

STATECZNOŚĆ PASMA RUSZTOWEGO

BOGDAN HUSIAR (POZNAŃ)

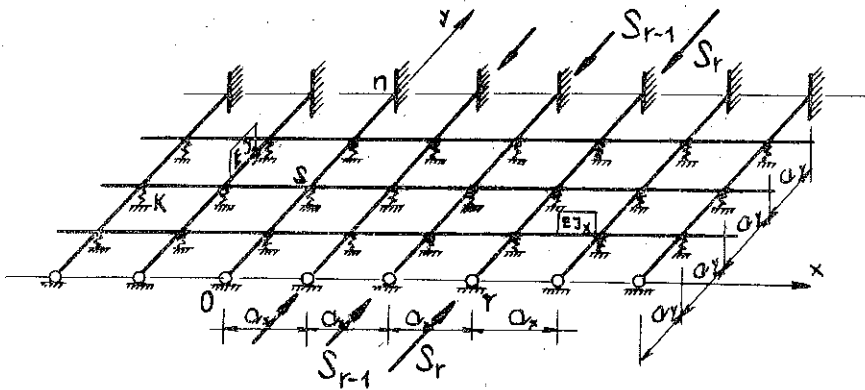
Problem stateczności pasma rusztowego opisano za pomocą układu równań różnicowo-cząstkowych, a do rozwiązania zastosowano metodę skończonej dyskretnej transformacji własnej i dyskretnej transformacji Fouriera. Przedmiotem rozważań było regularne pasmo rusztowe (rys. 1), z węzłami łączącymi pręty rusztu w sposób przegubowy. Przyjęto dowolne warunki podparcia belek na poszczególnych brzegach rusztu. Rozważono przypadek ściskania dowolnej liczby kolejnych poprzecznic rusztu dowolnym rozkładem sił działających wzdłuż brzegu pasma. Zagadnienie obciążenia krytycznego dla pasma rusztowego zostało sprowadzone do poszukiwania wartości własnych jednorodnego równania całkowitego Fredholma rodzaju drugiego z jądrem zdegenerowanym.

1. WSTĘP

Problem stateczności pasma rusztowego był rozwiązywany w pracy B. BOCZKAJA i H. HATA [1], którzy przyjęli model ośrodka włóknistego w ujęciu Cz. WOŹNIAKA [2]. Autorzy ograniczyli swe wywody do obciążenia stałego wzdłuż brzegu pasma, co odpowiada postaci walcowej utraty stateczności. Przyjęty model ośrodka pozwolił na uwzględnienie różnych struktur wewnętrznych pasma siatkowego.

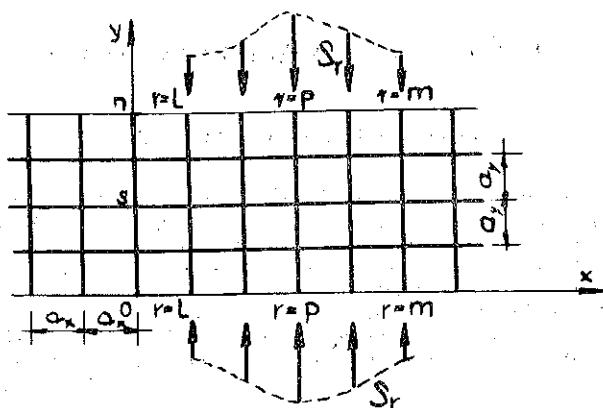
W niniejszej pracy przyjęto model dyskretny. Rozważa się ruszt o siatce prostokątnej z węzłami łączącymi pręty rusztu w sposób przegubowy. Takie ujęcie w odniesieniu do rusztów o siatce prostokątnej, najczęściej stosowanych w praktyce, ściśle odpowiada warunkom rzeczywistym bez potrzeby dokonywania zamiany układu dyskretnego na układ ciągły. Przeprowadzonych rozważań nie ograniczono do obciążenia równomiernego.

Przedmiotem rozważań jest nieograniczone pasmo rusztowe o budowie pokazanej na rys. 1. Przyjmuje się, że warunki podparcia belek na poszczególnych brzegach



Rys. 1

rusztu są jednakowe poza tym dowolne. Węzły rusztu mogą się opierać na podporach sprężystych (dyskretne podłoże winklerowskie). Rozważa się przypadek obciążenia dowolnej liczby kolejnych poprzecznic rusztu różnymi siłami osiowymi (rys. 2).



Rys. 2

Przedstawiony powyżej regularny układ dyskretny opisuje się za pomocą równań różnicowych. Metody równań różnicowych w zastosowaniu do regularnych układów prętowych były szeroko omawiane w wielu monografiach, np. F. BLEICHA i E. MELANA [3], B. A. BOWINA [4], W. NOWACKIEGO [5], a ostatnio zostały rozwinięte przez W. GUTKOWSKIEGO [6] i R. ŚWITKĘ [7].

W pracy posłużono się oznaczeniami, które zestawia się poniżej:

- r, s zmienne dyskretne $(r, s) \in C$, C — zbiór liczb całkowitych,
- $w_{r,s}$ ugięcie węzła (r, s) rusztu,
- $X_{r,s}$ wzajemne oddziaływanie belek krzyżujących się w węzle (r, s) rusztu,
- $P_{r,s}$ siła skupiona działająca w węzle (r, s) rusztu, $P_{r,s} = P'_{r,s} + P''_{r,s}$,
- $P'_{r,s}$ siła działająca na podłużnicę w węzle (r, s) ,
- $P''_{r,s}$ siła działająca na poprzecznice w węzle (r, s) ,
- S_r siła osiowa ściskająca poprzecznice r rusztu,
- K współczynnik podatności dyskretnego podłoża sprężystego typu Winklera,
- a_x, EJ_y rozstaw i sztywność giętą poprzecznic,
- a_y, EJ_x rozstaw i sztywność giętą podłużnic,
- $v(\beta), u(\beta)$ funkcje Berry'ego przyjęte w postaci:

$$v(\beta) = \frac{1}{\beta^2} (1 - \beta \operatorname{ctg} \beta),$$

$$u(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\beta}{\sin \beta} - 1 \right), \quad \beta^2 = \frac{Sa^2}{EJ},$$

- Δ_r^2, Δ_r^4 druga i czwarta różnica centralna obliczona względem zmiennej r ,
- $\delta_{r,p}$ symbol Kroneckera.

2. RÓWNANIA STATECZNOŚCI PASMA RUSZTOWEGO

Ugięcia węzłów rusztu z udziałem sił osiowych i poprzecznego obciążenia węzłowego opisuje układ równań różnicowych wyprowadzonych w pracy [8]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (1 + \beta_s^2 u_s) \Delta_r^4 w_{r,s} + 2\beta_s^2 (u_s + v_s) \Delta_r^2 w_{r,s} + 6\mu_x (u_s \Delta_r^2 + 2u_s + 2v_s) (X_{r,s} - P'_{r,s}) &= 0, \\ (1 + \beta_r^2 u_r) \Delta_s^4 w_{r,s} + 2\beta_r^2 (u_r + v_r) \Delta_s^2 w_{r,s} + 6\mu_y (\mu_r \Delta_s^2 + 2u_r + 2v_r) (Kw_{r,s} - X_{r,s} - & \\ - P''_{r,s}) &= 0, \end{aligned}$$

do których wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\mu_x = \frac{a_x^3}{6EJ_x}, \quad \mu_y = \frac{a_y^3}{6EJ_y}, \quad \beta_r^2 = \frac{S_r a_r^2}{EJ_y}, \quad v_r \equiv v(\beta_r), \quad u_r \equiv u(\beta_r).$$

Powyższe równania wyprowadza się w następujący sposób: Rozpatrując ściskany siłą osiową S pręt pojedynczy, na który w węzłach działają siły poprzeczne do osi ($P_r - Kw_r$), otrzymuje się równanie równowagi węzła r

$$T_r - T_{r+1} - P_r + Kw_r = 0,$$

w którym, jeśli uwzględni się związek wynikający z warunku równowagi momentów dla odcinka pręta $r-1$, r

$$T_r a + S(w_r - w_{r-1}) - M_r + M_{r-1} = 0,$$

to otrzyma się

$$(2.2) \quad \Delta^2 M_r - S \Delta^2 w_r + a(P_r - Kw_r) = 0.$$

Biorąc następnie pod uwagę wzory transformacyjne dla pręta ściskanego zapisane dla odcinka $r-1$, r

$$(2.3) \quad \varphi_r = \frac{1}{a} (w_r - w_{r-1}) - \frac{a}{EJ} [u(\beta) M_{r-1} + v(\beta) M_r]$$

oraz dla odcinka r , $r+1$

$$(2.3') \quad \varphi_r = \frac{1}{a} (w_{r+1} - w_r) + \frac{a}{EJ} [v(\beta) M_r + u(\beta) M_{r+1}]$$

i uwzględniając, że warunek ciągłości odkształceń belki wymaga, żeby w obu przypadkach kąt φ_r był jednakowy, po odjęciu stronami (2.3) od (2.3') otrzymujemy

$$(2.4) \quad \Delta^2 w_r = - \frac{a^2}{EJ} [u(\beta) \Delta^2 + 2u(\beta) + 2v(\beta)] M_r.$$

Po wykonaniu na równaniu (2.4) operacji Δ^2 i wykorzystaniu związku (2.2) otrzymuje się następujące równanie różnicowe ugięć węzłów belki z udziałem sił osiowych i poprzecznego obciążenia węzłowego:

$$(2.5) \quad (1 + \beta^2 u) \Delta^4 w_r + 2\beta^2 (u + v) \Delta^2 w_r = \frac{a^3}{EJ} (u \Delta^2 + 2u + 2v) (P_r - Kw_r).$$

Wypisując równania (2.5) dla obu rodzin prętów rusztu i uwzględniając, że ugięcia prętów w węzłach są dla obu rodzin identyczne, otrzymuje się układ równań (2.1).

Pomijając w równaniach (2.1) wyrazy związane z obciążeniem poprzecznym oraz przyjmując, że podłużnice są wolne od działania sił osiowych, otrzymamy równania opisujące problem stateczności pasma rusztowego z poprzecznymi ściskanyimi dowolnym rozkładem sił działających wzdłuż brzegu pasma

$$(2.6) \quad \begin{aligned} & \Delta_r^4 w_{r,s} + \mu_x (\Delta_r^2 + 6) X_{r,s} = 0, \\ & (1 + \beta_r^2 u_r) \Delta_s^4 w_{r,s} + 2\beta_r^2 (u_r + v_r) \Delta_s^2 w_{r,s} + 6\mu_y (u_r \Delta_s^2 + 2u_r + 2v_r) (Kw_{r,s} - \\ & \quad - X_{r,s}) = 0. \end{aligned}$$

W powyższym układzie jednorodnych równań różnicowych cząstkowych funkcjami niewiadomymi zmiennych dyskretnych r i s są: $w_{r,s}$ i $X_{r,s}$.

Naszym zadaniem jest wyznaczenie wartości własnych β przy danym rozkładzie sił osiowych S_r oraz przy określonym sposobie podparcia pasma rusztowego na obu brzegach. W tym celu można wykorzystać metody transformacji dyskretnych.

Najpierw wykonujemy względem zmiennej s skończoną dyskretną transformację własną, zaproponowaną przez R. ŚWITKĘ w pracy [7] jako formalizację rozwinięcia w szereg funkcji własnych. Po wykonaniu transformacji układ równań (2.6) przybierze postać:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & \Delta_r^4 \bar{w}_{r,k} + \mu_x (\Delta_r^2 + 6) \bar{X}_{r,k} = 0, \\ & 4\lambda_k^2 (\beta_r) \bar{w}_{r,k} + \mu_y K \bar{w}_{r,k} - \mu_y \bar{X}_{r,k} = 0. \end{aligned}$$

Występująca w równaniu (2.7)₂ wartość własna $\lambda_k^2 (\beta_r)$ dana jest wzorem

$$(2.8) \quad \lambda_k^2 (\beta_r) = \frac{1 - \cos v_k}{12} \left[\frac{1 - \cos v_k}{v(\beta_r) + u(\beta_r) \cos v_k} - \beta_r^2 \right], \quad k=1, 2, 3, \dots, \sigma.$$

Jeśli obydwa końce poprzecznic są podparte niepodatnie, to $\sigma = n - 1$. Jeśli poprzecznic ma schemat belki wspornikowej, to $\sigma = n$.

Wielkości $v_k = v_k (\beta_r)$ są pierwiastkami równania charakterystycznego wyznaczonego dla jednorodnego równania różnicowego ugięć belki z uwzględnieniem działania sił osiowych. Pierwiastki te dla różnych warunków podparcia wyznaczył autor w pracy [8].

Na układzie równań (2.7) wykonujemy z kolei względem zmiennej r dyskretną transformację Fouriera zdefiniowaną wzorami:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_d \{ \bar{w}_{r,k} \} &= \tilde{w}_k(\alpha) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \bar{w}_{r,k} e^{i r \alpha}, \\ \bar{w}_{r,k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{w}_k(\alpha) e^{-i r \alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Po wykonaniu transformacji otrzymujemy

$$(2.10) \quad \begin{aligned} 2c(\alpha) \tilde{w}_k(\alpha) + \mu_x \tilde{X}_k(\alpha) &= 0, \\ \mathcal{F}_d \{4\lambda_k^2(\beta_r) \cdot \tilde{w}_{r,k}\} + \mu_y K \tilde{w}_k(\alpha) - \mu_y \tilde{X}_k(\alpha) &= 0, \quad c(\alpha) = \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2 + \cos \alpha}. \end{aligned}$$

W celu obliczenia transformaty iloczynu dwóch funkcji $4\lambda_k^2(\beta_r) \cdot \tilde{w}_{r,k}$ występującego w równaniu (2.10)₂ konieczne jest ustalenie rozkładu sił ściskających poprzecznicę pasma rusztowego.

3. WARUNEK WYBOCZENIA PASMA RUSZTOWEGO

Przyjmujemy, że kolejne poprzecznicze z numerami $r=1, \dots, p, \dots, m$ pasma rusztowego są ściskane różnymi siłami osiowymi (rys. 2). Obciążenie osiowe poprzecznic można zapisać jako funkcję zmiennej dyskretnej r w postaci następującej:

$$(3.1) \quad S_r = S \sum_{p=1}^m f_r \delta_{r,p},$$

czyli

$$\beta_r^2 = \beta^2 \sum_{p=1}^m f_r \delta_{r,p}, \quad \beta^2 = \frac{S a_y^2}{E J_y}.$$

We wzorach (3.1) f_r jest daną funkcją dyskretną rozkładu wartości sił osiowych, ściskających poprzecznicę rusztu. Na przykład dla obciążenia według funkcji sinus przyjmujemy: $l=0$ i $f_r = \sin \frac{r\pi}{m}$.

Biorąc pod uwagę (3.1) obliczamy

$$(3.2) \quad \mathcal{F}_d \{4\lambda_k^2(\beta_r) \tilde{w}_{r,k}\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(1 - \cos v_k)^2 \tilde{w}_{r,k} e^{i r \alpha}}{3 [v(\beta_r) + u(\beta_r) \cos v_k]} - \frac{1 - \cos v_k}{3} \beta_r^2 \tilde{w}_{r,k} e^{i r \alpha} \right\}.$$

Powyższy szereg sumujemy w granicach $(-\infty; +\infty)$ według schematu

$$(-\infty; +\infty)|_{\beta=0} - (l; m)|_{\beta=0} + (l; m)|_{\beta \neq 0}.$$

Wówczas otrzymamy następującą postać prawej strony wyrażenia (3.2):

$$(3.3) \quad \frac{(1 - \cos v_k)^2}{3} \left\{ 6 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{r,k} e^{i r \alpha}}{2 + \cos v_k} - 6 \sum_{p=1}^m \frac{\tilde{w}_{p,k} e^{i p \alpha}}{2 + \cos v_k} + \sum_{p=1}^m \frac{\tilde{w}_{p,k} e^{i p \alpha}}{v(\beta_p) + u(\beta_p) \cos v_k} \right\} - \frac{1 - \cos v_k}{3} \sum_{p=1}^m \beta_p^2 \tilde{w}_{p,k} e^{i p \alpha}.$$

Ponownie uwzględniając wzór na dyskretną transformację Fouriera (2.9)₁ w wyrażeniu (3.3), otrzymamy końcową postać transformaty iloczynu dwóch funkcji

$$(3.4) \quad \mathcal{F}_d \{4\lambda_k^2(\beta_r) \tilde{w}_{r,k}\} = 4\lambda_k^2 \tilde{w}_k(\alpha) + 4 \sum_{p=1}^m [\lambda_k^2(\beta_p) - \lambda_k^2] \tilde{w}_{p,k} e^{i p \alpha}.$$

Po podstawieniu (3.4) do układu równań (2.10) i wyrugowaniu wielkości $\tilde{X}_k(\alpha)$ otrzymamy

$$(3.5) \quad a_k(\alpha) \tilde{w}_k(\alpha) - \mu \sum_{p=1}^m b_k(\beta_p) \tilde{w}_{p,k} e^{i p \alpha} = 0,$$

W powyższym równaniu wprowadzono następujące oznaczenia skracające:

$$(3.5') \quad \begin{aligned} a_k(\alpha) &= 4\mu\lambda_k^2 + \mu_x K + 2c(\alpha), \\ b_k(\beta_p) &= 4\lambda_k^2 - 4\lambda_k^2(\beta_p), \\ \lambda_k^2 &= \frac{(1 - \cos v_k)^2}{2(2 + \cos v_k)}, \quad \mu = \frac{\mu_x}{\mu_y}. \end{aligned}$$

W równaniu (3.5) występują jako niewiadome: funkcja $\tilde{w}_{p,k}$ oraz jej transformata $\tilde{w}_k(\alpha)$. W równaniu tym występuje również wartość własna $\lambda_k^2(\beta_p)$ niezależna już od wskaźnika r .

W celu otrzymania rozwiązań równania (3.5) wykorzystamy wzór na odwrotną transformację Fouriera (2.9)₂ i występujący w równaniu (3.5) szereg zapiszemy w postaci

$$(3.6) \quad \sum_{p=1}^m b_k(\beta_p) \tilde{w}_{p,k} e^{i p \alpha} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^m b_k(\beta_p) e^{i p \alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{w}_k(\rho) e^{-i p \rho} d\rho.$$

Równanie (3.5) możemy wówczas doprowadzić do postaci jednorodnego równania całkowego Fredholm'a rodzaju drugiego

$$(3.7) \quad \tilde{w}_k(\alpha) - \int_{-\pi}^{\pi} K(\alpha, \rho; \beta) \tilde{w}_k(\rho) d\rho = 0,$$

z jądrem zdegenerowanym

$$K(\alpha, \rho; \beta) = \sum_{p=1}^m \psi_p(\alpha) \varphi_p(\beta, \rho),$$

w którym β jest parametrem, oraz

$$\psi_p(\alpha) = \frac{e^{i p \alpha}}{a_k(\alpha)}, \quad a_k(\alpha) \neq 0 \quad \text{dla } \alpha \in [-\pi, \pi],$$

$$\varphi_p(\beta, \rho) = \frac{1}{2\pi} \mu b_k(\beta_p) e^{-i p \rho}.$$

Rozwiązanie równania (3.7) ze względu na wartości własne nie nastęca trudności.

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$B_p = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_p(\beta, \rho) \tilde{w}_k(\rho) d\rho, \quad p=1, \dots, m,$$

otrzymuje się

$$(3.8) \quad \tilde{w}_k(\alpha) = \sum_{p=1}^m B_p \psi_p(\alpha).$$

W celu określenia niewiadomych $B_1, \dots, B_p, \dots, B_m$ podstawiamy $\tilde{w}_k(\rho)$ dane wzorem (3.8) do (3.7) i przyrównujemy wynik do (3.8):

$$\sum_{p=1}^m B_p \psi_p(\alpha) = \sum_{p=1}^m \psi_p(\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_p(\beta\rho) \sum_{p'=1}^m B_{p'} \psi_{p'}(\rho) d\rho.$$

Z liniowej niezależności funkcji $\psi_1(\alpha), \dots, \psi_m(\alpha)$ wynika, że współczynniki przy tych funkcjach po obu stronach powyższego równania muszą być jednakowe. Otrzymujemy stąd układ algebraicznych równań jednorodnych z niewiadomymi B_1, \dots, B_m . Warunkiem istnienia rozwiązań nietrywialnych równania całkowego (3.7) jest więc zerowanie się wyznacznika układu równań z niewiadomymi B_1, \dots, B_m . Wobec tego warunek wyboczenia pasma rusztowego ma postać:

$$(3.9) \quad \begin{vmatrix} 1-f_{1,1}(\beta) & \dots & -f_{1,p}(\beta) & \dots & -f_{1,m}(\beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_{p,1}(\beta) & \dots & 1-f_{p,p}(\beta) & \dots & -f_{p,m}(\beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_{m,1}(\beta) & \dots & -f_{m,p}(\beta) & \dots & 1-f_{m,m}(\beta) \end{vmatrix} = 0.$$

W równaniu (3.9) wprowadzono oznaczenie

$$f_{\xi,\eta}(\beta) = \frac{\mu}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{b_k(\beta\xi) \cos(\xi-\eta)\alpha}{a_k(\alpha)} d\alpha, \quad \begin{matrix} \xi=1, \dots, m, \\ \eta=1, \dots, m. \end{matrix}$$

Pierwiastki równania (3.9) wyznaczają ciąg wartości własnych równania całkowego (3.7) przy dowolnych warunkach brzegowych. Problem stateczności pasma rusztowego, rozwiązany w powyższy sposób, nie uwzględnia możliwości lokalnej utraty stateczności (wyboczenie poprzecznic na odcinkach pomiędzy węzłami bez przemieszczenia się węzłów).

4. STATECZNOŚĆ PASMA RUSZTOWEGO PODPARTEGO NA OBU BRZEGACH PRZEGUBOWO I OBCIĄŻONEGO JEDNĄ SIŁĄ OSIOWĄ (rys. 3)

Niech poprzecznicą obciążoną będzie poprzecznicą $r=0$, to znaczy

$$S_r = S\delta_{r,0}.$$

Ponieważ $l=m$, więc wyznacznik (3.9) ogranicza się do jednego elementu. Uwzględniając ponadto, że $v_k = k\pi/n$, otrzymuje się warunek wyboczenia pasma rusztowego w postaci

$$(4.1) \quad \pi - \mu [4\lambda_k^2 - 4\lambda_k^2(\beta)] \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{4\mu\lambda_k^2 + \mu_x K + 2c(\alpha)} = 0,$$

w którym

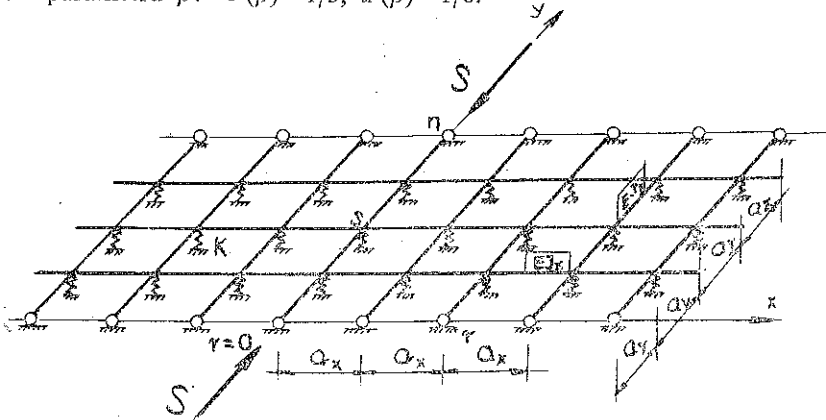
$$\lambda_k^2(\beta) = \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{n}}{12} \left[\frac{1 - \cos \frac{k\pi}{n}}{v(\beta) + u(\beta) \cos \frac{k\pi}{n}} - \beta^2 \right], \quad \lambda_k^2 = \frac{\left(1 - \cos \frac{k\pi}{n}\right)^2}{2 \left(2 + \cos \frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Z równania przestępnego (4.1) obliczamy ciąg pierwiastków β_k .

Siłę krytyczną obliczamy za pomocą wzoru

$$S_{krk} = \beta_k^2 \frac{EJ_y}{a_y^2}, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

Dla celów praktycznych może być celowe rozpatrzenie stateczności pasma rusztowego na podstawie uproszczonej wersji równania rusztu. W wersji uproszczonej pomijamy wpływ wygięcia się prętów między węzłami rusztu na wielkość momentu zginającego. Należy wówczas przyjąć wartości funkcji $v(\beta)$ i $u(\beta)$ dla zerowej wartości parametru β : $v(\beta)=1/3$, $u(\beta)=1/6$.



Rys. 3

Istota tego uproszczenia polega na zamianie krzywej gładkiej osi pręta wyoboczonego na wielobok. Jak wykazano w pracy [8] dla pasma rusztowego o większej liczbie poprzecznic można tą metodą wyznaczyć łatwo najmniejszą ($k=1$) wartość siły krytycznej nie popełniając przy tym dużego błędu.

Warunek wyoboczenia pasma rusztowego dla ogólnego przypadku obciążenia dany jest wzorem (3.9), w którym

$$(4.2) \quad f_{\zeta, \eta}(\beta) = \frac{\mu}{3\pi} (1 - \cos v_k) \beta_{\zeta}^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(\zeta - \eta) \alpha}{a_k(\alpha)} d\alpha.$$

Dla pasma rusztowego podpartego przegubowo na obu brzegach i ściskanego jedną siłą osiową warunek wyoboczenia w wersji uproszczonej ma postać następującą:

$$(4.3) \quad 3\pi - \mu\beta^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} \right) \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{4\mu\lambda_k^2 + \mu_x K + 2c(\alpha)} = 0.$$

Ze wzoru (4.3) obliczamy siłę krytyczną bez potrzeby rozwiązywania równania przestępnego:

$$(4.4) \quad S_{kr} = \frac{3\pi EJ_y}{\mu a_y^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{4\mu\lambda_1^2 + \mu_x K + 2c(\alpha)}}, \quad \lambda_1^2 = \frac{\left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}{2 \left(2 + \cos \frac{\pi}{n} \right)}.$$

5. PRZYKŁAD

Wyznamy najmniejszą wartości siły krytycznej dla pasma podpartego przegubowo i obciążonego jedną siłą osiową (rys. 3) przy następujących danych: $n=6$ (5 podłużnic), $J_x=J_y=J$, $a_x=a_y=a$, $K=0$.

W wersji ścisłej warunek wyboczenia dany jest wzorem (4.1):

$$(5.1) \quad 6\lambda_1^2 - \beta^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\left(1 - \cos \frac{\pi}{6}\right)^2}{v(\beta) + u(\beta) \cos \frac{\pi}{6}} - \frac{6\pi}{\frac{d\alpha}{\int_0^{\pi} 2\lambda_1^2 + c(\alpha)}} = 0.$$

Po obliczeniu całki występującej we wzorze (5.1) otrzymamy równanie przestępne

$$[v(\beta) + 0,866u(\beta)] (1056,2 - 854,95\beta^2) + 114,543 = 0,$$

dla którego $\beta_1 = 1,217$. Wartość siły krytycznej jest równa

$$S_{kr} = 1,4811 \frac{EJ}{a^2}.$$

W wersji uproszczonej siłę krytyczną obliczamy za pomocą wzoru (4.4):

$$S_{KR} = 1,5159 \frac{EJ}{a^2}.$$

Wartość powyższa jest większa od wartości wyznaczonej w sposób ścisły o 2,35%. Zawyżenie wartości siły krytycznej jest konsekwencją przyjęcia postaci wyboczenia w kształcie wieloboku, co jest związane z myślowym wprowadzeniem do układu dodatkowych więzów, które zwiększają sztywność rozważanego układu, a tym samym wzrost wartości siły krytycznej.

Dla poprzecznicę wydzielonej z pasma rusztowego i traktowanej jako belka wolnopodparta siła krytyczna jest równa:

$$S_{KR} = 0,2805 \frac{EJ}{a^2}.$$

Powyższa wartość jest 5,4-krotnie mniejsza od wartości siły krytycznej obliczonej dla rozważanego pasma rusztowego.

Praca stanowi poszerzony fragment dysertacji doktorskiej, napisanej pod kierunkiem doc. dra hab. inż. R. Świtki.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. BOCZKAJ, H. HAT, *Niektóre przypadki stateczności pasm rusztowych*, Zesz. Naukowe Politechniki Śląskiej, nr 247, seria Budownictwo, z. 24, 7-21, 1969.
2. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.

3. F. BLEICH, E. MELAN, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*, Berlin 1927.
4. В. А. БОВИН, *Разностно-вариационные методы строительной механики*, Госстройиздат УССР, Киев 1963.
5. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, 2, PWN, Warszawa 1967.
6. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
7. R. ŚWITKA, *Drgania i funkcje własne regularnych układów dyskretnych*, Prace Poznańskiego Tow. Przyj. Nauk, 2, z. 2, Warszawa-Poznań 1973.
8. B. HUSIAR, *Zginanie, stateczność i drgania pasma rusztowego*, praca doktorska, Politechnika Poznańska, 1973.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ РОСТВЕРКОВОЙ ПОЛОСЫ

Проблема устойчивости ростверковой полосы описана при помощи системы разностно-дифференциальных уравнений, а для решения применен метод конечного дискретного собственного преобразования и дискретного преобразования Фурье.

Предметом рассуждений являлась регулярная ростверковая полоса (рис. 1) с узлами соединяющими стержни ростверка шарнирным образом. Приняты произвольные условия опирания балок на отдельных краях ростверка.

Рассмотрен случай сжатия произвольного количества последовательных поперечин ростверка произвольным распределением сил действующих вдоль краев полосы. Проблема критической нагрузки для ростверковой полосы сведена к поискам собственных значений однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром.

SUMMARY

STABILITY OF A GRID SHEET

The problem of stability of a grid sheet is described by a system of partial difference equations. To its solution the method of finite discrete transformation and the method of discrete Fourier transformation were applied.

The objective of the study was the sheet grid (Fig. 1) with connectors joining articulately the grid bars. On the particular boundaries of the grid the arbitrary supports of beams are assumed. A case of compression of arbitrary number of successive cross members of a grid by applying arbitrary distribution of forces acting along a sheet boundary are considered. The problem of a critical load for a grid sheet was reduced to the evaluation of the eigenvalues of homogeneous Fredholm integral equation of second kind with degenerated kernel.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA W POZNANIU

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1975 r.