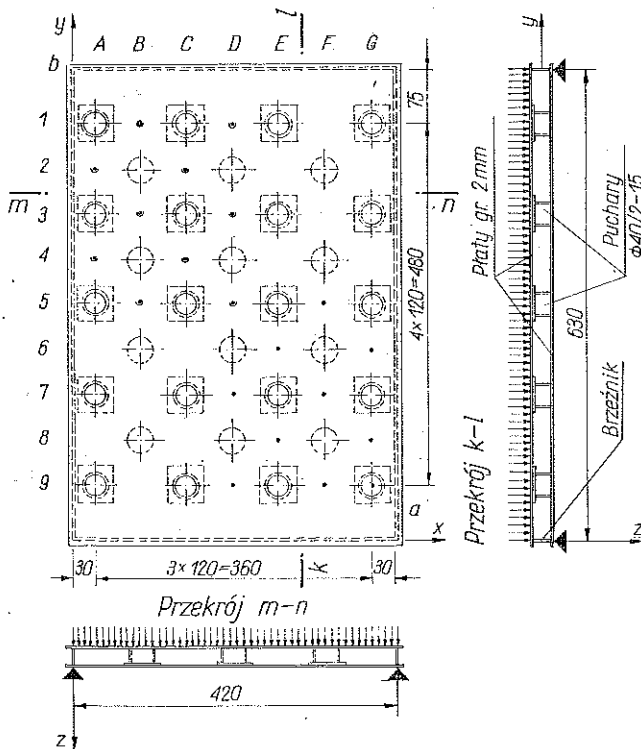
konstrukcyjnych, którymi są zasklepione płytkami odcinki rur (rys. 1). Brzegi płytów zewnętrznych są połączone za pomocą brzeźników. Płyta ta wyróżnia się prostym procesem technologicznym wykonania i jednocześnie przewyższa płyty z wypełniaczem ciągłym pod względem wytrzymałości, między innymi na naprężenia styczne, występujące pomiędzy płytami a wypełniaczem. Naprężenia te powodują najczęściej zniszczenie płyty z wypełniaczem ciągłym [1]. Przedstawiona konstrukcja metalowej płyty warstwowej może pracować na obciążenie użytkowe wielokrotnie przewyższające jej ciężar własny. Zastosowanie pierwszych prototypów potwierdziło celowość realizacji tego rodzaju płyt ze względu na dużą ich sztywność, a także

na wydatnie mniejszy ciężar własny w porównaniu do rozwiązań tradycyjnych. Zasadniczą trudnością, na jaką napotyka się przy teoretycznym rozwiązywaniu zagadnienia zginania tych płyt, jest określenie ich sztywności. Wykonane badania modelowe dostarczyły niezbędnych informacji do sformułowania założeń potrzebnych przy opracowaniu modelu matematycznego takiej płyty.

2. BADANIA MODELOWE

Zasadniczym celem badań modelowych płyty o przedstawionej konstrukcji było zapoznanie się z charakterem jej pracy i wykrycie elementów najbardziej wyężonych. Badaniom poddano modele płyt o stosunku boków $b: a = 1,0$ i $1,5$; wykonano je

- lokalizacja czujników zegarowych 0,01 mm na p.g.
- lokalizacja czujników zegarowych 0,01 mm na p.d.

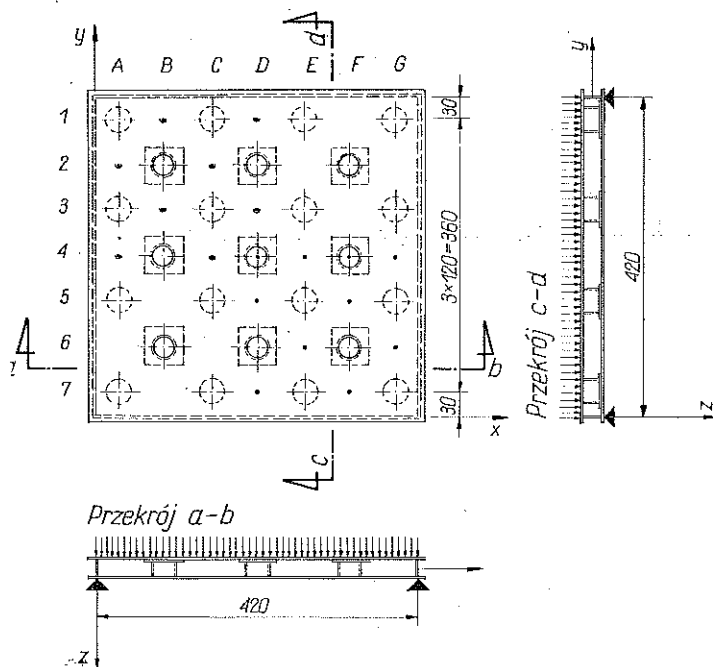


Rys. 2. Rozmieszczenie punktów pomiarowych ugięcia płyt metalowej płyty warstwowej pod obciążeniem równomiernie rozłożonym

ze stopu aluminium PA2 o grubości blach 2 mm. Inne szczegóły konstrukcyjne modeli uwidoczniono na rysunkach 2 i 3. Połączenia elementów płyt kwadratowych wykonano techniką klejową, natomiast dla płyt prostokątnych stosowano spawanie automatem w osłonie argonu. Obciążenie płyt równomiernie rozłożone realizowano

za pomocą wody przy zastosowaniu wanny o dnie z folii plastikowej, przekazującym ciężar wody bezpośrednio na badany model płyty (rys. 4). Pod ciśnieniem wody płyta wyginała się wypukłością ku dołowi, a przemieszczenia $w(x, y)$ mierzone

- lokalizacja czujników zegarowych 0,01 mm na p.g
- lokalizacja czujników zegarowych 0,01 mm na p.d.

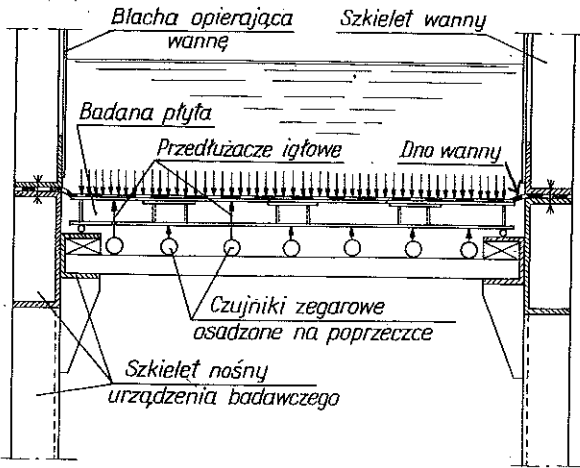


Rys. 3. Rozmieszczenie punktów pomiarowych ugięcia płyt metalowej płyty warstwowej obciążonej ciężarem równomiernie rozłożonym

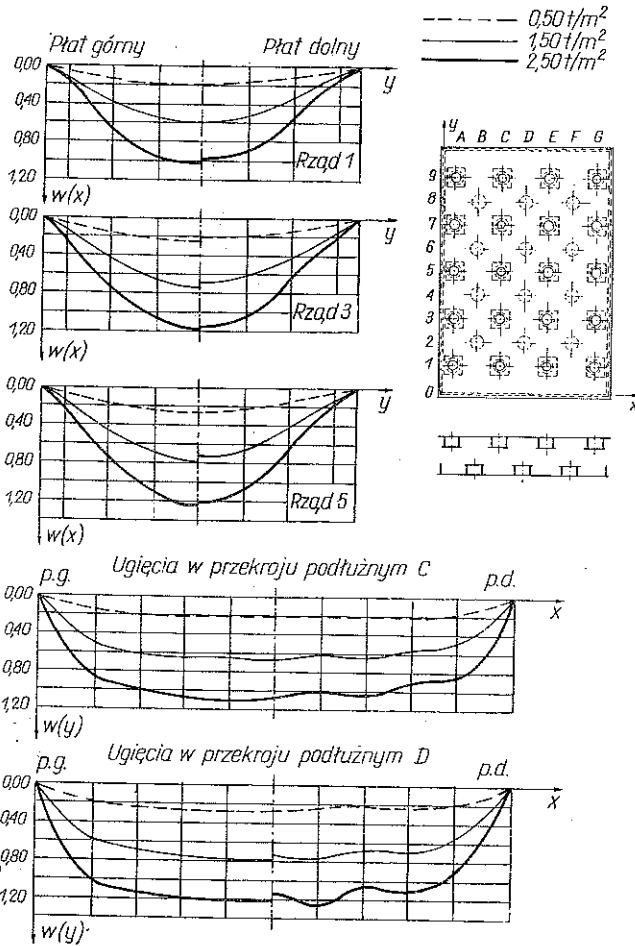
były czujnikami zegarowymi. Ten rodzaj urządzenia obciążającego uznano za celowy ze względu na

- niskie koszty wykonania we własnym zakresie,
- zapewnienie dużej dokładności pomiaru przykładanych obciążeń,
- duży stopień bezpieczeństwa podczas prowadzenia pomiarów przy bardzo dużych obciążeniach.

Dla płyt warstwowych z wypełniaczem ciągłym ugięcie jednego z płatów utożsamiane bywa z ugięciem całej płyty dla wszystkich punktów wewnątrz jej obszaru [1]. Założenie to budziło wątpliwość autorów w odniesieniu do płyty o przedstawionej konstrukcji, oczywiście z wyjątkiem miejsc połączenia płatów ze sobą za pomocą elementów wypełniacza. Mimo trudności wynikających ze specyficznej konstrukcji płyty i urządzenia obciążającego dokonano nie tylko obserwacji zewnętrznych, ale wnikięto również do wnętrza płyty. W tym celu pomiar ugięcia obu płatów metalowej płyty warstwowej przeprowadzono w dwu etapach wykorzystując sy-

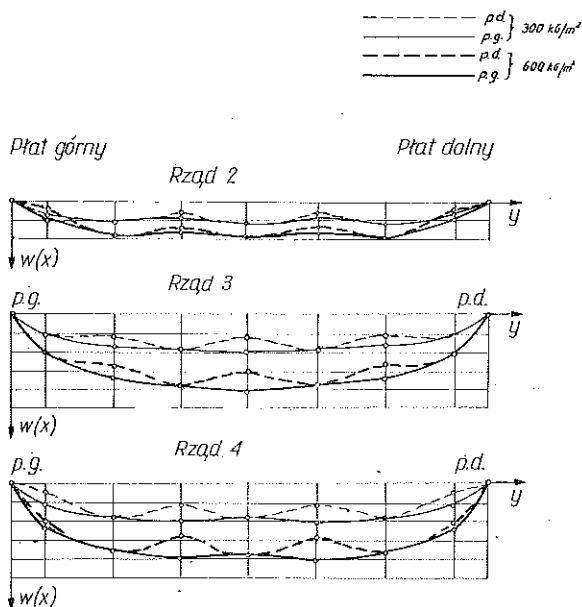


Rys. 4. Przekrój poprzeczny przez urządzenie obciążające badaną płytę



Rys. 5. Ugięcia płyty prostokątnej

metrię konstrukcji i obciążenia płyty. W pierwszym etapie zmierzono ugięcia płyta dolnego czujnikami zegarowymi, umieszczonymi na dwóch przeciwległych ćwiartkach płyty w osiach pucharów⁽¹⁾ i w środku poletek pomiędzy nimi. Takie rozmieszczenie czujników miało na celu sprawdzenie ułożyskowania płyty na jej obwodzie oraz kontrolę odczytów dla pierwszego i drugiego etapu pomiarów.



Rys. 6. Ugięcia płyty kwadratowej

Po rejestracji odczytów na czujnikach dla określonej serii obciążeń i odciążań w zakresie sprężystych odkształceń płyty usunięto z niej obciążenie i przyrządy pomiarowe. Następnie na jednej z ćwiartek płyta pomiarowego nawiercono małe otworki w miejscach uprzedniego przyłożenia czujników. Przez te otworki w płacie dolnym doprowadzono do styku z wewnętrzną powierzchnią płyta górnego przedłużacze igłowe przymocowane do czujników zegarowych. Tak więc w drugim etapie pomiarów możliwa była równoczesna obserwacja i rejestracja ugięć płyta dolnego i górnego. Stosując w drugim etapie badań te same parametry obciążeń i odciążań, stwierdzono:

a) niemal te same ugięcia w obszarze ćwiartki pomiarowej płyta dolnego, tzn. zarówno dla punktów pomiarowych nad pucharami jak i w środku poletek pomiędzy pucharami;

b) wyraźne różnice w ugięciach płyta górnego w porównaniu do ugięć płyta dolnego w ośrodku poletek pomiędzy pucharami;

c) zgodność ugięć płyta górnego i dolnego zmierzonych czujnikami umieszczonymi w osi pucharów na płacie górnym i dolnym.

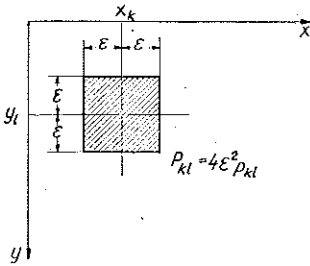
Wyniki pomiarów ugięć dla płyt kwadratowej i prostokątnej przedstawiono na rysunkach 5 i 6.

(1) Zasklepione z jednej strony płytkami odcinki rur będziemy nazywali pucharami.

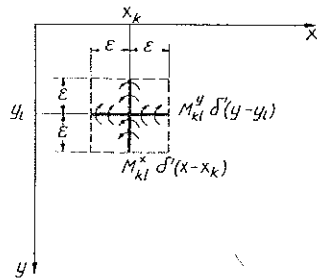
2. OBLICZENIA STATYCZNE PŁYTY WARSTWOWEJ Z WYPEŁNIACZEM NIECIĄGŁYM

W tym punkcie zajmiemy się obliczeniami statycznymi płyty warstwowej z wypełniaczem nieciągłym. Rozpatrujemy płytę warstwową powstałą przez monolityczne połączenie dwóch płyt za pomocą elementów konstrukcyjnych, które w dalszym ciągu będziemy nazywali elementami wypełniacza. Elementami tymi mogą być odcinki prętów o przekroju kołowym lub kwadratowym. Obliczenia przeprowadzone dla tych elementów mogą być także wykorzystane do obliczeń płyty warstwowej, powstałej przez połączenie spoinami dwóch metalowych płyt zewnętrznych za pomocą (zasklepionych płytkami) odcinków rur. Brzegi płyt zewnętrznych płyty warstwowej mogą być połączone ze sobą za pomocą tak zwanego brzeźnika na kilka sposobów. Będziemy rozróżniali bezmomentowe, sprężyste i sztywne zamocowanie brzegów płyt.

Opracowanie modelu matematycznego płyty warstwowej z wypełniaczem nieciągłym nastrocza dużo większe trudności niż opracowanie modelu matematycznego płyty warstwowej z wypełniaczem ciągłym. Główną trudność stanowi określenie sztywności płyty na zginanie i ścinanie, które dla płyt warstwowych z wypełniaczem nieciągłym są nieciągłymi funkcjami współrzędnych położenia elementu płyty. Wobec powyższych trudności nie będziemy rozpatrywali dźwigara integralnie lecz jako dwa oddzielne płyty, zastępując jednocześnie oddziaływanie elementów wypełniacza odpowiednimi siłami przyłożonymi na poletkach, odpowiadających przekrojom elementów, i odpowiednimi momentami przyłożonymi wzdłuż odcinków



Rys. 7. Umowny schemat poletka przyłożenia siły



Rys. 8. Umowny schemat przyłożenia momentu skupionego

prostych (rys. 7 i 8). W przypadku prętów o małych polach przekrojów siły równomiernie rozłożone na tych polach możemy zastąpić siłami skupionymi, przyłożonymi w środkach tych pól.

3. PODSTAWOWE OZNACZENIA I ZAŁOŻENIA

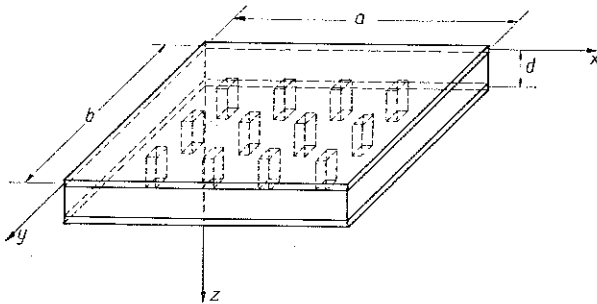
Rozpatrujemy płytę warstwową o kształcie prostokątnym. Niech długość płyty wynosi a , a szerokość b . W zależności od ilości elementów wypełniacza, które zwykle są rozłożone symetrycznie, dzielimy bok płyty a na μ , natomiast bok b na ν

równych części. Przyjmując układ współrzędnych jak na rys. 9, określamy odcięte i rzędne punktów zamocowania elementów wypełniacza:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\mu} a, & x_2 &= \frac{2}{\mu} a, \dots, & x_k &= \frac{k}{\mu} a, \dots, & x_{\mu-1} &= \frac{\mu-1}{\mu} a; \\ y_1 &= \frac{1}{\nu} b, & y_2 &= \frac{2}{\nu} b, \dots, & y_l &= \frac{l}{\nu} b, \dots, & y_{\nu-1} &= \frac{\nu-1}{\nu} b. \end{aligned}$$

Na rys. 9 przyjęto $\mu=5$ i $\nu=4$.

Płat, którego płaszczyzna środkowa pokrywa się z płaszczyzną $z=0$, będziemy nazywali płatem górnym, natomiast płat, którego płaszczyzna środkowa pokrywa się z płaszczyzną $z=d$, płatem dolnym. Odległość płaszczyzn środkowych obu płyt



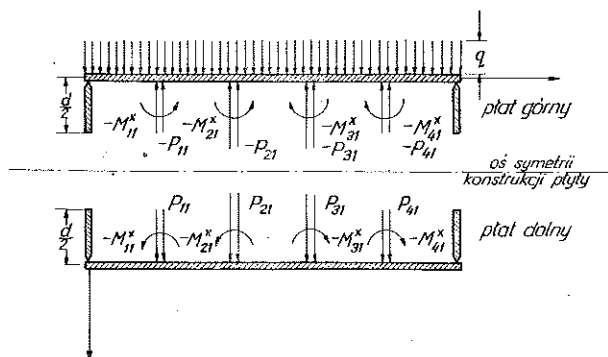
Rys. 9. Schemat rozpatrywanej płyty w układzie osi współrzędnych

oznaczono przez d . W dalszym ciągu rozpatrujemy płytę dowolnie podpartą, której górny płat jest obciążony równomiernie na całej powierzchni, przy czym przez q oznaczamy obciążenie pionowe na jednostkę pola powierzchni płyty. Jak już zaznaczyliśmy, wzajemne oddziaływanie obu płyt przekazywane za pomocą elementów wypełniacza, zastępujemy zewnętrznymi siłami i momentami. Siłę równomiernie rozłożoną na poletku kwadratowym o boku 2ε i o środku w punkcie o współrzędnych (x_k, y_l) będziemy oznaczali przez p_{kl} , a momenty skupione przyłożone na odcinkach prostych o długości 2ε i przechodzących przez środek kwadratu przez M_{kl}^x i M_{kl}^y , przy czym przez M_{kl}^x oznaczono moment działający wzdłuż odcinka równoległego do osi y , a przez M_{kl}^y moment działający wzdłuż odcinka równoległego do osi x (rys. 8).

Na rys. 10 przedstawiono przekrój płyty płaszczyzną $y=y_1$ i zaznaczono odpowiednie wielkości oddziaływające na oba płaty w tym przekroju. Równanie powierzchni ugięcia górnego płata płyty oznaczamy przez $w_1 = w_1(x, y)$, a równanie powierzchni ugięcia dolnego płata przez $w_2 = w_2(x, y) + d$. W dalszym ciągu zakładamy, że odkształcenia w kierunkach osi elementów wypełniacza są tak małe w porównaniu z ugięciem płyty, że można je pominąć. Wtedy możemy przyjąć, że ugięcia górnego płata płyty w punktach zamocowania elementów wypełniacza (x_r, y_s) są równe ugięciom dolnego płata w tych samych punktach:

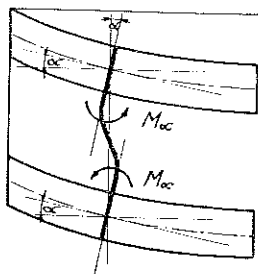
$$(3.2) \quad w_1(x_r, y_s) = w_2(x_r, y_s), \quad r=1, 2, \dots, \mu-1. \quad s=1, 2, \dots, \nu-1.$$

Momenty M_{kl}^x i M_{kl}^y są zależne od sprężystości elementu wypełniacza i własności sprężystych górnego i dolnego płata płyty. Na rys. 11 przedstawiono schemat odkształcenia pręta sprężystego powstały w wyniku odkształcenia płyty. W dalszym:

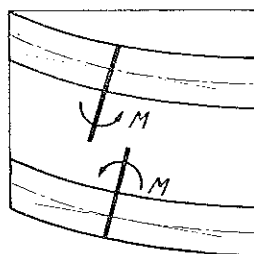


Rys. 10. Koncepcja modelu obliczeniowego metalowej płyty warstwowej

ciągu przyjmujemy, że dla górnego i dolnego płata płyty są spełnione założenia klasycznej teorii płyt cienkich. Kąty α i β są kątami, jakie tworzą styczne do przekrojów powierzchni środkowej płaszczyznami $x = x_k$ i $y = y_l$ z osiami x i y . Stosowane w praktyce odcinki prętów czy zasklepione odcinki rur mają bardzo dużą sztywność,



Rys. 11. Schemat wyoboczenia pręta sprężystego jako łącznika płatów górnego i dolnego



Rys. 12. Fragment koncepcji modelu obliczeniowego płyty

wobec tego możemy założyć, że elementy te prawie nie ulegają wygięciu, a tym samym tangensy kątów α i β są w przybliżeniu równe zero. Założenie to zapisujemy w postaci

$$(3.3) \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_k \\ y=y_l}} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_k \\ y=y_l}} = 0.$$

Gdy sztywność pręta jest duża w porównaniu ze sztywnością płatów płyty warstwowej, to pręt ten po odkształceniu płyty przyjmuje położenie pionowe. Można to uzasadnić geometrycznie. Przyjmując, że sztywność zginania górnego i dolnego

płata płyty warstwowej są jednakowe, po rozcięciu pręta w środku, aby doprowadzić jego końce ponownie do pierwotnego położenia, należy je obrócić o ten sam kąt pod działaniem takich samych momentów (rys. 12). Założenie to zostało także potwierdzone doświadczalnie [2] (rys. 5 i 6).

4. OBCIĄŻENIA GÓRNEGO I DOLNEGO PŁATA PŁYTY

Wzajemne oddziaływanie górnego i dolnego płata płyty warstwowej na siebie przez elementy wypełniacza zastępujemy siłami równomiernie rozłożonymi na poletkach kwadratowych o boku 2ε (rys. 7) oraz przez momenty skupione na odcinkach o długości 2ε i przechodzących przez środek kwadratu (rys. 8). Obciążenie na jednostkę pola kwadratu o boku 2ε i o środku w punkcie (x_k, y_l) będziemy oznaczali przez

$$(4.1) \quad p_{kl}, \quad x_k - \varepsilon \leq x \leq x_k + \varepsilon, \quad y_l - \varepsilon \leq y \leq y_l + \varepsilon,$$

natomiast wypadkową sił równomiernie rozłożonych na tym polu będziemy oznaczali przez

$$(4.2) \quad P_{kl} = 4\varepsilon^2 p_{kl},$$

przy czym wypadkowa ta jest siłą skupioną, przyłożoną w punkcie (x_k, y_l) i możemy ją przedstawić za pomocą funkcji delta Diraca:

$$(4.3) \quad P_{kl} \delta(x - x_k) \delta(y - y_l).$$

Momenty skupione zapiszemy za pomocą pochodnej funkcji delta Diraca [3].

Tak więc momenty działające wzdłuż odcinków równoległych do osi y i do osi x (rys. 8) wyrażą się

$$(4.4) \quad \begin{aligned} M_{kl}^x \delta'(x - x_k), & \quad \text{gdzie} \quad y_l - \varepsilon \leq y \leq y_l + \varepsilon, \\ M_{kl}^y \delta'(y - y_l), & \quad \text{gdzie} \quad x_k - \varepsilon \leq x \leq x_k + \varepsilon, \end{aligned}$$

przy czym M_{kl}^x jest momentem działającym na jednostkę odcinka równoległego do osi y , a M_{kl}^y momentem działającym na jednostkę odcinka równoległego do osi x .

Oznaczmy obciążenie górnego płata przez $f_1(x, y)$, a dolnego płata przez $f_2(x, y)$. Po uwzględnieniu kierunków działania sił i momentów otrzymujemy następujące wzory na obciążenie górnego i dolnego płata płyty warstwowej:

$$(4.5) \quad f_1(x, y) = q - \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} p_{kl} + \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \delta'(x - x_k) + \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \delta'(y - y_l),$$

$$(4.6) \quad f_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} p_{kl} + \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \delta'(x - x_k) + \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \delta'(y - y_l),$$

gdzie p_{kl} jest wielkością stałą różną od zera na kwadracie

$$x_k - \varepsilon \leq x \leq x_k + \varepsilon, \quad y_l - \varepsilon \leq y \leq y_l + \varepsilon;$$

M_{kl}^x jest wielkością stałą i różną od zera na odcinku

$$y_l - \varepsilon \leq y \leq y_l + \varepsilon;$$

M_{kl}^y jest wielkością stałą i różną od zera na odcinku

$$x_k - \varepsilon \leq x \leq x_k + \varepsilon.$$

Jeżeli punkt o współrzędnych (x_r, y_s) nie jest punktem zamocowania elementu wypełniacza, to przyjmujemy

$$p_{rs} = 0, \quad M_{rs}^x = 0, \quad M_{rs}^y = 0.$$

W przypadku gdy boki kwadratu 2ε są małe w porównaniu z wymiarami płyty, siłę równomiernie rozłożoną na takim małym poletku możemy zastąpić wypadkową siłą skupioną, wyrażoną wzorem (4.3). Po uwzględnieniu powyższego we wzorach (4.5) i (4.6) otrzymujemy

$$(4.7) \quad f_1(x, y) = q - \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{v-1} P_{kl} \delta(x-x_k) \delta(y-y_l) + \\ + \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{v-1} M_{kl}^x \delta'(x-x_k) + \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{v-1} M_{kl}^y \delta'(y-y_l),$$

$$(4.8) \quad f_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{v-1} P_{kl} \delta(x-x_k) \delta(y-y_l) + \\ + \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{v-1} M_{kl}^x \delta'(x-x_k) + \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{v-1} M_{kl}^y \delta'(y-y_l),$$

gdzie M_{kl}^x jest wielkością stałą i różną od zera na odcinku $y_l - \varepsilon \leq y \leq y_l + \varepsilon$ a M_{kl}^y jest wielkością stałą i różną od zera na odcinku $x_k - \varepsilon \leq x \leq x_k + \varepsilon$.

5. PŁYTA PROSTOKĄTNA SWOBODNIE PODPARTA

Rozpatrzmy płytę prostokątną, której dolny płat jest swobodnie podparty wzdłuż całego brzegu od strony zewnętrznej, natomiast brzeg górnego i dolnego płata od strony wewnętrznej jest połączony bezmomentowo za pomocą brzeźnika o dużej sztywności. Ugięcia tak podpartej płyty warstwowej z wypełniaczem nieciągłym otrzymamy znajdując ugięcia górnego i dolnego płata płyty. Obciążenia górnego i dolnego płata płyty są dane wzorami (4.5) i (4.6). Niech $w_1 = w_1(x, y)$ i $w_2(x, y)$ będą równaniami powierzchni ugięcia górnego i dolnego płata płyty warstwowej. Wtedy dla górnego płata płyty wzdłuż całego brzegu podpartego swobodnie muszą być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$(5.1) \quad \text{dla } x=0 \text{ i } x=a, \quad w_1=0 \text{ i } \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, \\ \text{dla } y=0 \text{ i } y=b, \quad w_1=0 \text{ i } \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0.$$

Podobnie dla dowolnego płata płyty mamy

$$(5.2) \quad \text{dla } x=0 \text{ i } x=a, \quad w_2=0 \text{ i } \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}=0,$$

$$\text{dla } y=0 \text{ i } y=b, \quad w_2=0 \text{ i } \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}=0.$$

Równania powierzchni ugięcia górnego i dolnego płata płyty mają postać [5]

$$(5.3) \quad \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \frac{1}{D_1} f_1(x, y),$$

$$(5.4) \quad \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = \frac{1}{D_2} f_2(x, y),$$

gdzie D_1 i D_2 są sztywnościami zginania górnego i dolnego płata płyty:

$$D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu_1^2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h_2^3}{12(1-\nu_2^2)}.$$

Rozwiązania równania (5.3), spełniającego warunki brzegowe (5.1), szukamy w postaci podwójnego szeregu Fouriera

$$w_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^1 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Rozwiązanie to jest znane jako rozwiązanie Naviera i ma postać [5]

$$(5.5) \quad w_1(x, y) = \frac{a^4 b^4}{\pi^4 D_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

gdzie a_{mn} są współczynnikami rozwinięcia obciążenia w podwójny szereg Fouriera. Współczynniki te mają postać

$$(5.6) \quad a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_1(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy.$$

Po wstawieniu za $f_1(x, y)$ obciążenia określonego wzorem (4.5) i po wykonaniu całkowań otrzymujemy

$$(5.7) \quad a_{mn} = \frac{4}{ab} \left\{ \frac{abq}{\pi^2 mn} [1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n] - \right. \\ \left. - \frac{4ab}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} p_{kl} \sin \frac{k\pi}{\mu} \sin \frac{l\pi}{\nu} - \right. \\ \left. - \frac{2bm}{an} \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \cos \frac{k\pi}{\mu} \sin \frac{l\pi}{\nu} - \right. \\ \left. - \frac{2an}{bm} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \sin \frac{k\pi}{\mu} \cos \frac{l\pi}{\nu} \right\}.$$

Podobnie znajdujemy rozwiązanie równania (5.4) spełniającego warunki brzegowe (5.2). Rozwiązanie to ma postać

$$(5.8) \quad w_2(x, y) = \frac{a^4 b^4}{\pi^4 D_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y + d,$$

gdzie

$$(5.9) \quad b_{mn} = \frac{4}{ab} \left\{ \frac{4ab}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} p_{kl} \sin \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} - \right. \\ \left. - \frac{2bm}{an} \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \cos \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} - \right. \\ \left. - \frac{2an}{bm} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \sin \frac{km\pi}{\mu} \cos \frac{ln\pi}{\nu} \right\}.$$

We współczynnikach a_{mn} i b_{mn} występują nieznanne wielkości sił p_{kl} oraz momentów M_{kl}^x i M_{kl}^y . Wielkości te wyznaczmy wykorzystując warunki (3.2) i (3.3).

Po wykonaniu podstawień i po przekształceniach otrzymujemy następujący układ $3(\mu-1)(\nu-1)$ równań o tej samej ilości niewiadomych p_{kl} , M_{kl}^x , M_{kl}^y ($k=1, 2, \dots, \mu-1$; $l=1, 2, \dots, \nu-1$):

$$(5.10) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \left\{ \frac{2ab}{\pi^2 mn} \frac{D_1 + D_2}{D_2} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \times \right. \\ \times \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} p_{kl} \sin \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \frac{D_2 - D_1}{D_2} \left[\frac{bm}{an} \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \cos \frac{km\pi}{\mu} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \frac{an}{bm} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \sin \frac{km\pi}{\mu} \cos \frac{ln\pi}{\nu} \right] \left. \right\} \sin \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu} = \\ = \frac{abq}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu};$$

$$(5.11) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \left\{ \frac{2ab}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \times \right. \\ \times \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} p_{kl} \sin \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \frac{bm}{an} \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \cos \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \\ \left. + \frac{an}{bm} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \sin \frac{km\pi}{\mu} \cos \frac{ln\pi}{\nu} \right\} \cos \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu} = \\ = \frac{abq}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{n(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \cos \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu};$$

$$\begin{aligned}
 (5.12) \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \left\{ \frac{2ab}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \times \right. \\
 & \times \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} p_{kl} \sin \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \frac{bm}{an} \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \cos \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \\
 & \left. + \frac{an}{bm} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \sin \frac{km\pi}{\mu} \cos \frac{ln\pi}{\nu} \right\} \sin \frac{rm\pi}{\mu} \cos \frac{sn\pi}{\nu} = \\
 & = \frac{abq}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n]}{m(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{rm\pi}{\mu} \cos \frac{sn\pi}{\nu}.
 \end{aligned}$$

Jeżeli elementy wypełniacza są rozłożone symetrycznie względem płaszczyzn przechodzących przez środek płyty warstwowej i równoległych do płaszczyzn układu współrzędnych xOz i yOz , to obciążenia p_{kl} i momenty M_{kl}^x i M_{kl}^y są również rozłożone symetrycznie i problem znacznie się upraszcza.

Układ równań (5.10) znacznie się również upraszcza, jeżeli sztywności zginania D_1 i D_2 górnego i dolnego płyta płyty są sobie równe, $D_1 = D_2 = D$. Wtedy układ równań (5.10) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 (5.13) \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} p_{kl} \sin \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} \right\} \times \\
 & \times \sin \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu} = \frac{q}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n]}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu}, \\
 & r = 1, 2, \dots, \mu - 1, \quad s = 1, 2, \dots, \nu - 1.
 \end{aligned}$$

Z tego układu równań wyznaczamy niewiadome p_{kl} , a następnie niewiadome M_{kl}^x i M_{kl}^y z układów (5.11) i (5.12).

Jeżeli pola przekrojów poprzecznych elementów wypełniacza są małe w porównaniu z rozpiętością płyty, wtedy siły równomiernie rozłożone na takich polach możemy zastąpić wypadkowymi siłami skupionymi, przy czym obciążenia górnego i dolnego płyta płyty wyrażą się wzorami (4.7) i (4.8). Po uwzględnieniu tych wzorów otrzymujemy następujący układ równań, w którym niewiadomymi są siły skupione P_{kl} i momenty M_{kl}^x i M_{kl}^y rozłożone wzdłuż odcinków o długości 2ε :

$$\begin{aligned}
 (5.14) \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} P_{kl} \sin \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} \right\} \times \\
 & \times \sin \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu} = \frac{abq}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n]}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu};
 \end{aligned}$$

$$(5.15) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} P_{kl} \sin \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \right. \\ \left. + \frac{2bm}{an} \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \cos \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \right. \\ \left. + \frac{2an}{bm} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \sin \frac{km\pi}{\mu} \cos \frac{ln\pi}{\nu} \right\} \cos \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu} = \\ = \frac{abq}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n]}{n(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \cos \frac{rm\pi}{\mu} \sin \frac{sn\pi}{\nu};$$

$$(5.16) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} P_{kl} \sin \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \right. \\ \left. + \frac{2bm}{an} \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^x \cos \frac{km\pi}{\mu} \sin \frac{ln\pi}{\nu} + \right. \\ \left. + \frac{2an}{bm} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \sum_{k=1}^{\mu-1} \sum_{l=1}^{\nu-1} M_{kl}^y \sin \frac{km\pi}{\mu} \cos \frac{ln\pi}{\nu} \right\} \sin \frac{rm\pi}{\mu} \cos \frac{sn\pi}{\nu} = \\ = \frac{abq}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n]}{m(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2} \sin \frac{rm\pi}{\mu} \cos \frac{sn\pi}{\nu}, \\ r=1, 2, \dots, \mu-1, \quad s=1, 2, \dots, \nu-1.$$

Po wyznaczeniu wielkości P_{kl} , M_{kl}^x , M_{kl}^y ugięcie górnego i dolnego płata płyty warstwowej obliczamy za pomocą wzorów (5.5) i (5.8), natomiast momenty przekrojowe i siły poprzeczne obliczamy za pomocą znanych wzorów [5].

6. PRZYKŁAD

Przedstawioną metodę objaśniamy na przykładzie obliczeń płyty dwuwarstwowej z pięcioma elementami wypełniacza, umieszczonymi w punktach jak pokazano na rys. 13. Przyjmujemy, że elementami wypełniacza są odcinki prętów o małych w porównaniu z rozpiętością płyty przekrojach poprzecznych. Poza tym zakładamy, że płyta jest swobodnie podparta, a górny i dolny płat są połączone bezmomentowo brzeżnikiem o dużej sztywności. Górny płat płyty jest obciążony równomiernie na całej powierzchni obciążeniem stałym q . W rozpatrywanym przypadku $\mu=4$ i $\nu=4$. Oddziaływanie płatów na siebie zastępujemy siłami skupionymi P_{kl} i momentami M_{kl}^x i M_{kl}^y przyłożonymi w punktach połączenia płatów płyty z odcinkami prętów.

Z uwagi na symetryczny rozkład prętów i symetrię obciążenia mamy

$$(6.1) \quad P_{11} = P_{13} = P_{31} = P_{33};$$

$$(6.2) \quad M_{11}^x = M_{13}^x = M_{31}^x = M_{33}^x, \quad M_{22}^x = 0, \\ M_{11}^y = M_{13}^y = M_{31}^y = M_{33}^y, \quad M_{22}^y = 0.$$

Po wstawieniu we wzorach (4.7) i (4.8) $\mu=4$ i $\nu=4$, wykorzystaniu warunków symetrii (6.1) i (6.2) i wykonaniu przekształceń trygonometrycznych, otrzymujemy równania powierzchni ugięcia górnego i dolnego płyta płyty

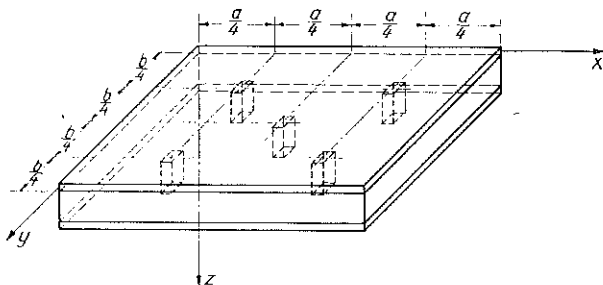
$$(6.3) \quad w_1(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$(6.4) \quad w_2(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y + d,$$

gdzie

$$(6.5) \quad a_{mn} = \frac{4}{ab} \left\{ \frac{abq}{\pi^2 mn} [1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n] - 4P_{11} \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \times \right. \\ \times \cos \frac{n\pi}{4} - P_{22} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{8bm}{an} M_{11}^x \cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} \times \\ \left. \times \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon - \frac{8an}{bm} M_{11}^y \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \right\};$$

$$(6.6) \quad b_{mn} = \frac{4}{ab} \left\{ 4P_{11} \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} + P_{22} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} - \right. \\ - \frac{8bm}{an} M_{11}^x \cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{b} \varepsilon - \\ \left. - \frac{8an}{bm} M_{11}^y \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon \right\}.$$



Rys. 13. Widok płyty przyjętej do obliczeń w przykładzie

Z warunków (3.2), które w rozpatrywanym przypadku mają postać

$$w_1\left(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}b\right) = w_2\left(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}b\right) - d, \quad w_1\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right) = w_2\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right) - d,$$

otrzymujemy dla $b=a/2$ następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 P_{11} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+4n^2)^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \\
 + P_{22} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+4n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4} = \\
 = \frac{a^2 q}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^m][1-(-1)^n]}{mn(m^2+4n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4}, \\
 (6.7) \\
 P_{11} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(m^2+4n^2)^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} + \\
 + P_{22} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+4n^2)^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \\
 = \frac{a^2 q}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^m][1-(-1)^n]}{mn(m^2+4n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Korzystając ze znanych wzorów (por. [4]) i wykonując częściowe szacowanie szeregów występujących we wzorze (6.7), otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}
 0,0488P_{11} + 0,0165P_{22} &= \frac{a^2 q}{\pi^2} 0,0209, \\
 (6.8) \\
 0,0660P_{11} + 0,0488P_{22} &= \frac{a^2 q}{\pi^2} 0,0382.
 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są współczynniki

$$(6.9) \quad P_{11} = 0,030a^2 q, \quad P_{22} = 0,037a^2 q,$$

skąd po wykorzystaniu warunków symetrii (5.17) otrzymujemy

$$P_{11} = P_{13} = P_{31} = P_{33} = 0,030a^2 q, \quad P_{22} = 0,037a^2 q.$$

Mając wyznaczone wielkości P_{11} i P_{22} , momenty M_{11}^x i M_{11}^y obliczymy z warunków (3.3)

$$(6.10) \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} \Big|_{\substack{x=a/4 \\ y=b/4}} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{\substack{x=a/4 \\ y=b/4}} = 0.$$

W tym celu wykorzystujemy rozwiązanie (6.3). Po uwzględnieniu warunków (6.10) i po wykonaniu przekształceń otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 M_{11}^x & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2}{n(m^2+4n^2)^2} \cos \frac{m\pi}{2} \cos^2 \frac{m\pi}{4} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \sin \frac{2n\pi}{a} \varepsilon + \\
 & + 2M_{11}^y \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(m^2+4n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \cos^2 \frac{m\pi}{4} \sin n\pi \sin \frac{m\pi\varepsilon}{a} = \\
 & = \frac{a^2 q}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(m^2+4n^2)^2} \left\{ \frac{1}{mn} [1-(-1)^m][1-(-1)^n] \cos \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{4} - \right. \\
 & \left. - 1,2 \sin \frac{m\pi}{2} \cos^2 \frac{m\pi}{4} \sin^2 \frac{n\pi}{2} - 0,74 \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{4} \right\}, \\
 (6.11) \quad M_{11}^x & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(m^2+4n^2)^2} \sin m\pi \sin \frac{n\pi}{2} \cos^2 \frac{n\pi}{4} \sin \frac{2n\pi}{a} \varepsilon + \\
 & + 8M_{11}^y \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{m(m^2+4n^2)^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \cos^2 \frac{n\pi}{4} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon = \\
 & = \frac{a^2 q}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(m^2+4n^2)^2} \left\{ \frac{1}{mn} [1-(-1)^m][1-(-1)^n] \sin \frac{m\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{4} - \right. \\
 & \left. - 1,2 \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos^2 \frac{n\pi}{4} - 0,74 \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} \right\}.
 \end{aligned}$$

Jak można zauważyć, współczynnik przy M_{11}^y w pierwszym równaniu i współczynnik przy M_{11}^x w drugim równaniu tego układu jest równy zeru. W celu ułatwienia obliczeń pozostałych współczynników korzystamy ze wzorów [4]:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2+\alpha^2} &= \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\cos \alpha(\pi-x)}{\sin \alpha\pi} - \frac{1}{2\alpha^2}, \quad 0 < x < 2\pi, \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+\alpha^2} &= \frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{ctgh} \alpha\pi - \frac{1}{2\alpha^2}, \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{(k^2+\alpha^2)^2} &= -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi}{4\alpha^3} \frac{\operatorname{ch} \alpha(\pi-x)}{\operatorname{sh} \pi\alpha} - \\
 & - \frac{\pi(\pi-x)}{4\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha(\pi-x)}{\operatorname{sh} \pi\alpha} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \frac{\operatorname{ch} \alpha(\pi-x) \operatorname{ch} \pi\alpha}{\operatorname{sh}^2 \pi\alpha}, \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2+\alpha^2)^2} &= \frac{\pi}{4\alpha^3} \operatorname{ctgh} \pi\alpha + \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \pi\alpha} - \frac{1}{2\alpha^4}.
 \end{aligned}$$

oraz równości

$$\frac{k^2}{(k^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{k^2 + \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{(k^2 + \alpha^2)^2},$$

$$\cos \frac{m\pi}{2} \cos^2 \frac{m\pi}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos m\pi \right).$$

Współczynniki przy niewiadomych M_{11}^x i M_{11}^y przekształcamy do postaci

$$(6.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{n(m^2 + 4n^2)^2} \cos \frac{m\pi}{2} \cos^2 \frac{m\pi}{4} \right) \sin^2 \frac{n\pi}{2} \sin \frac{2n\pi}{a} \varepsilon =$$

$$= \frac{\pi}{32} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \operatorname{ctgh} \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi}{2}} \right) \sin^2 \frac{n\pi}{2} \sin \frac{2n\pi}{a} \varepsilon;$$

$$(6.13) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{m(m^2 + 4n^2)^2} \cos \frac{n\pi}{2} \cos^2 \frac{n\pi}{4} \right) \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon =$$

$$= \frac{\pi}{128} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2} \operatorname{ctgh} \frac{m\pi}{8} - \frac{\pi}{8m \operatorname{sh}^2 \frac{m\pi}{8}} \right) \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{a} \varepsilon.$$

W dalszym ciągu przyjmujemy, że średnica 2ε prętów, które w rozpatrywanym przykładzie są elementami wypełniacza, jest równa $a/45$, gdzie a jest dłuższą krawędzią płyty, czyli $\varepsilon = a/90$. Współczynniki przy niewiadomych M_{11}^x i M_{11}^y obliczamy z dokładnością rzędu dziesięciotysięcznych. W tym celu we wzorze (6.12) uwzględniamy n od 1 do 43, a we wzorze (6.13) uwzględniamy m od 1 do 89. W prawych stronach układu równań (6.11) m i n przebiega wartości od 1 do 5. Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy

$$0,0131M_{11}^x = \frac{a^2 q}{4\pi^2} 0,0283, \quad 0,0056M_{11}^y = \frac{a^2 q}{4\pi^2} 0,0430.$$

Moment działający wzdłuż jednostki odcinka równoległego do osi y wynosi

$$M_{11}^x = 0,055a^2 q \quad \left(x = \frac{1}{4}a, \frac{43}{180}a \leq y \leq \frac{47}{180}a \right),$$

a moment działający wzdłuż jednostki odcinka równoległego do osi x

$$M_{11}^y = 0,196a^2 q \quad \left(y = \frac{1}{4}b, \frac{43}{180}a \leq x \leq \frac{47}{180}a \right).$$

Pozostałe momenty przyłożone w punktach połączenia płatów płyty z odcinkami prętów otrzymujemy z warunków symetrii (6.2).

Ugięcie płyty w jej środku, to jest dla $x=1/2a$, $y=1/2b$ możemy obliczyć za pomocą wzorów (6.3) lub (6.4). Wzór (6.4) po wstawieniu $x=1/2a$, $y=1/2b$, $d=0$ przyjmuje postać

$$w\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right) = \frac{8a^4q}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + 4n^2)^2} \left\{ 0,120 \sin^2 \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{4} \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} + 0,037 \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \right\},$$

skąd

$$w\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right) = 0,0003 \frac{a^4 q}{D}.$$

Dla $a=2b$ otrzymujemy

$$w\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right) = 0,005 \frac{b^4 q}{D}.$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. O. JUNGBLUTH, *Stahltafelbauweise mit Hilfe Sandwichtechnik*, Stahlbautagung, T. U. Dresden 1967.
2. J. KANIA, *Badania modelowe pewnej płyty warstwowej*, III Sesja Naukowa Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1968.
3. E. KARAŚKIEWICZ, *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, Warszawa 1964.
4. I. M. RYŻYK i J. S. GRADSZTEJN, *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, Warszawa 1964.
5. S. TIMOSZENKO i S. WOJNOWSKY-KRIAGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.
6. M. WARMUS, *Tablice funkcji elementarnych*, PWN, Warszawa 1960.

Резюме

МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ СЛОЙСТАЯ ПЛАСТИНКА СО СКЕЛЕТНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В работе изложена часть модельных исследований и статические расчеты задачи о свободно опертой слойстой пластинке. Изучается пластинка, образованная сварным соединением двух металлических листов с конструктивными элементами, которыми являются стержни или закупоренные трубы. Расчеты выполнены для пластинки, у которой края листов соединены друг с другом шарнирно при помощи окаймляющего ребра большой жесткости.

SUMMARY

METALLIC SANDWICH PLATE WITH SKELETON CORE

A rectangular sandwich plate simply supported on its edges and subject to uniformly distributed vertical load is considered in the paper. The faces of the plate are connected with each other by a certain number of short rods or cylinders which constitute the core of the sandwich plate. Hinged connection with a rigid edge stiffener ensures the conditions of free support at the edges to be satisfied.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT BUDOWNICTWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 lipca 1973 r.
