

SKRĘCANIE NIESWOBODNE PRĘTÓW ZŁOŻONYCH O PRZEKROJU OTWARTYM

PIOTR RAPP, KAZIMIERZ WRZEŚNIEWSKI i JACEK WDOWICKI
(POZNAŃ)

W pracy niniejszej rozpatrzony został przypadek skręcania nieswobodnego prętów złożonych z elementów cienkościennych i elementów o przekroju zwartym. Rozpatrzono przypadek ogólny zakładając, że przekrój poprzeczny pręta jest stały na całej jego długości oraz profil pręta jest profilem otwartym. Poza tym nie zakłada się żadnych ograniczeń ani co do kształtu elementów składowych, ani co do stałych materiałowych poszczególnych elementów składowych pręta. Sformułowane zostały wzory na wyznaczenie sił przekrojowych i środka sztywności oraz równanie różniczkowe kąta skręcenia pręta, analogiczne do równania WŁASOWA, dotyczącego prętów cienkościennych otwartych.

OZNACZENIA PODSTAWOWE DLA ELEMENTU i

- E^i moduł Younga,
- G^i moduł sprężystości postaciowej,
- ν^i współczynnik Poissona,
- $E_1^i = \frac{E^i}{1 - (\nu^i)^2}$ moduł zginania walcowego płyt,
- J_x^i, J_y^i główne momenty bezwładności,
- J_{ω}^i główny wycinkowy moment bezwładności,
- J_s^i moment bezwładności na czyste skręcanie,
- A^i pole powierzchni przekroju poprzecznego.

Spotykane w literaturze rozwiązania dotyczące technicznej teorii skręcania nieswobodnego prętów cienkościennych opierają się głównie na teorii W. Z. WŁASOWA [1] i dotyczą prętów o stałej lub nieznacznie zmieniającej się w sposób ciągły lub skokowy grubości ścianki. W pracach [2 i 3] omawiane są pręty złożone z płaszcza i żeber podłużnych traktując je jako pręty cienkościenne z pasami skupionymi, w których oddziaływanie na pręt odniesione jest do linii środkowej płaszcza i powoduje skokowe zmiany naprężeń stycznych, występujących w płaszczu pręta. Takie postępowanie jest dostatecznie dokładne, gdy żebra te są elementami o przekroju zwartym i stosunkowo małym przekroju poprzecznym.

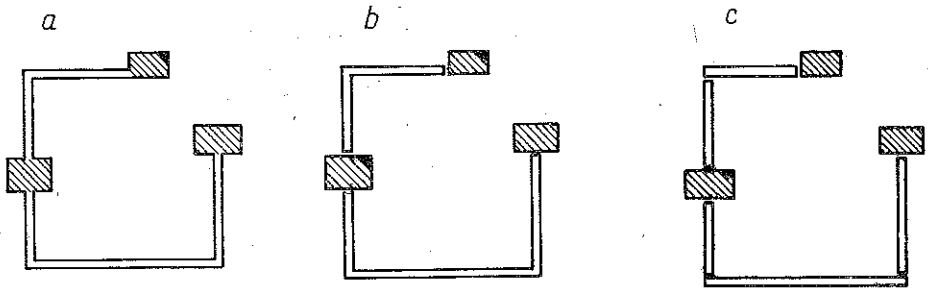
W pracy niniejszej rozpatrzony zostanie przypadek skręcania nieswobodnego pręta złożonego z elementów cienkościennych i elementów zwartych, przy czym zakłada się, że poprzeczne wymiary elementów zwartych mogą być tego rzędu, co wymiary konturu pozostałych elementów. Pręty takie mogą występować jako elementy nośne w konstrukcjach budowlanych, a także w urządzeniach mechanicznych.

1. WPROWADZENIE

W pracy rozpatrzony zostanie przypadek ogólny przy następujących założeniach: 1) przekrój poprzeczny jest stały na długości pręta, 2) profil pręta jest profilem otwartym, 3) stałe materiałowe nie zmieniają się na długości pręta oraz 4) stałe materiałowe mogą zmieniać się wzdłuż linii środkowej konturu przekroju poprzecznego. Poza tym nie zakłada się żadnych ograniczeń co do kształtu i ilości elementów składowych oraz ich stałych materiałowych. Przekrój poprzeczny pręta może składać się z dowolnej liczby, dowolnie ukształtowanych elementów cienkościennych o profilu otwartym i elementów o przekroju zwartym. Każdy wyodrębniony element składowy może mieć inne moduły sprężystości liniowej i postaciowej. Obciążenie pręta przyjmuje się w postaci momentu skręcającego, dowolnie rozłożonego na jego długości. Analiza skręcania prętów cienkościennych prowadzona będzie na podstawie teorii W. Z. WŁASOWA [1].

Wyznaczone zostaną siły wewnętrzne i przemieszczenia oraz środek sztywności pręta złożonego. Wyprowadzone zostanie również równanie różniczkowe kąta skręcania.

Niech dany będzie pręt o przekroju złożonym (rys. 1a). Jako model obliczeniowy przyjmuje się pręt składający się z elementów, jakie powstały po rozcięciu tego pręta wzdłuż tworzących (rys. 1b i rys. 1c). W miejscach rozcięcia spełnione muszą być warunki zgodności przemieszczeń podłużnych, a dla układu warunki zgodności przemieszczeń poprzecznych.

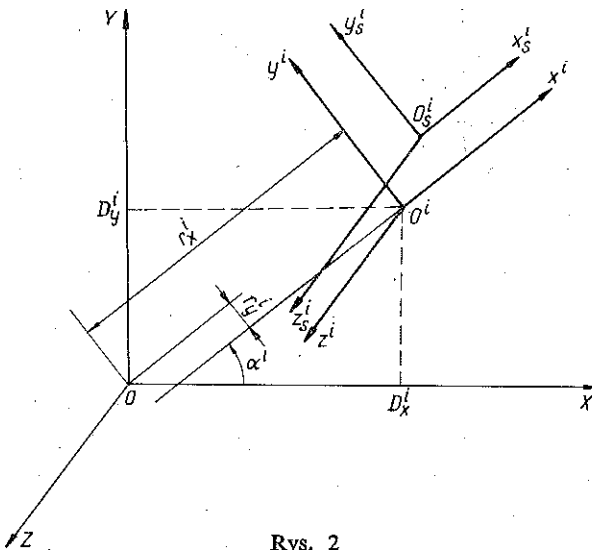


Rys. 1

Spełnienie warunków zgodności przemieszczeń gwarantują odpowiednio dobrane siły poprzeczne i momenty skręcające, występujące w każdym z prętów składowych, oraz naprężenia styczne, działające wzdłuż tworzących rozcięcia poszczególnych prętów składowych. Podziału pręta złożonego na elementy składowe dokonać można dowolnie, warunkiem jednak jest, aby dla poszczególnych elementów składowych znane były środek sztywności oraz zasadnicze charakterystyki przekroju. Zakłada się, że w obrębie jednego elementu składowego stałe materiałowe są stałe. Dla prętów niejednorodnych stałe materiałowe dla każdego elementu składowego przyjmuje się jako średnie dla danego elementu, a liczba elementów, na które zostaje podzielony pręt, rzutuje na dokładność, z jaką aproksymuje się daną zmienność stałych materiałowych.

2. UKŁADY WSPÓLRZĘDNYCH

Niech dany będzie pręt o przekroju złożonym. Dokonujemy podziału pręta na p elementów składowych, wprowadzając w myślowych rozcięć. Elementy składowe indeksujemy literą i : $i=1, 2, \dots, p$, a rozcięcia literą j : $j=1, 2, \dots, w$. Zagadnienie rozpatrywane będzie w głównym układzie współrzędnych $OXYZ$. Oprócz tego każdy, np. i -ty pręt składowy ma dwa lokalne układy współrzędnych. Jeden z nich to układ $O_s^i x_s^i y_s^i z_s^i$ przechodzący przez środek ciężkości przekroju elementu składowego i ; drugi to układ $O^i x^i y^i z^i$, równoległy do poprzedniego, przechodzący przez środek sztywności pręta i . Oś x_s^i, y_s^i są głównymi osiami bezwładności przekroju pręta składowego i . Wszystkie układy współrzędnych przyjmuje się jako lewoskrętne (rys. 2, por. także rys. 5) i wszystkie mają początek w tym samym przekroju pręta.



Rys. 2

Oznaczając przez D_x^i i D_y^i współrzędne środka O^i układu lokalnego w układzie głównym, a przez r_x^i i r_y^i współrzędne środka O układu głównego w układzie lokalnym $O^i x^i y^i$, związek między $D_x^i, D_y^i, r_x^i, r_y^i$ jest następujący (rys. 2)

$$(2.1) \quad \begin{aligned} D_x^i &= -r_x^i \cos \alpha^i + r_y^i \sin \alpha^i, \\ D_y^i &= -r_x^i \sin \alpha^i - r_y^i \cos \alpha^i. \end{aligned}$$

Kąt α^i jest kątem zawartym między osiami x^i i X . Na rys. 2 kąt α^i jest dodatni.

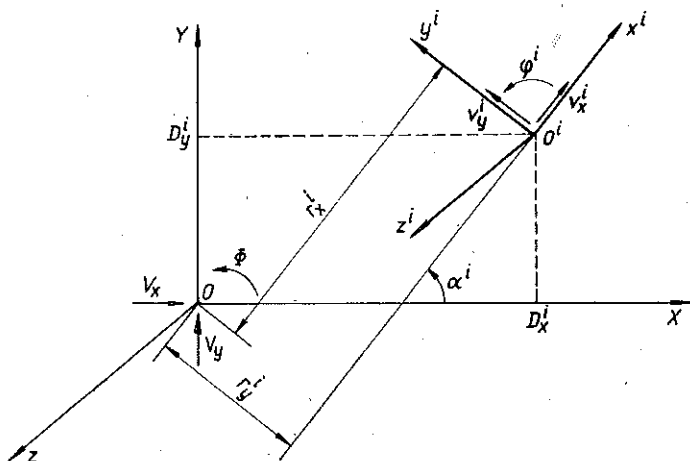
3. WARUNKI ZGODNOŚCI PRZEMIESZCZEŃ POPRZECZNYCH

W rozważaniach zakłada się, że kontur przekroju poprzecznego pręta nie zmienia się podczas odkształcenia. Przy tym założeniu zależności między przemieszczeniami V_x, V_y i Φ pręta złożonego, mierzonymi w głównym układzie $OXYZ$ i prze-

mieszczeniami v_x^i, v_y^i, φ^i pręta składowego i , mierzonymi w układzie $Ox^i y^i z^i$, na podstawie rys. 3 są następujące:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v_x^i &= V_x \cos \alpha^i + V_y \sin \alpha^i + r_y^i \Phi, \\ v_y^i &= -V_x \sin \alpha^i + V_y \cos \alpha^i - r_x^i \Phi, \\ \varphi^i &= \Phi. \end{aligned}$$

Przemieszczenia pokazane na rys. 3 przyjmuje się jako dodatnie.



Rys. 3

4. SIŁY POPRZECZNE W PRĘTACH SKŁADOWYCH

Niech w pręcie składowym i występują wypadkowe siły poprzeczne T_x^i, T_y^i przechodzące przez środek sztywności, wypadkowy moment skręcający M_s^i oraz niech pręt i będzie obciążony siłami stycznymi n_j , działającymi wzdłuż każdego rozcięcia j oddzielającego element składowy i od pozostałych elementów składowych. Zakładamy, że naprężenia styczne, pochodzące od skręcania bimomentowego, nie zmieniają się na grubości ścianki elementu cienkościennego. Obciążenie n_j rozłożone w sposób ciągły na długości pręta jest obciążeniem wypadkowym naprężeń stycznych, działających na ściankę utworzoną przez rozcięcie. Zatem jest ono przyłożone wzdłuż tworzącej, leżącej w środku ścianki utworzonej przez rozcięcie. Niech rozcięcie j przylega do elementu składowego i . Każdej parze uporządkowanej (i, j) przyporządkowujemy liczby $a_{x_j}^i, a_{y_j}^i, \omega_j^i$, gdzie $a_{x_j}^i, a_{y_j}^i$ oznaczają współrzędne punktu przyłożenia obciążenia n_j do elementu składowego i w układzie lokalnym $O_s^i x_s^i y_s^i$ (rys. 4a) oraz ω_j^i oznacza współrzędną wycinkową punktu przyłożenia obciążenia n_j do elementu składowego i względem środka sztywności O^i (rys. 4b). Jeżeli rozcięcie j nie przylega do elementu składowego i , to przyjmujemy, że $a_{x_j}^i = a_{y_j}^i = \omega_j^i = 0$.

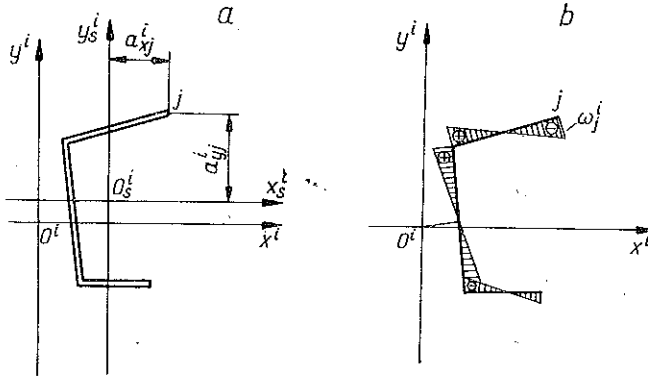
Niech element składowy i sąsiaduje z elementem składowym k przez rozcięcie j . Jeżeli na element i działa obciążenie n_j , to na element k działa obciążenie $-n_j$. Dla każdego rozcięcia j przyjmujemy jedną funkcję niewiadomą n_j . Załóżmy, że

dla każdego rozcięcia przyjęto niewiadomą funkcję. Każdej parze uporządkowanej przyporządkujemy liczbę δ_j^i następująco:

$\delta_j^i = 1$, gdy rozcięcie j przylega do elementu i oraz niewiadoma funkcja n_j przyjęta do obliczeń działa na element składowy i ;

$\delta_j^i = -1$, gdy rozcięcie j przylega do elementu i , który obciążony jest funkcją $-n_j$;

$\delta_j^i = 0$, gdy rozcięcie j nie przylega do elementu i .



Rys. 4

W związku z powyższym siły przekrojowe T_x^i , T_y^i i M_s^i są określone przez następujące wzory:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} T_x^i &= -E^i J_y^i v_x^{i''''} + \sum_{j=1}^w a_{xj}^i \delta_j^i n_j, \\ T_y^i &= -E^i J_x^i v_y^{i''''} + \sum_{j=1}^w a_{yj}^i \delta_j^i n_j, \\ M_s^i &= -E_1^i J_\omega^i \phi^{i''''} + \sum_{j=1}^w \omega_j^i \delta_j^i n_j + G^i J_s^i \phi^{i''}, \end{aligned}$$

przy czym przyjęto, że obciążenie n_j jest dodatnie, gdy skierowane jest zgodnie z osią Z (por. [8], część I, § 18).

Wycinkowy moment bezwładności J_ω^i można obliczyć bez uwzględnienia deplanacji na grubości ścianki w przypadku, gdy jest ona cienka. W przeciwnym przypadku należy skorzystać z dokładniejszej metody powierzchni wycinkowych F. BLEICHA [4 i 5], która uwzględnia deplanację na grubości ścianki. Metoda F. Bleicha umożliwia wyznaczenie J_ω^i również dla przekrojów, dla których według teorii W. Z. Własowa $J_\omega^i = 0$. Dla wielu przekrojów zwartych można również z wystarczającą dokładnością stosować do wyznaczenia J_ω^i metodę F. Bleicha. Dla przekrojów, których deplanacja w istotny sposób zależy od naprężeń stycznych (np. dla przekroju prostokątnego) nie zachodzi pełna analogia do teorii W. Z. Własowa i tymi przypadkami

nie będziemy się zajmować. Dla tych prętów przyjmować będziemy równanie kąta skręcenia w postaci

$$GJ_s \Phi' = M_s,$$

gdzie J_s zależy od kształtu przekroju. Dla niektórych przekrojów wzory na obliczenie J_s podane są np. w [6, § 27], [7, § 76].

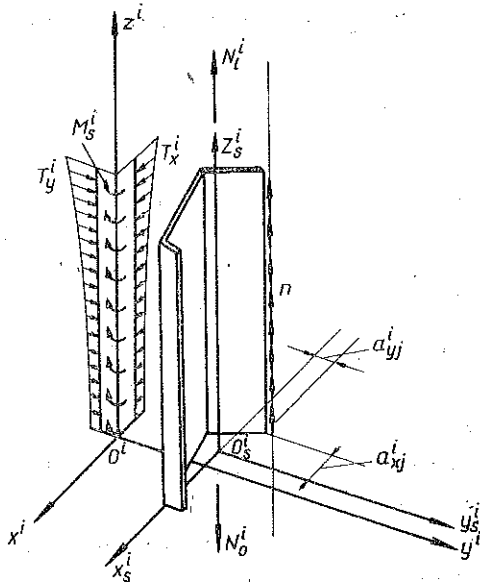
5. WARUNKI ZGODNOŚCI PRZEMIESZCZEŃ PODŁUŻNYCH

Przemieszczenie podłużne u_j^i punktu leżącego na linii środkowej rozcięcia j przylegającego do elementu składowego i , w ogólnym przypadku, wywołane jest 1) zginaniem pręta składowego, 2) deplanacją przekroju pręta składowego, 3) działaniem siły osiowej N^i równej (rys. 5)

$$(5.1) \quad N^i = \int_z^l \sum_{j=1}^w \delta_j^i n_j dt + N_i^i,$$

oraz 4) przemieszczeniem początkowym z_0^i pręta składowego i . Zgodnie z rys. 5 otrzymamy

$$(5.2) \quad u_j^i = -(v_x^{i'} a_{xj}^i + v_y^{i'} a_{yj}^i + \varphi^{i'} \omega_j^i) + \frac{1}{E^i A^i} \int_0^z N^i dt + z_0^i.$$



Rys. 5

Niech elementy składowe i oraz k sąsiadują z sobą przez rozcięcie j . Warunek zgodności przemieszczeń wzdłuż rozcięcia j ma postać

$$(5.3) \quad u_j^i = u_j^k.$$

Stąd oraz ze wzoru (5.2) po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem z otrzymamy

$$(5.4) \quad (\varphi_x'''' a_{xj}^i + \varphi_y'''' a_{yj}^i + \varphi'''' \omega_j^i) - (\varphi_x^{k''''} a_{xj}^k + \varphi_y^{k''''} a_{yj}^k + \varphi^{k''''} \omega_j^k) = \\ = -\frac{1}{E^i A^i} \sum_{j=1}^w \delta_j^i n_j + \frac{1}{E^k A^k} \sum_{j=1}^w \delta_j^k n_j.$$

Uzględniając w równaniach (5.4) warunki zgodności przemieszczeń poprzecznych (3.1), otrzymuje się po przekształceniach

$$(5.5) \quad \sum_{j=1}^w \left(-\frac{\delta_j^i}{E^i A^i} + \frac{\delta_j^k}{E^k A^k} \right) n_j = g_{xj} V_x'''' + g_{yj} V_y'''' + g_{\phi j} \Phi''''.$$

W równaniu tym wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(5.6) \quad g_{xj} = c_{xj}^i - c_{xj}^k, \quad g_{yj} = c_{yj}^i - c_{yj}^k, \quad g_{\phi j} = c_{\phi j}^i - c_{\phi j}^k,$$

gdzie

$$(5.7) \quad \begin{aligned} c_{xj}^i &= a_{xj}^i \cos \alpha^i - a_{yj}^i \sin \alpha^i, \\ c_{yj}^i &= a_{xj}^i \sin \alpha^i + a_{yj}^i \cos \alpha^i, \\ c_{\phi j}^i &= a_{xj}^i r_y^i - a_{yj}^i r_x^i + \omega_j^i. \end{aligned}$$

Równanie (5.5) układa się dla każdego $j=1, 2, \dots, w$. Otrzymuje się wtedy układ w równań, w którym w niewiadomych funkcji n_j wyraża się przez funkcje przemieszczeń V_x i V_y i Φ pręta złożonego. Dla pręta otwartego macierz przy funkcjach n_j jest zawsze nieosobliwa. Dla pręta zamkniętego macierz ta jest zawsze osobliwa. Wynika to stąd, że dla prętów składowych przyjęto przy zginaniu hipotezę płaskich przekrojów (założenie to jest równoważne założeniu W. Z. Własowa, że odkształcenia postaciowe są równe zero).

6. RÓWNANIE RÓWNOWAGI MOMENTÓW SKRĘCAJĄCYCH

Zgodnie z rys. 6 równanie równowagi momentów skrecających w danym przekroju złożonym względem osi Z głównego układu $OXYZ$ ma postać

$$(6.1) \quad M_s = \sum_{i=1}^p [T_x^i r_y^i - T_y^i r_x^i + M_s^i],$$

gdzie M_s oznacza całkowity moment skrecający w przekroju pręta złożonego.

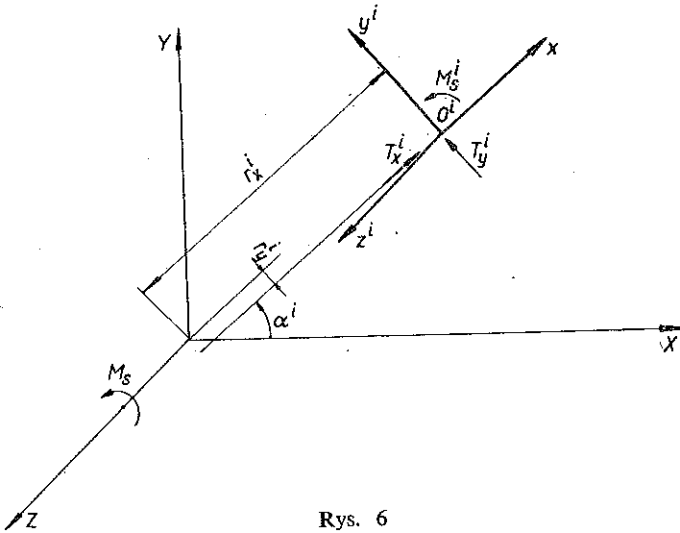
Wstawiając do równania (6.1) wyrażenia (4.1) oraz (3.1) otrzymuje się

$$(6.2) \quad M_s = -V_x'''' \sum_{i=1}^p [E^i J_y^i r_y^i \cos \alpha^i + E^i J_x^i r_x^i \sin \alpha^i] + \\ + V_y'''' \sum_{i=1}^p [E^i J_x^i r_x^i \cos \alpha^i - E^i J_y^i r_y^i \sin \alpha^i] - \\ - \Phi'''' \sum_{i=1}^p [E^i J_x^i (r_x^i)^2 + E^i J_y^i (r_y^i)^2 + E^i J_\omega^i] + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^w c_{\phi j}^i \delta_j^i n_j + \Phi' \sum_{i=1}^p G^i J_s^i.$$

Układając dla każdego j równanie (5.5) otrzymamy układ równań o niewiadomych n_j . Rozwiązanie tego układu ogólnie można przedstawić w postaci

$$(6.3) \quad n_j = s_{xj} V_x'''' + s_{yj} V_y'''' + s_{\phi j} \Phi''''', \quad j=1, 2, \dots, w,$$

gdzie s_{xj} , s_{yj} , $s_{\phi j}$ są liczbami zależnymi wyłącznie od kształtu przekroju pręta złożonego.



Rys. 6

Wstawiając wyrażenie (6.3) do równania (6.2) otrzymamy

$$(6.4) \quad M_s = -V_x'''' \sum_{i=1}^p \left[E^i J_y^i r_x^i \cos \alpha^i + E^i J_x^i r_x^i \sin \alpha^i - \sum_{j=1}^w c_{\phi j}^i s_{xj} \delta_j^i \right] + \\ + V_y'''' \sum_{i=1}^p \left[E^i J_x^i r_x^i \cos \alpha^i - E^i J_y^i r_x^i \sin \alpha^i + \sum_{j=1}^w c_{\phi j}^i s_{yj} \delta_j^i \right] - \\ - \Phi'''' \sum_{i=1}^p \left[E^i J_x^i (r_x^i)^2 + E^i J_y^i (r_x^i)^2 + E_1^i J_\omega^i - \sum_{j=1}^w c_{\phi j}^i s_{\phi j} \delta_j^i \right] + \Phi' \sum_{i=1}^p G^i J_s^i.$$

Równanie (6.4) stanowi ogólną zależność między zewnętrznym momentem skręcającym, obciążającym pręt, a przemieszczeniami pręta złożonego, mierzonymi w głównym układzie współrzędnych.

7. ŚRODEK SZTYWNOŚCI PRĘTA O PRZEKROJU ZŁOŻONYM

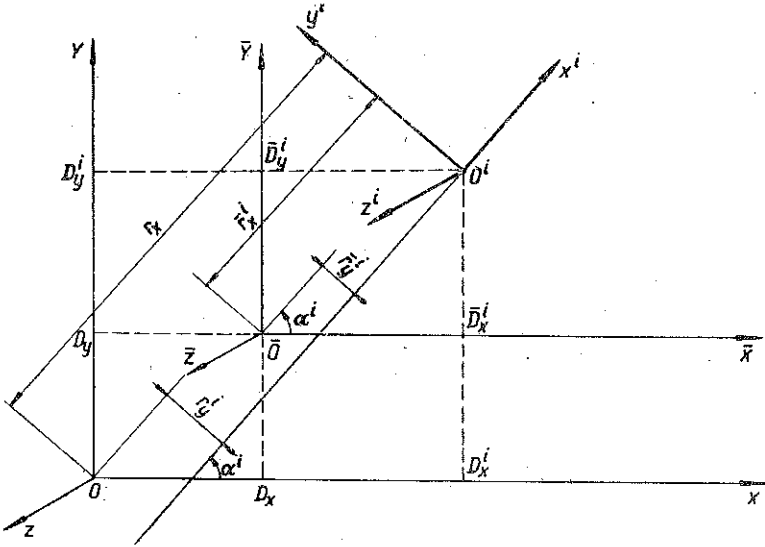
W technicznej teorii prętów środek ścinania oraz środek skręcania identyfikuje się jako jeden punkt, noszący nazwę środka sztywności przekroju pręta. Siła poprzeczna, przyłożona w środku sztywności, wywołuje tylko zgięcie pręta nie wywołując skręcania, natomiast moment skręcający powoduje obrót przekroju wokół środka sztywności. Jeśli umieścimy główny układ współrzędnych w środku sztywności przekroju

pręta złożonego i obciążymy pręt tylko momentem skręcającym, to pręt ulegnie w tym układzie wyłącznie skręceniu, nie doznając przemieszczeń V_x i V_y . Wynika stąd, że współczynniki przy V_x''' i V_y''' w równaniu (6.4), w przypadku umieszczenia głównego układu współrzędnych $OXYZ$ w środku sztywności, równe są zero. Wniosek powyższy posłuży do wyznaczenia położenia środka sztywności przekroju pręta złożonego.

Niech oś Z układu współrzędnych $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ przechodzi przez środek sztywności przekroju złożonego, a układ ten jest przesunięty względem wyjściowego układu $OXYZ$ o wielkości D_x i D_y (rys. 7). Oznaczając przez \bar{r}_x^i i \bar{r}_y^i współrzędne środka \bar{O} układu $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ w układzie O^i, x^i, y^i, z^i pręta składowego i , otrzymuje się z równania (6.4)

$$(7.1) \quad \sum_{i=1}^p \left[E^i J_y^i \bar{r}_y^i \cos \alpha^i + E^i J_x^i \bar{r}_x^i \sin \alpha^i - \sum_{j=1}^w \bar{c}_{\phi_j}^i s_{xj} \delta_j^i \right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^p \left[E^i J_x^i \bar{r}_x^i \cos \alpha^i - E^i J_y^i \bar{r}_y^i \sin \alpha^i + \sum_{j=1}^w \bar{c}_{\phi_j}^i s_{yj} \delta_j^i \right] = 0.$$



Rys. 7

Na podstawie rys. 7 i wzorów (2.1) otrzymuje się wzory

$$(7.2) \quad \bar{D}_x^i = -\bar{r}_x^i \cos \alpha^i + \bar{r}_y^i \sin \alpha^i,$$

$$\bar{D}_y^i = -\bar{r}_x^i \sin \alpha^i - \bar{r}_y^i \cos \alpha^i.$$

Z rys. 7 wynikają wzory

$$(7.3) \quad \bar{D}_x^i = D_x^i - D_x, \quad \bar{D}_y^i = D_y^i - D_y.$$

Wstawiając (7.3) do (7.2) i rozwiązując ten układ względem \bar{r}_x^i i \bar{r}_y^i , otrzymuje się

$$(7.4) \quad \bar{r}_x^i = r_x^i + D_x \cos \alpha^i + D_y \sin \alpha^i,$$

$$\bar{r}_y^i = r_y^i - D_x \sin \alpha^i + D_y \cos \alpha^i.$$

Podstawiając do równań (7.1) wyrażenia (7.4) i uwzględniając zależność

$$(7.5) \quad \bar{c}_{\Phi_j}^i = a_{x_j}^i \bar{r}_y^i - a_{y_j}^i \bar{r}_x^i + \omega_j^i$$

otrzymuje się układ równań (7.1) w postaci

$$(7.6) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \left[E^i J_y^i r_y^i \cos \alpha^i + E^i J_x^i r_x^i \sin \alpha^i - \sum_{j=1}^w c_{\Phi_j}^i s_{x_j} \delta_j^i \right] - \\ & - D_x \sum_{i=1}^p \left[(E^i J_y^i - E^i J_x^i) \sin \alpha^i \cos \alpha^i - \sum_{j=1}^w c_{y_j}^i s_{x_j} \delta_j^i \right] + \\ & + D_y \sum_{i=1}^p \left[E^i J_y^i \cos^2 \alpha^i + E^i J_x^i \sin^2 \alpha^i - \sum_{j=1}^w c_{x_j}^i s_{x_j} \delta_j^i \right] = 0, \\ & \sum_{i=1}^p \left[E^i J_x^i r_x^i \cos \alpha^i - E^i J_y^i r_y^i \sin \alpha^i + \sum_{j=1}^w c_{\Phi_j}^i s_{y_j} \delta_j^i \right] + \\ & + D_x \sum_{i=1}^p \left[E^i J_x^i \cos^2 \alpha^i + E^i J_y^i \sin^2 \alpha^i - \sum_{j=1}^w c_{y_j}^i s_{y_j} \delta_j^i \right] - \\ & - D_y \sum_{i=1}^p \left[(E^i J_y^i - E^i J_x^i) \sin \alpha^i \cos \alpha^i - \sum_{j=1}^w c_{x_j}^i s_{y_j} \delta_j^i \right] = 0. \end{aligned}$$

Liczby D_x i D_y , spełniające układ (7.6) są współrzędnymi środka sztywności przekroju złożonego w układzie współrzędnych $OXYZ$.

8. RÓWNIANIE RÓŻNICZKOWE KĄTA SKRĘCANIA PRĘTA O PRZEKROJU ZŁOŻONYM

Równanie różniczkowe kąta skręcania otrzymuje się z równania (6.4), pisząc je w układzie współrzędnych przechodzącym przez środek sztywności przekroju pręta. Równanie to przyjmuje postać

$$(8.1) \quad M_s = -(E_1 J_\omega)_z \Phi'''' + (GJ_s)_z \Phi',$$

gdzie oznaczono

$$(8.2) \quad \begin{aligned} (E_1 J_\omega)_z &= \sum_{i=1}^p \left[E^i J_x^i (\bar{r}_x^i)^2 + E^i J_y^i (\bar{r}_y^i)^2 + E_1^i J_\omega^i - \sum_{j=1}^w \bar{c}_{\Phi_j}^i \bar{s}_{\Phi_j} \delta_j^i \right], \\ (GJ_s)_z &= \sum_{i=1}^p G^i J_s^i. \end{aligned}$$

Równanie (8.1) ma postać analogiczną do równania różniczkowego skręcania prętów cienkościennych o przekrojach otwartych w teorii W. Z. Własowa. W szczególności jeżeli pręt jest w całości cienkościenny i stałe materiałowe nie ulegają

zmianie, to że wzorów (8.2) otrzymamy dla $E=1$ wzór na wycinkowy moment bezwładności J_ω oraz moment bezwładności czystego skręcania J_s :

$$(8.3) \quad J_\omega = \sum_{i=1}^p \left[J_x^i (\bar{r}_x^i)^2 + J_y^i (\bar{r}_y^i)^2 + \frac{1}{1-\nu^2} J_\omega^i - \sum_{j=1}^w \bar{c}_{\phi_j}^i \bar{s}_{\phi_j} \delta_j^i \right],$$

$$J_s = \sum_{i=1}^p J_s^i.$$

Znając funkcję Φ można łatwo wyznaczyć funkcję n_j , T_x^i , T_y^i i M_s^i . Funkcja n_j określona wzorem (6.3) w układzie $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ przyjmuje postać

$$(8.4) \quad n_j = \bar{s}_{\phi_j} \Phi''' = (s_{\phi_j} - D_x s_{y_j} + D_y s_{x_j}) \Phi''''.$$

9. SIŁY WEWNĘTRZNE W ELEMENTACH SKŁADOWYCH

Po rozwiązaniu równania różniczkowego (8.1) z odpowiednimi warunkami brzegowymi można określić siły wewnętrzne w poszczególnych jego elementach. Rozpatrzmy dalej przypadki, gdy końce pręta są sztywno lub swobodnie zamocowane «na deplanację».

Dla elementu i w układzie $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ funkcje przemieszczeń v_x^i , v_y^i i φ^i ze wzorów (3.1) mają postać

$$(9.1) \quad v_x^i = \bar{r}_y^i \Phi, \quad v_y^i = -\bar{r}_x^i \Phi, \quad \varphi^i = \Phi.$$

Ze wzorów (4.1) uwzględniając (9.1) i (8.4) otrzymamy

$$(9.2) \quad T_x^i = \left[-E^i J_y^i \bar{r}_y^i + \sum_{j=1}^w a_{x_j}^i \delta_j^i \bar{s}_{\phi_j} \right] \Phi'''' ,$$

$$T_y^i = \left[E^i J_x^i \bar{r}_x^i - \sum_{j=1}^w a_{y_j}^i \delta_j^i \bar{s}_{\phi_j} \right] \Phi'''' ,$$

$$M_s^i = \left[-E_1^i J_\omega^i + \sum_{j=1}^w \omega_j^i \delta_j^i \bar{s}_{\phi_j} \right] \Phi'''' + G^i J_s^i \Phi'.$$

Momenty zginające oraz bimoment można wyrazić wzorami

$$(9.3) \quad M_x^i = E^i J_x^i \bar{r}_x^i \Phi'', \quad M_y^i = -E^i J_y^i \bar{r}_y^i \Phi'', \quad B^i = -E_1^i J_\omega^i \Phi''.$$

Wstawiając do (9.2) i (9.3) zmienną $z=0$ lub $z=l$ otrzymamy siły działające na końcach elementu i . Wyznaczyć należy siłę normalną w elemencie i . Ze wzoru (5.2) przemieszczenie środka ciężkości elementu i wynosi

$$(9.4) \quad u^i = \frac{1}{E^i A^i} \int_0^z N^i dt + z_0^i = \frac{1}{E^i A^i} \int_0^z dt \int_t^l \sum_{j=1}^w \bar{s}_{\phi_j} \delta_j^i \Phi'''' du +$$

$$+ \frac{N_1^i}{E^i A^i} z + z_0^i = \left[\frac{1}{E^i A^i} \sum_{j=1}^w \bar{s}_{\phi_j} \delta_j^i \right] (\Phi_1'' - \Phi' + \Phi_0') + \frac{N_1^i}{E^i A^i} z + z_0^i.$$

Po zróżniczkowaniu i uwzględnieniu, że $E^i A^i u^i = N^i$, otrzymamy

$$(9.5) \quad N^i = (\Phi_i'' - \Phi'') \sum_{j=1}^w \bar{s}_{\phi_j} \delta_j^i + N_i^i.$$

Niech jeden koniec, np. $z=0$, będzie swobodny względem deplanacji. Wtedy $N_0^i=0$ i $\Phi_0''=0$. Uwzględniając to, z warunku (9.5) otrzymamy

$$(9.6) \quad \sum_{i=1}^w \bar{s}_{\phi_j} \delta_j^i \Phi_i'' + N_i^i = 0.$$

Niech teraz oba końce będą sztywne względem deplanacji. Wtedy $z_0^i=0$, $u_1^i=0$, $\Phi_0'=\Phi_1'=0$. Z równania (9.4) przy uwzględnieniu tych warunków mamy jak poprzednio wzór (9.6). Ze wzorów (9.6) i (9.5) znajdziemy

$$(9.7) \quad N^i = - \sum_{j=1}^w \bar{s}_{\phi_j} \delta_j^i \Phi''.$$

Otrzymamy stąd siły brzegowe N_0^i i N_1^i .

Ze wzorów (9.2), (9.3) i (9.7) można wyznaczyć naprężenia w dowolnym punkcie elementu składowego i . Widać, że naprężenia te wyrażają się jednoznacznie przez funkcję Φ .

10. UWZGLĘDNIENIE DEPLANACJI NA GRUBOŚCI ŚCIANKI

Metoda przedstawiona w pracy pozwala na uwzględnienie deplanacji na grubości ścianki pręta cienkościennego. Dla uzyskania odpowiedniej dokładności należy przekrój pręta podzielić na odpowiednio dużą liczbę elementów, aproksymując go linią łamaną. Przejście graniczne przy założeniu podziału normalnego linii środkowej przekroju pręta daje wynik identyczny z tym, który uzyskać można za pomocą dokładniejszej metody powierzchni wycinkowych F. BLEICHA [5]. Dla prętów o prostym przekroju takich, dla których J_ω w sensie teorii W. Z. Własowa jest równy zeru, przejście graniczne jest łatwe.

Ten sposób, polegający na dyskretyzacji konturu przekroju poprzecznego pręta, jest korzystny z punktu widzenia automatyzacji obliczeń.

11. PRZYKŁAD

Na podstawie powyższych rozważań wyznaczony zostanie środek sztywności i współczynniki równania (8.1) dla pręta o przekroju pokazanym na rys. 8. Pręt ten został podzielony na trzy pręty składowe, przedstawione na rys. 9. Główny wyjściowy układ współrzędnych $OXYZ$ przyjęto w środku sztywności elementu 2. Pozostałe układy lokalne przedstawione są na rys. 9.

Dane geometryczne prętów składowych są następujące:

dla pręta 1

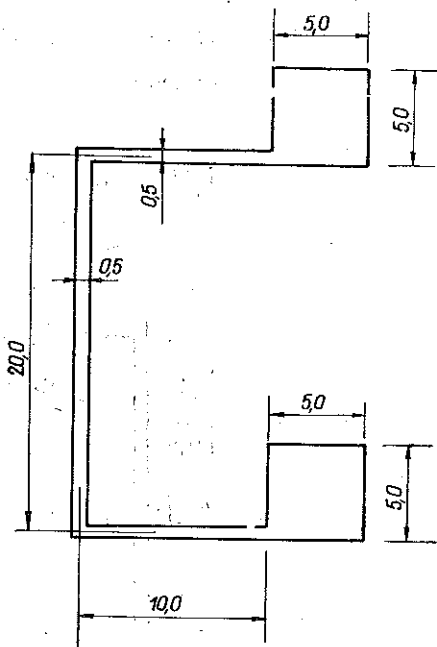
$$\begin{aligned} a_{x1}^1 &= -2,5 \text{ cm}, & a_{y1}^1 &= -2,25 \text{ cm}, \\ r_x^1 &= -16,25 \text{ cm}, & r_y^1 &= -12,25 \text{ cm}, \\ A^1 &= 25 \text{ cm}^2, & J_s^1 &= 87,8 \text{ cm}^4 [6], \\ J_x^1 &= 52,2 \text{ cm}^4, & J_y^1 &= 52,2 \text{ cm}^4, \\ J_\omega^1 &= 0, & \omega_1^1 &= 0; \end{aligned}$$

dla pręta 2

$$\begin{aligned} a_{x1}^2 &= 7,5 \text{ cm}, & a_{y1}^2 &= 10,0 \text{ cm}, \\ a_{x2}^2 &= 7,5 \text{ cm}, & a_{y2}^2 &= -10,0 \text{ cm}, \\ r_x^2 &= 0, & r_y^2 &= 0, \\ A^2 &= 20 \text{ cm}^2, & J_s^2 &= 1,676 \text{ cm}^4, \\ J_x^2 &= 1333,3 \text{ cm}^4, & J_y^2 &= 208,4 \text{ cm}^4, \\ J_\omega^2 &= 14580 \text{ cm}^4, & \omega_1^2 &= -\omega_2^2 = -62,5 \text{ cm}^2; \end{aligned}$$

dla pręta 3

$$\begin{aligned} a_{x2}^3 &= -2,5 \text{ cm}, & a_{y2}^3 &= -2,25 \text{ cm}, & J_x^3 &= 52,2 \text{ cm}^4, & J_y^3 &= 52,2 \text{ cm}^4, \\ r_x^3 &= -16,25 \text{ cm}, & r_y^3 &= 7,75 \text{ cm}, & J_\omega^3 &= 0, & \omega_2^3 &= 0, \\ A^3 &= 25 \text{ cm}^2, & J_s^3 &= 87,8 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$



Rys. 8

Jako niewiadome przyjmujemy funkcje n_1 działającą na element 1 oraz n_2 działającą na element 3. W związku z tym mamy

$$\begin{aligned} \delta_1^1 &= 1, & \delta_1^2 &= -1, & \delta_1^3 &= 0, \\ \delta_2^1 &= 0, & \delta_2^2 &= -1, & \delta_2^3 &= 1. \end{aligned}$$

Równania zgodności przemieszczeń (5.5) dla rozcięć 1 i 2 mają postać

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{E^1 A^1} + \frac{1}{E^2 A^2}\right) n_1 - \frac{1}{E^2 A^2} n_2 &= g_{x1} V_x'''' + g_{y1} V_y'''' + g_{\phi 1} \Phi'''' , \\ -\frac{1}{E^2 A^2} n_1 - \left(\frac{1}{E^2 A^2} + \frac{1}{E^3 A^3}\right) n_2 &= g_{x2} V_x'''' + g_{y2} V_y'''' + g_{\phi 2} \Phi'''' . \end{aligned}$$

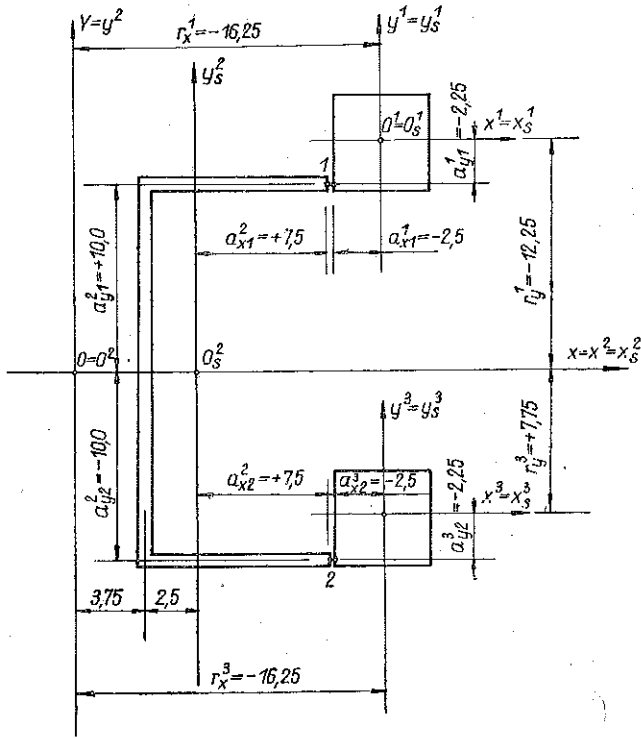
Wstawiając dane liczbowe i rozwiązując ten układ, otrzymamy:

$$\begin{aligned} n_1 &= 71,429 V_x'''' E + 266,07 V_y'''' E - 1966,5 \Phi'''' E, \\ n_2 &= 71,429 V_x'''' E - 233,93 V_y'''' E + 2408,5 \Phi'''' E. \end{aligned}$$

Stąd otrzymamy

$$s_{x1} = 71,429 E, \quad s_{y1} = 266,07 E, \quad s_{\phi 1} = -1966,5 E,$$

$$s_{x2} = 71,429 E, \quad s_{y2} = -233,93 E, \quad s_{\phi 2} = 2408,5 E.$$



Rys. 9

Po wyznaczeniu współczynników (5.7), ułożeniu i rozwiązaniu równań (7.6) otrzymamy

$$D_x = -6,4851 \text{ cm}, \quad D_y = -3,6092 \text{ cm}.$$

Położenie nowego, głównego układu współrzędnych $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, przechodzącego przez środek sztywności pręta, przedstawione jest na rys. 10.

W układzie $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ zmieniają się współrzędne r_x^i oraz r_y^i , mianowicie:

dla pręta 1

$$\bar{r}_x^1 = -22,735 \text{ cm}, \quad \bar{r}_y^1 = -15,85 \text{ cm};$$

dla pręta 2

$$\bar{r}_x^2 = -6,485 \text{ cm}, \quad \bar{r}_y^2 = -3,600 \text{ cm};$$

dla pręta 3

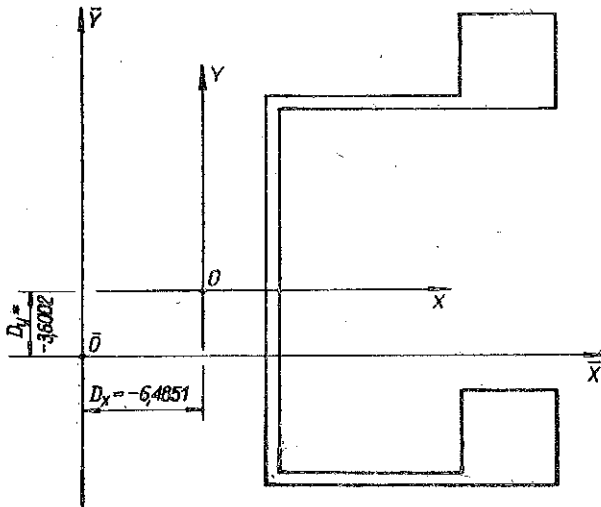
$$\bar{r}_x^3 = -22,735 \text{ cm}, \quad \bar{r}_y^3 = 4,150 \text{ cm}.$$

Ze wzorów (5.7) i wzoru (8.4) otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{c}_{\phi_1}^1 &= -11,529, & \bar{c}_{\phi_1}^2 &= -24,650, & \bar{c}_{\phi_2}^2 &= -29,352, & \bar{c}_{\phi_1}^3 &= -61,529, \\ \bar{s}_{\phi_1} &= -498,17 E, & \bar{s}_{\phi_2} &= 634,27 E. \end{aligned}$$

Przyjmując $\nu=0,3$ ze wzorów (8.3) otrzymamy

$$J_{\omega} = 169710 \text{ cm}^6, \quad J_s = 177,276 \text{ cm}^4.$$



Rys. 10

Równanie różniczkowe kąta skręcenia pręta złożonego przyjmuje postać

$$-EJ_{\omega} \Phi''' + GJ_s \Phi' = M_s.$$

Dla porównania optymalnych wyników z obliczeniami dotychczasowymi, w których dwa zwarte pasy zastępujemy punktami materialnymi w ich środkach ciężkości, należy powyższe obliczenia powtórzyć, przyjmując

$$J_x^1 = J_x^3 = J_y^1 = J_y^3 = 0.$$

Otrzymamy wtedy następujące wyniki:

$$\begin{aligned} D_x &= -6,8783 \text{ cm}, & D_y &= -4,0505 \text{ cm}, \\ J_{\omega} &= 100530 \text{ cm}^6, & J_s &= 177,276 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Liczby te różnią się w stosunku do poprzednich odpowiednio:

$$\begin{aligned} \text{dla } D_x &\text{ o } 6,1\%, & \text{dla } D_y &\text{ o } 12,5\%, \\ \text{dla } J_{\omega} &\text{ o } 41,0\%, & \text{dla } J_s &\text{ o } 0\%. \end{aligned}$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
2. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, PWN, Warszawa 1965.
3. J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, PWN, Warszawa 1957.
4. R. DĄBROWSKI, *Praktycznie ważne przypadki wybożenia skrętnego prętów cienkościennych*, Arch. Inżyn. Ładow., 1/1956.
5. F. BLEICH, *Buckling strength of metal structures*, Mc Graw-Hill, N. Y. 1952.
6. J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, Warszawa 1958.
7. M. T. HUBER, *Stereoméchanika techniczna*, PWN, Warszawa 1958.
8. Д. В. Бычков, *Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций*, Москва 1962.

Резюме

НЕСВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ СЛОЖНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ОТКРЫТЫМ СЕЧЕНИЕМ

В настоящей работе рассмотрен случай несвободного кручения стержней состоящих из тонкостенных элементов и из элементов с компактным сечением. Рассмотрен общий случай предполагая, что 1) поперечное сечение стержня постоянно вдоль целой его длины, 2) профиль стержня является открытым профилем.

Кроме этого не предполагается никаких других ограничений по отношению к форме составляющих элементов и материальных постоянных отдельных составляющих элементов стержня.

Сформулированы формулы для определения сил по сечению и центра жесткости, а также дифференциальное уравнение для угла кручения стержня, аналогичное уравнению Власова, касающегося тонкостенных открытых стержней.

SUMMARY

NON FREE TORSION OF THE COMBINED CYLINDRICAL RODS OF OPEN CROSS-SECTIONS

A paper deals with the non free torsion of rods composed of the thin walled elements and the elements of compact section.

The general case is considered at the assumption that: 1) the cross section of the rod is constant along its whole length and 2) the profile of the rod is open. No other limitations concerning the shape of the elements and the material constants of the particular elements of the rod are imposed.

The formulae for evaluation of the cross-section forces and the center of rigidity, together with a differential equation of torsion analogous to Vlasov's equation concerning thin-walled open rods are derived.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 stycznia 1975 r.