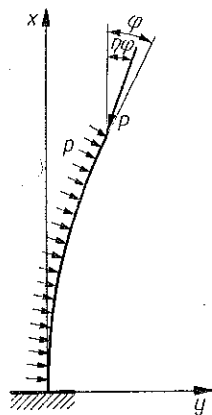


OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU PRĘTA SMUKŁEGO UMIESZCZONEGO W STRUMIENIU PŁYNU

BARBARA DRAĞ I ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. WSTĘP

Problem optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą o stałej wartości, ustalonym kierunku i punkcie przyłożenia (tzw. siłą eulerowską) został rozwiązany w pracach Clausena, Błasiusa, Nikolai i Czencowa. Autorzy stosowali przy tym metody rachunku wariacyjnego i poszukiwali minimum funkcjonału objętości pręta przy spełnieniu warunku pobocznego w postaci równania różniczkowego linii ugięcia pręta ściskanego. Znacznie więcej trudności stwarza podobne zagadnienie w przypadku działania tzw. obciążeń niekonserwatywnych, a więc nie posiadających potencjału. Typowym przykładem niekonserwatywnych obciążeń w teorii stateczności sprężystej są obciążenia śledzące o zmiennym kierunku działania w trakcie wybożenia. Najwięcej uwagi poświęcono badaniu stateczności pręta wspornikowego ściskanego skupioną siłą śledzącą, działającą na swobodnym końcu pręta; w przypadku tym nieodzowne stało się stosowanie tzw. kinetycznego kryterium stateczności, polegającego na badaniu małych drgań poprzecznych pręta oraz określeniu siły krytycznej jako takiej, przy której następuje zamiana ustalonych drgań na drgania nieustalone (BECK [1]). Okazało się jednak (Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI [5]), że kinetyczne kryterium stateczności nie musi być stosowane zawsze, gdy tylko występuje obciążenie niekonserwatywne. Dla wartości współczynnika śledzenia η (zdefiniowanego na rys. 1) mniejszych od $1/2$ wystarczające jest stosowanie statycznego kryterium stateczności (układ traci stateczność przez wybożenie). Również w przypadku obciążenia śledzącym ciśnieniem bocznym, wynikającym z opływu pręta równoległym strumieniem płynu (Z. KORDAS [6]) wystarczy stosować statyczne kryterium stateczności.



Rys. 1

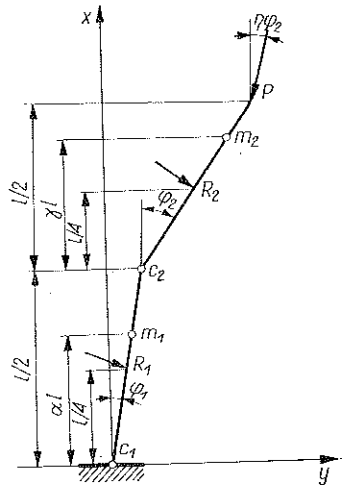
Problemy optymalizacji kształtu pręta poddanego działaniu obciążeń niekonserwatywnych można zatem podzielić na dwa typy: pierwszy, w którym wystarczające jest stosowanie statycznego kryterium stateczności, i drugi, w którym konieczne jest stosowanie kryterium kinetycznego. Zagadnienia te omawiane są w niewielu znanych nam pracach. Jako pierwszą należy wymienić pracę M. ŻYCZKOWSKIEGO

i A. GAJEWSKIEGO [12], w której na prostym modelu Zieglera o dwóch stopniach swobody, ściskanym siłą o zmieniającym się w trakcie wybożenia kierunku (w pełnym zakresie zmienności współczynnika śledzenia η), przedstawiono metodę doboru stosunku współczynników sztywności przegubów modelu tak, aby siła krytyczna była maksymalna przy ustalonej, odpowiednio zdefiniowanej objętości. W pracy tej rozwiązano również ściśły problem wariacyjny optymalizacji kształtu pręta, jednak tylko w przypadku ściskania tzw. siłą przeciwśledzącą ($\eta < 0$), a więc problem pierwszego typu. Również w pracy A. GAJEWSKIEGO [3] znaleziono optymalny kształt prętów o określonym sposobie zmiany przekroju poprzecznego, ściskanych siłą podśledzącą (optymalizacja parametryczna pierwszego typu), a w pracy A. GAJEWSKIEGO i M. ŻYCZKOWSKIEGO [4] podano metody optymalizacji prętów ściskanych siłą podśledzącą w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym. W pracy R. H. PLAUTA [10] podjęto próbę optymalizacji kształtu pręta wspornikowego ściskanego siłą śledzącą. Korzystając z zasady wariacyjnej Hamiltona w sformułowaniu M. LEVINSONA [8], przydatnym w zagadnieniach niekonserwatywnych, R. H. PLAUT wyprowadził warunek optymalizacyjny, który łącznie z równaniem drgań pręta z częstością krytyczną pozwala teoretycznie na otrzymanie rozwiązania zagadnienia. Ponieważ jednak zbadanie zależności częstości krytycznej od kształtu pręta jest szczególnie trudne, autor w dalszej części pracy ograniczył się do optymalizacji parametrycznej sandwiczowego pręta wspornikowego, składającego się z dwóch segmentów o różnych sztywnościach. Podobne wyniki otrzymał wcześniej A. KOWALSKI [7], który dobierał stosunek długości dwóch segmentów jednorodnego pręta pełnego w trzech przypadkach kształtu przekroju poprzecznego pręta: płasko-zbieżnego w płaszczyźnie drgań, równomiernie wszechstronnie zbieżnego i płasko-zbieżnego w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny drgań. W pracy A. GAJEWSKIEGO [2], dotyczącej stateczności statycznej prętów niepryzmatycznych, umieszczonych w strumieniu płynu, wyprowadzono równanie różniczkowe linii ugięcia pręta optymalnego o stałej szerokości, a w pracy L. LIBRESCU i L. BEINERA [9] rozwiązano problem określenia optymalnego rozkładu grubości płaskiej prostokątnej płyty opływanej naddźwiękowym strumieniem gazu. Siły aerodynamiczne uwzględniono według liniowej hipotezy płaskich przekrojów (prawa tłokowego) bez tłumienia aerodynamicznego. W końcu w pracy A. T. WEISSHAARA [11] przedstawiono optymalizację trójwarstwowej płyty swobodnie podpartej, opływanej z jednej strony naddźwiękowym strumieniem płynu. Przedstawiono optymalny rozkład grubości warstw płyty i określono zysk na materiale; wynosi on 12%.

W niniejszej pracy rzeczywisty pręt o ciągłym rozkładzie masy zastąpimy modelem o dwóch stopniach swobody, składającym się z dwóch sztywnych prętów połączonych sprężystymi przegubami o różnych współczynnikach sprężystości. Badanie takich modeli, idealizujących rzeczywisty pręt, jest celowe, bowiem wiele zjawisk odnoszących się do modeli posiada podobny charakter w prętach rzeczywistych. Punkt ciężkości pracy spoczywa na badaniu stateczności i optymalizacji modelu Zieglera, umieszczonego w równoległym strumieniu płynu.

2. STATECZNOŚĆ UKŁADU

Model Zieglera, przedstawiony na rys. 2, znajduje się w strumieniu płynu, poruszającego się z prędkością U w kierunku równoległym do jego nieodkształconej osi. W prostoliniowym położeniu równowagi pręt poddany jest działaniu siły ściskającej P , działającej na końcu swobodnym modelu (opór czołowy); siła ta może działać zupełnie niezależnie od ciśnienia wywieranego przez poruszający się płyn lub może być wynikiem działania tego ciśnienia. Kierunek działania siły P po wyboczeniu pręta określony jest przez tzw. współczynnik śledzenia η , zdefiniowany jako stosunek kąta zawartego między kierunkiem siły po wyboczeniu a nieodkształconą osią pręta do kąta nachylenia stycznej na swobodnym końcu. Równocześnie z odchyleniem sztywnych prętów modelu od postaci prostoliniowej zaczynają pojawiać się obciążenia boczne, wynikające z działania ciśnienia wywieranego przez poruszający się płyn. Podobnie jak w wielu cytowanych pracach (np. Z. KORDAS [6]) założymy, że ciśnienie boczne określone jest przez bardzo proste prawo opływu, tzw. «prawo tłokowe»:



Rys. 2

$$(2.1) \quad p = 2Bb_0 \left(U \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial t} \right),$$

w którym $B = p_0 \kappa_0 / c_0$ jest stałą charakteryzującą własności płynu. Dla gazu c_0 oznacza prędkość dźwięku, κ_0 wykładnik politropy, U prędkość strumienia płynu, $\partial w / \partial x$ kąt nachylenia sztywnego pręta modelu Zieglera oraz $\partial w / \partial t$ prędkość unoszenia elementu pręta względem poruszającego się strumienia. W dalszym ciągu pracy pominiemy prędkość unoszenia $\partial w / \partial t$ jako małą w porównaniu z prędkością samego strumienia, a zatem przyjmiemy, że prędkość względna strumienia będzie równa prędkości bezwzględnej U . Wobec tego ciśnienie boczne zastąpimy siłami skupionymi R_1 i R_2 , działającymi w środkach sztywnych prętów modelu:

$$(2.2) \quad R_1 = 2Bb_0 U \cdot \frac{1}{2} \varphi_1, \quad R_2 = 2Bb_0 U \cdot \frac{1}{2} \varphi_2.$$

Założymy, iż przeguby modelu mają stałe sprężystości c_1 i c_2 , a masy m_1 i m_2 umieszczone są odpowiednio w odległościach αl i γl od przegubów.

Aby zbadać stateczność naszego układu dla dowolnych wartości współczynnika śledzenia η , musimy zanalizować ruch układu (małe drgania) w pobliżu położenia równowagi. Skorzystamy w tym celu z równań Lagrange'a drugiego rodzaju:

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad i = 1, 2,$$

w których T oznacza energię kinetyczną układu, V potencjał sił sprężystych (w przegubach) oraz Q_1 i Q_2 siły uogólnione (niepotencjalne). W naszym przypadku zarówno siła czołowa, jak i ciśnienie boczne są siłami niepotencjalnymi. Zakładając, że kąty φ_1 i φ_2 są małe, otrzymujemy

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I^2 \left[\left(m_1 \alpha^2 + \frac{1}{4} m_2 \right) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 \gamma \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 \gamma^2 \dot{\varphi}_2^2 \right], \\ V &= \frac{1}{2} [(c_1 + c_2) \varphi_1^2 - 2c_2 \varphi_1 \varphi_2 + c_2 \varphi_2^2], \\ (2.4) \quad Q_1 &= 2Bb_0 UI^2 \left(\frac{1}{8} \varphi_1 + \frac{1}{4} \varphi_2 \right) + \frac{1}{2} Pl (\varphi_1 - \eta \varphi_2), \\ Q_2 &= 2Bb_0 UI^2 \cdot \frac{1}{8} \varphi_2 + \frac{1}{2} Pl (1 - \eta) \varphi_2. \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a (2.3) prowadzą do układu równań różniczkowych liniowych:

$$\begin{aligned} (2.5) \quad \left(m_1 \alpha^2 + \frac{1}{4} m_2 \right) I^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m_2 \gamma I^2 \ddot{\varphi}_2 + (c_1 + c_2) \varphi_1 - c_2 \varphi_2 - 2Bb_0 UI^2 \times \\ \times \left(\frac{1}{8} \varphi_1 + \frac{1}{4} \varphi_2 \right) - \frac{1}{2} Pl (\varphi_1 - \eta \varphi_2) = 0, \\ \frac{1}{2} m_2 \gamma I^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 \gamma^2 I^2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 \varphi_2 - c_1 \varphi_1 - \frac{1}{4} Bb_0 UI^2 \varphi_2 - \frac{1}{2} Pl (1 - \eta) \varphi_2 = 0, \end{aligned}$$

których rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$(2.6) \quad \varphi_1 = C_1 e^{\omega t}, \quad \varphi_2 = C_2 e^{\omega t}.$$

Wprowadzając dla uproszczenia zapisu następujące zmienne bezwymiarowe:

$$(2.7) \quad \frac{c_1}{c_2} = \psi, \quad \frac{Pl}{c_2} = \beta, \quad \frac{m_2 \omega^2 I^2}{c_2} = \lambda, \quad \frac{m_1}{m_2} = \mu, \quad \frac{2Bb_0 I^2}{c_2} = \zeta,$$

i podstawiając wyrażenia (2.6) i (2.7) do równań (2.5) otrzymujemy jednorodny układ równań ze względu na stałe C_1 i C_2 :

$$\begin{aligned} (2.8) \quad \left[\left(\mu \alpha^2 + \frac{1}{4} \right) \lambda + \psi + 1 - \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{8} \zeta \right] C_1 + \left(\frac{1}{2} \gamma \lambda - 1 + \frac{1}{2} \beta \eta - \frac{1}{4} \zeta \right) C_2 = 0, \\ \left(\frac{1}{2} \gamma \lambda - 1 \right) C_1 + \left(\gamma^2 \lambda + 1 - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \beta \eta - \frac{1}{8} \zeta \right) C_2 = 0. \end{aligned}$$

Układ (2.8) posiada rozwiązania niezerowe, gdy jego wyznacznik główny jest równy zeru. Warunek ten daje nam równanie określające bezwymiarowy kwadrat częstości drgań λ w zależności od prędkości płynu ζ oraz siły ściskającej β :

$$\begin{aligned} (2.9) \quad 64 \mu \alpha^2 \gamma^2 \lambda^2 + \{ 16 [4\gamma^2 (1 + \psi) + (1 + 4\mu \alpha^2) + 4\gamma] - \\ - 8\beta [4\gamma^2 + (1 - \eta) (1 + 4\mu \alpha^2) + 2\gamma\eta] - 2\zeta [(1 + 4\mu \alpha^2) - 4\gamma (1 + \gamma)] \} \lambda + \\ + \{ 16 [4\psi - 2(1 - \eta) (2 + \psi) \beta + (1 - \eta) \beta^2] - 4\zeta [2(4 + \psi) - \beta(2 - \eta)] + \zeta^2 \} = 0. \end{aligned}$$

Jeżeli wszystkie pierwiastki równania (2.9) mają różne i urojone wartości ω , to ruch układu jest stateczny. Ruch przestaje być stateczny w przypadku, gdy wyróżnik równania kwadratowego (2.9) jest równy zero (kryterium kinetyczne) lub gdy częstość kołowa ω jest równa zero (kryterium statyczne).

Należy zauważyć, że równanie (2.9) przechodzi w szczególnym przypadku $\zeta=0$ w równanie podane w pracy [3].

2.1. Statyczne kryterium stateczności

Przyjmując $\lambda=0$ zakładamy, że układ traci stateczność przez wyboczenie. Prowadzi to do równania określającego krzywą graniczną obciążeń β i ζ w zależności od pozostałych parametrów ψ i η :

$$(2.10) \quad 16(1-\eta)\beta^2 - 32(1-\eta)(2+\psi)\beta + 4(2-\eta)\beta\zeta - 8(4+\psi)\zeta + \zeta^2 + 64\psi = 0.$$

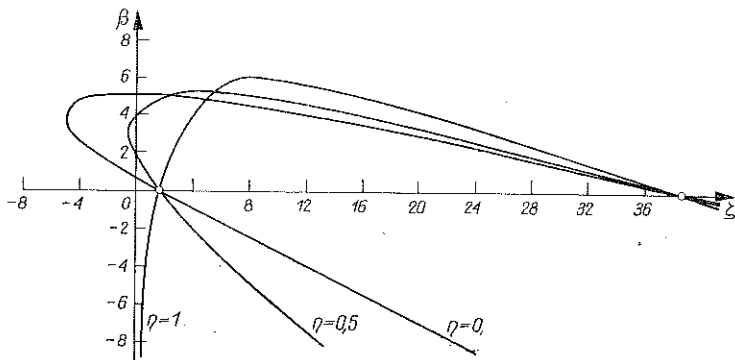
Dla określonej czołowej siły ściskającej z równania (2.10) obliczamy krytyczną prędkość płynu:

$$(2.11) \quad \zeta_k = 2 [2(4+\psi) - (2-\eta)\beta] \mp 2 \left\{ [2(4+\psi) - (2-\eta)\beta]^2 - 4 [4\psi - 2(1-\eta)(2+\psi)\beta + (1-\eta)\beta^2] \right\}^{1/2}$$

lub przy ustalonej prędkości ζ możemy obliczyć czołową siłę krytyczną:

$$(2.12) \quad \beta_k = \frac{[8(1-\eta)(2+\psi) - (2-\eta)\zeta] \mp \left\{ [8(1-\eta)(2+\psi) - (2-\eta)\zeta]^2 - 4(1-\eta)[64\psi - 8(4+\psi)\zeta + \zeta^2] \right\}^{1/2}}{8(1-\eta)}.$$

Z równania (2.10) wynika również zakres stosowalności kryterium statycznego; w przypadku siły czołowej równej zero $\beta=0$ istnieją rozwiązania (2.11) dla dowolnych wartości ψ , natomiast w przypadku, gdy nie istnieje ciśnienie boczne ($\zeta=0$) rozwiązanie istnieje tylko w pewnych przedziałach współczynnika śledzenia, mianowicie dla $-\infty < \eta \leq \eta^*$ i dla $\eta > 1$, gdzie η^* oznacza graniczną wartość współczynnika obliczoną ze wzoru $\eta^* = (4+\psi^2)/(2+\psi)^2$. Na rys. 3 przedstawiono krzywe graniczne uzyskane na podstawie kryterium statycznego (2.10) dla $\psi=1$ oraz $\eta=0, 1/2$ i 1.



Rys. 3

Dla wartości parametrów, dla których kryterium statyczne nie daje rozwiązania lub daje siłę krytyczną większą niż otrzymana z kryterium kinetycznego, należy stosować kryterium kinetyczne.

2.2. Kinetyczne kryterium stateczności

Równanie krzywej granicznej otrzymujemy tu przyrównując do zera wyróżnik równania kwadratowego (2.9):

$$(2.13) \quad b_1^2 - 4a_1 c_1 = 0,$$

gdzie a_1 , b_1 i c_1 są współczynnikami równania (2.9) napisanego w postaci

$$(2.14) \quad a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1 = 0.$$

2.3. Zależność siły czołowej od prędkości płynu

W dotychczasowych rozważaniach siła czołowa P występowała zupełnie niezależnie od ciśnienia bocznego wywołanego przez opływ pręta. Naturalne wydaje się jednak założenie, iż zarówno siła czołowa, jak i ciśnienie boczne są proporcjonalne do prędkości płynu U , a więc nie są niezależne od siebie. W dalszym ciągu pracy założymy, że siły te pozostają w stałym stosunku do siebie:

$$(2.15) \quad \beta/\zeta = \vartheta = \text{const},$$

przy czym stała wartość parametru ϑ zależy od wielkości powierzchni czołowej (płytki umieszczona na końcu pręta), długości pręta l i szerokości przekroju poprzecznego pręta b_0 .

Eliminując za pomocą równania (2.15) siłę czołową β otrzymujemy z (2.10) równanie pozwalające obliczyć krytyczną prędkość strumienia płynu w zależności od współczynników ϑ , η i ψ w przedziałach zmienności tych parametrów, dla których możliwe jest stosowanie statycznego kryterium stateczności:

$$(2.16) \quad [1 + 4(2 - \eta)\vartheta + 16(1 - \eta)\vartheta^2] \zeta^2 - 8[(4 + \psi) + 4(1 - \eta)(2 + \psi)\vartheta] \zeta + 64\psi = 0.$$

Stąd

$$(2.17) \quad \zeta_{1,2} = \frac{4[(4 + \psi) + 4(1 - \eta)(2 + \psi)\vartheta] \mp 4\{[(4 + \psi) + 4(1 - \eta)(2 + \psi)\vartheta]^2 - 4\psi[1 + 4(2 - \eta)\vartheta + 16(1 - \eta)\vartheta^2]\}^{1/2}}{[1 + 4(2 - \eta)\vartheta + 16(1 - \eta)\vartheta^2]}.$$

Podobnie stosując kryterium kinetyczne, korzystamy z równania (2.9) w postaci

$$(2.18) \quad a\lambda^2 + (b - c\zeta)\lambda + (d\zeta^2 - e\zeta + f) = 0$$

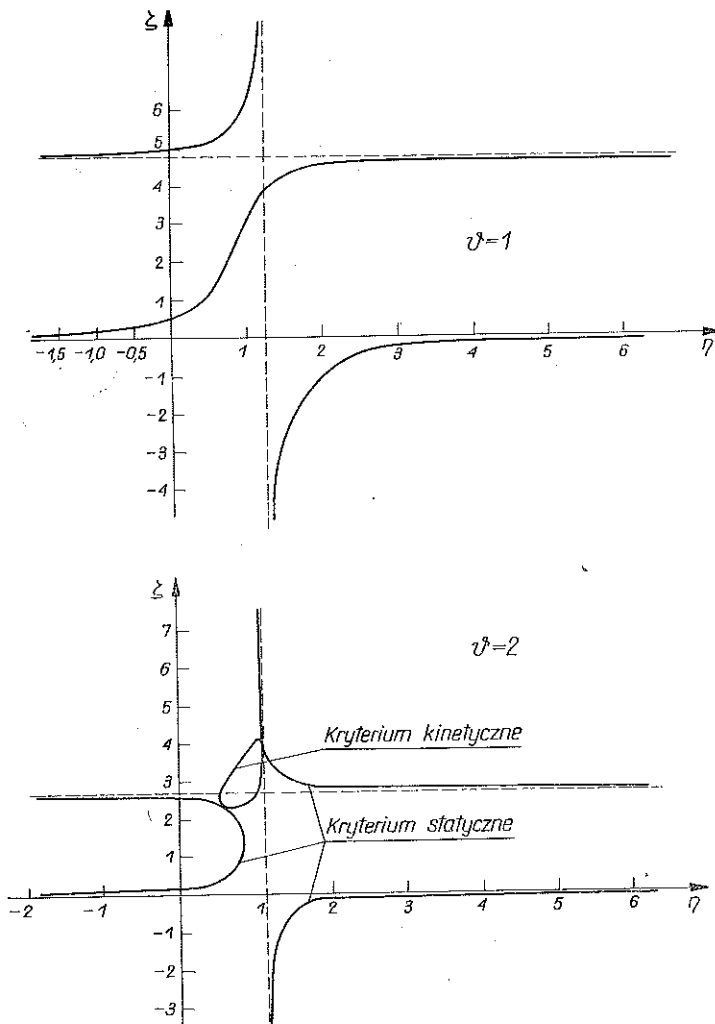
i przyrównując wyróżnik tego równania do zera otrzymujemy

$$(2.19) \quad \zeta_{1,2} = \frac{b^2 - 4af}{(bc - 2ae) \pm 2\{a[e(ae - bc) + f(c^2 - 4ad) + b^2 d]\}^{1/2}},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 a &= 64\mu\alpha^2 \gamma^2, \\
 b &= 16 [4\gamma^2 (1+\psi) + (1+4\mu\alpha^2) + 4\gamma], \\
 c &= 8 [4\gamma^2 + (1-\eta) (1+4\mu\alpha^2) + 2\gamma\eta] \vartheta + 2 [(1+4\mu\alpha^2) - 4\gamma(1-\gamma)], \\
 (2.20) \quad d &= [1+4(2-\eta) \vartheta + 16(1-\eta) \vartheta^2], \\
 e &= 8 [4(1-\eta) (2+\psi) \vartheta + (4+\psi)], \\
 f &= 64\psi.
 \end{aligned}$$

Na rys. 4 przedstawiono zależność bezwymiarowej krytycznej prędkości strumienia od współczynnika śledzenia siły czołowej przy ustalonych wartościach $\vartheta=1$ i $\vartheta=2$ oraz $\psi=1$. Jak widać, w przypadku $\vartheta=1$, kryterium statyczne pozwala

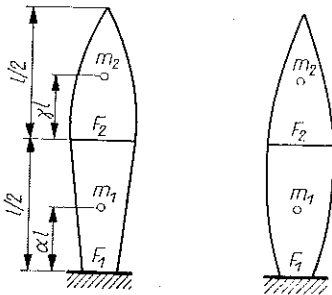


Rys. 4

obliczyć prędkość krytyczną dla dowolnych wartości η , natomiast w przypadku $\beta=2$, rozwiązanie istnieje tylko w granicach $-\infty < \eta \leq 0,84$ i $1,10 \leq \eta < \infty$. Wykres uzupełniono krzywą otrzymaną na podstawie kryterium kinetycznego z równania (2.19) przy założeniu, że masy m_1 i m_2 skupione są w środkach sztywnych prętów ($\alpha=1/4$ i $\gamma=1/4$) oraz że $\mu=3(1+\psi)/4$, tzn. dla $n=2$ i $\kappa=1$.

3. OPTIMALNE KSZTAŁTOWANIE

Optymalizacja modelu Zieglera (optymalizacja parametryczna) polega tu na poszukiwaniu optymalnej wartości parametru $\psi=c_1/c_2$ takiej, aby objętość układu była minimalna przy danej, ustalonej prędkości płynu. Wygodniejsze jest tu sformułowanie dualne zagadnienia: będziemy poszukiwali takiej wartości ψ , aby prędkość krytyczna płynu była maksymalna przy ustalonej objętości.



Rys. 5

Oczywiście należy określić sposób obliczania objętości. Przyjmiemy (podobnie jak w pracy [12]), że pręt składa się z dwóch części o długościach $l/2$ oraz masach m_1 i m_2 . Każda z tych części ma określony sposób zmiany przekroju poprzecznego jednak taki, aby przekrój utwierdzony miał pole powierzchni równe F_1 , przekrój w połowie pręta F_2 , a przekrój na końcu pole powierzchni równe zero (rys. 5).

Rozważmy dwa szczególne przypadki zmiany powierzchni przekroju wzdłuż pręta.

1. Dolna połowa pręta ma liniowo zmieniające się pole powierzchni przekroju, a pole górnej połowy zmienia się według równania

$$(3.1) \quad F(x) = F_2(1 - x^n),$$

w którym $0 \leq x \leq 1$; wówczas objętość pręta jest równa

$$(3.2) \quad V = V_1 = \frac{1}{4} l \left(F_1 + \frac{3n+1}{n+1} F_2 \right).$$

2. Pole powierzchni przekroju zmienia się według paraboli drugiego stopnia

$$(3.3) \quad F(x) = F_1 + (4F_2 - 3F_1)x + (2F_1 - 4F_2)x^2;$$

otrzymujemy w tym przypadku

$$(3.4) \quad V = V_2 = \frac{1}{6} l (F_1 + 4F_2).$$

W dalszym ciągu należy powierzchnie F_1 i F_2 powiązać ze stałymi c_1 i c_2 charakteryzującymi sztywności przegubów modelu Zieglera.

Następujące przyporządkowania wydają się najlepsze:

a) Lokalne związki typu

$$(3.5) \quad F_1 = kc_1^\kappa, \quad F_2 = kc_2^\kappa,$$

gdzie k jest pewną stałą, a wykładnik κ zależy od sposobu zmiany przekroju poprzecznego: $\kappa=1$ dla pręta płasko-zbieżnego w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ruchu, $\kappa=1/3$ dla pręta płasko-zbieżnego w płaszczyźnie ruchu i $\kappa=1/2$ dla pręta wszechstronnie równomiernie zbieżnego (stożek, piramida). Łącząc przypadek 1) z a) otrzymujemy

$$(3.6) \quad V = V_{1a} = \frac{1}{4} lkc_2^\kappa \left(\frac{3n+1}{n+1} + \psi^\kappa \right), \quad \mu = \mu_{1a} = \frac{n+1}{2n} (1 + \psi^\kappa).$$

b) Integralne związki typu

$$(3.7) \quad kc_1^\kappa = 4 \int_0^{1/4} F(x) dx, \quad kc_2^\kappa = 2 \int_{1/4}^{3/4} F(x) dx,$$

gdzie k oznacza pewną stałą, x — zmienną bezwymiarową. Łącząc np. przypadek 2) z b) otrzymujemy

$$(3.8) \quad V = V_{2b} = \frac{4}{19} lkc_2^\kappa (3 + \psi^\kappa), \quad \mu = \mu_{2b} = \frac{13 + 17\psi^\kappa}{23 - 5\psi^\kappa}.$$

W dalszym ciągu pracy ograniczymy się do optymalizacji w przypadku 1a) tzn. przy objętości określonej wzorem (3.6). Objętość V_{2b} może być otrzymana z (3.6) po przyjęciu $n=\infty$ i pomnożeniu przez $16/19$.

3.1. Optymalizacja w zakresie stosowalności kryterium statycznego

W zakresie stosowalności statycznego kryterium stateczności ze wzoru (3.6) wyrażamy sztywność przegubu c_2 przez objętość pręta, a następnie podstawiamy tę wielkość do wzoru na prędkość krytyczną (2.17); otrzymujemy w ten sposób:

$$(3.9) \quad U_k = \frac{1}{2Bb_0 l^2} \left(\frac{4V}{kl} \right)^{1/\kappa} \times \\ \times \frac{4[(4+\psi) + 4(1-\eta)(2+\psi)\vartheta] \mp 4\{[(4+\psi) + 4(1-\eta)(2+\psi)\vartheta]^2 - 4\psi[1+4(2-\eta)\vartheta+16(1-\eta)\vartheta^2]\}^{1/2}}{[1+4(2-\eta)\vartheta+16(1-\eta)\vartheta^2] \left(\frac{3n+1}{n+1} + \psi^\kappa \right)^{1/\kappa}}.$$

We wzorze tym objętość V jest parametrem stałym; optymalizacja polega więc na dobraniu takiej wartości ψ_{opt} , dla której prędkość krytyczna osiągnie maksimum. Obliczając

$$(3.10) \quad \frac{dU_k}{d\psi} = 0,$$

otrzymujemy równanie algebraiczne ze względu na ψ_{opt} . Oczywiście należy się jednak upewnić, czy funkcja określona równaniem (3.9) jest rzeczywista dla dowolnych wartości ψ (czy wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie); jeśli tak nie jest, pracochłonne poszukiwanie analitycznego maksimum lepiej zastąpić wykreślnym wyznaczeniem ψ_{opt} dla maksymalnej wartości funkcji (3.9). Na ogół maksymalna wartość funkcji leży bowiem na brzegu przedziału określoności funkcji (3.9).

Przykład 1. Przyjmując, że na pręt działa tylko ciśnienie boczne, a siła czołowa nie występuje (lub jest znikomo mała), tzn. zakładając $\vartheta=0$, otrzymujemy

$$(3.11) \quad U_k = \frac{1}{2Bb_0 l^2} \left(\frac{4V}{kl} \right)^{1/k} \frac{4 [(4+\psi) \mp \sqrt{\psi^2 + 4\psi + 16}]}{\left(\frac{3n+1}{n+1} + \psi^\kappa \right)^{1/k}}.$$

Funkcja ta jest określona dla dowolnych wartości ψ ; przyrównanie pierwszej pochodnej do zera prowadzi do równania określającego ψ_{opt} :

$$(3.12) \quad 3X^2 - mX^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} + 2mX - 16mX^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + 3m^2 = 0,$$

w którym $X = \psi^\kappa$, $m = (3n+1)/(n+1)$.

Równanie (3.12) jest algebraicznym równaniem stopnia drugiego ($\kappa=1$), czwartego ($\kappa=1/2$) i szóstego ($\kappa=1/3$), których rozwiązanie nie sprawia żadnej trudności. Dla $\kappa=1$ otrzymujemy

$$(3.13) \quad \psi_{opt} = \frac{(3n+1)(7n+13)}{(3n+1)(n+1) + (n+3)\sqrt{3(3n+1)(n+1)}}.$$

Obliczając objętość pręta optymalnego (dla $\psi = \psi_{opt}$) oraz pręta «pryzmatycznego» (dla $\psi=1$) o tej samej prędkości krytycznej możemy obliczyć zysk na materiale:

$$(3.14) \quad Z = \left(1 - \frac{V_{opt}}{V} \right) 100\%.$$

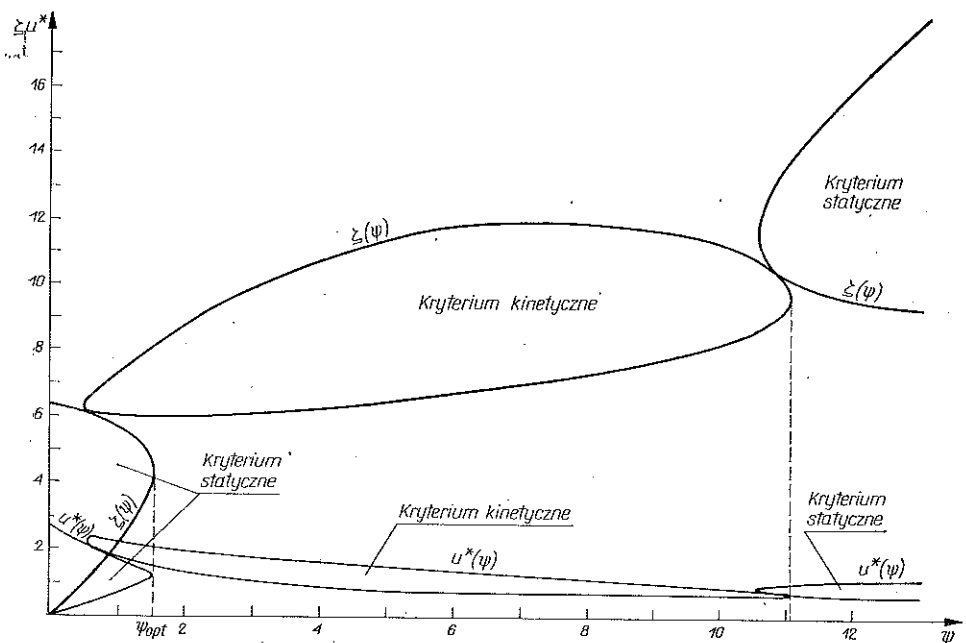
Dla $n=3$, $\kappa=1$ mamy $Z=25\%$.

Przykład 2. Zakładając, że na pręt działa ciśnienie boczne oraz śledząca siła czołowa określona przez parametry $\eta=1$ i $\vartheta=1$ oraz przyjmując $\kappa=1$, $n=2$ z równania (3.9), znajdujemy

$$(3.15) \quad U_k = \frac{1}{2Bb_0 l^2} \left(\frac{4V}{kl} \right) \frac{4 [(4+\psi) \mp \sqrt{\psi^2 - 12\psi + 16}]}{5(7/3 + \psi)}.$$

Funkcja (3.15) określona jest dla $-\infty < \psi \leq 1,528$ i $10,472 \leq \psi < \infty$ i osiąga wartość maksymalną na brzegu przedziału określoności dla $\psi_{opt} = 1,528$; jej przebieg przedstawiono na rys. 6. Zysk wynikający z zastąpienia pręta pryzmatycznego ($\psi=1$) przez pręt optymalny ($\psi_{opt} = 1,528$) o tej samej prędkości krytycznej wynosi tu 44,1%.

Przedstawiona tu optymalizacja opiera się wyłącznie na statycznym kryterium stateczności; pozostaje jeszcze do określenia ψ_{opt} na podstawie kryterium kinetycznego; może się bowiem okazać, iż leży ono wewnątrz przedziału $1,528 \leq \psi_{opt} \leq 10,472$.



Rys. 6

3.2. Optymalizacja w zakresie stosowalności kinetycznego kryterium stateczności

Analogiczny do przedstawionego w p. 3.1 sposób postępowania należy przeprowadzić również w tym przypadku; po wyrażeniu sztywności c_2 przez objętość pręta podstawiamy tę wielkość do wzoru (2.19) i obliczamy prędkość krytyczną płynu:

$$(3.16) \quad U_k = \frac{1}{2Bb_0 l^2} \left(\frac{4V}{kl} \right)^{1/\kappa} \frac{\zeta(\eta, \vartheta, \alpha, \gamma, n, \psi)}{\left(\frac{3n+1}{n+1} + \psi^\kappa \right)^{1/\kappa}}$$

Poszukiwanie wartości optymalnej ψ na drodze analitycznej jest tu bardzo uciążliwe i na ogół nie prowadzi do rozwiązania. Maksimum funkcji (3.16) występuje z reguły na brzegu przedziału określoności funkcji, dlatego najprędzej prowadzi do celu wykonanie wykresu funkcji (3.16) dla konkretnych przypadków szczególnych. Jeśli wartość maksymalna funkcji (3.16) wystąpi wewnątrz przedziału, w którym nie obowiązuje statyczne kryterium stateczności, należy porównać zysk na materiale otrzymany przy wykorzystaniu kryterium statycznego i kinetycznego oraz przyjąć tę wartość ψ_{opt} , która daje zysk większy.

Przykład 3. W przykładzie tym przyjmiemy, że masy m_1 i m_2 skupione są w środkach sztywnych prętów, tzn. $\alpha=1/4$, $\gamma=1/4$ oraz założymy takie same wartości pozostałych parametrów jak w przykładzie 2, $\kappa=1$, $\eta=1$, $\vartheta=1$ oraz $n=2$. Poszukujemy wartości ψ_{opt} , dla której funkcja

$$(3.17) \quad U_k = \frac{1}{2Bb_0 l^2} \left(\frac{4V}{kl} \right) \frac{\zeta(\psi)}{7/3 + \psi}$$

przyjmuje wartość maksymalną. Wartości $\zeta(\psi)$ należy obliczać ze wzoru (2.19) dla następujących wartości parametrów:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \mu &= \frac{3}{4}(1 + \psi), & d &= 5, \\ a &= \frac{3}{16}(1 + \psi), & e &= 8(4 + \psi), \\ b &= 39 + 7\psi, & f &= 64\psi, \\ c &= \frac{1}{8}(55 + 3\psi), \end{aligned}$$

Wykres funkcji $U^* = 2U_k Bb_0 l^3 k/4V$ określonej wzorem (3.17) oraz (3.15) przedstawiono na rys. 6. Jako optymalną wartość należy przyjąć $\psi_{opt} = 1,528 + \varepsilon$, a więc nieco większą od otrzymanej w przykładzie 2, ponieważ krytyczna prędkość U jest dla tej wartości największa. Na rys. 6 przedstawiono również wykresy funkcji $\zeta(\psi)$ określonych wzorami (2.17) i (2.19); interesujący jest tu bowiem fakt, że stosując kryterium kinetyczne otrzymujemy w przedziale $10,472 \leq \psi \leq 11,05$ wartości prędkości krytycznej mniejsze od obliczonych na podstawie statycznego kryterium stateczności.

Na zakończenie należy stwierdzić, że uzyskane w niniejszej pracy rozwiązania ściśle dla modelu Zieglera stanowią jedynie dość duże przybliżenie rozwiązań dla pręta rzeczywistego (dotychczas nie otrzymanych); mogą one jednak zorientować w charakterze optymalnego kształtu pręta znajdującego się w strumieniu poruszającego się płynu. Szczególnie trudne do rozwiązania zagadnienie optymalizacji w zakresie stosowalności kinetycznego kryterium stateczności zostało tu, dzięki przyjęciu prostego modelu, rozwiązane efektywnie.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. BECK, *Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes*, ZAMP, 3, 3 (1952), 225—228.
2. A. GAJEWSKI, *Stateczność niepryzmatycznych prętów w strumieniu płynu*, Mech. Teor. i Stos., 7, 3, 311—321, 1969.
3. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych za-*

- gadnieniach stateczności*, Prace Komisji Mechaniki Stosowanej PAN, Mechanika z. 4 (1970), 3-27.
4. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *An optimal forming of a bar compressed with subtangential force in elastic-plastic range*, Arch. Mech. Stos., **23**, 2, 147-165, 1971.
 5. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *On the loss of stability of a rod under a super-tangential force*, Arch. Mech. Stos., **15**, 1, 7-31, 1963.
 6. Z. KORDAS, *Stateczność pręta opływającego równoległym strumieniem płynu przy uwzględnieniu oporu czołowego*, Rozpr. Inżyn., **13**, 1, 19-41, 1965.
 7. A. KOWALSKI, *Stateczność prętów o skokowo zmiennym przekroju ściskanych siłą śledzącą*, Rozpr. Inżyn., **15**, 2, 197-209, 1967.
 8. M. LEVINSON, *Application of the Galerkin and Ritz methods to nonconservative problems of elastic stability*, ZAMP, **17**, 3, 431-442, 1966.
 9. L. LIBRESCU, L. BEINER, *On the weight optimization problem for supersonic rectangular flat panels with specified flutter speed*, Rev. roum. sci. techn., Série méca. appl., **17**, 5, 1087-1102, 1972.
 10. R. H. PLAUT, *On the optimal structural design for a nonconservative elastic stability problem*, Journal of Optimization Theory and Applications, **7**, 1, 52-60, 1971.
 11. A. T. WEISSHAAR, *Aeroelastic optimization of a panel in high Mach number supersonic flow*, J. Aircraft, **9**, 9, 611-617 (1972).
 12. M. ŻYCZKOWSKI, A. GAJEWSKI, *Optimal structural design in non-conservative problems of elastic stability*, Instability of Continuous Systems, IUTAM Symposium, Herrenalb, 1969, Springer-Verlag, 295-301, 1971.

Резюме

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ, ПОМЕЩЕННОГО В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Дано решение задачи об оптимизации формы стержня, расположенного в параллельном потоке жидкости и подвергнутого одновременному воздействию бокового давления и торцевого усилия. При этом действительный стержень заменяется моделью Циглера с двумя степенями свободы. Принято, что боковое давление определено простым законом обтекания, т.е.з. поршневым законом, а торцевое усилие изменяет свое направление во время движения стержня во всем диапазоне изменения т.е.з. коэффициента слежения. Исходя как из статического, так и кинетического критериев устойчивости, произведена минимизация соответствующим образом определенного объема модели Циглера, при условии постоянства критической скорости обтекания.

Полученное решение, являющееся точным решением для принятой модели, для действительного стержня даст лишь некоторое приближение. Тем не менее, оно позволяет сориентироваться в характере оптимальной формы стержня, помещенного в поток обтекающей жидкости.

SUMMARY

OPTIMIZATION OF THE FORM OF A SLENDER ROD PLACED IN A FLUID STREAM

The rod is replaced by a model with two degrees of freedom (Ziegler model) in order to solve the problem of optimization of the form of a rod placed in parallel fluid flow and subjected to simultaneous action of lateral and axial pressures (during the motion). The lateral pressure is

assumed to be given by a very simple flow rule (piston rule), and the axial force changes its orientation within the entire range of the tracking coefficient. Using both the static and kinematic stability criteria, the suitably defined volume of the Ziegler model is minimized at a given critical velocity of the fluid. The solution derived is accurate for the model, and represents only an approximation for the actual rod; however, it may serve as a general information on the character of optimal rod forms in fluid flows.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 maja 1973 r.
