

PROCESY LOSOWE W LINIOWYCH UKŁADACH SPRĘŻYSTYCH

E. BIELEWICZ, L. DZIEMIDOWICZ-TKACZ, M. SKOWRONEK
(GDAŃSK)

Praca zawiera ogólne sformułowanie rozwiązywania numerycznego liniowych zagadnień teorii konstrukcji, dla których parametry opisujące układ i obciążenie, ze względu na swoją fizyczną interpretację, są zmiennymi losowymi. Na podstawie metody elementów skończonych oddzielnie przeanalizowano: 1) zagadnienie stochastycznie liniowe, gdy zmienną losową jest obciążenie, oraz 2) zagadnienie stochastycznie nieliniowe w przypadku, gdy zmiennymi losowymi są parametry opisujące układ. Zastosowanie obu metod przedstawiono na przykładzie belki na niejednorodnym podłożu sprężystym w ujęciu metody elementów skończonych. Dla obu zagadnień wykonano programy na EMC ODRA 1204.

1. OGÓLNY OPIS ZAGADNIENIA

Wiele zagadnień inżynierskich rozwiązuje się metodami różnic skończonych lub metodami elementów skończonych dla przyjętego modelu matematycznego opisującego dane zjawisko fizyczne. W przypadku statycznym modelu liniowego zasadnicze równanie zagadnienia ma postać układu równań liniowych

$$(1.1) \quad L_{jk} v_k = F_j,$$

gdzie L_{jk} nosi nazwę macierzy sztywności, v_k jest wektorem węzłowych przemieszczeń uogólnionych, a F_j wektorem węzłowych sił uogólnionych.

Przy danych obciążeniach po rozwiązaniu równania (1.1) siły wewnętrzne wyznaczamy z zależności:

$$(1.2) \quad M_i = D_{ij} v_j,$$

gdzie D_{ij} jest macierzą sprężystości.

Dążąc do zgodniejszego z rzeczywistością ujęcia badanego problemu można poszukiwać bardziej złożonego modelu matematycznego lub też w ramach przyjętego modelu przypisać poszczególnym wielkościom cechy losowe.

Praca wzoruje się na książce [1], w której ŁOMAKIN w zakresie kontinuum sprężystego zachowuje założenia teorii liniowej, lecz przypisuje poszczególnym wielkościom cechy pól losowych.

W odniesieniu do równania (1.1) można rozważać problemy stochastycznie liniowe, w których F_j i v_k są wektorami losowymi, natomiast macierz sztywności L_{jk} jest macierzą w zwykłym sensie. Odpowiada to problemowi, gdy cechy rozważanego układu są określone w sposób deterministyczny, natomiast obciążenia F_j są losowe, co powoduje również powstanie przemieszczeń losowych.

W ramach teorii korelacyjnej przyjmujemy, że wektor F_k opisany jest przez wartość oczekiwaną $\langle F \rangle_k$ i macierz kowariancyjną $\langle FF \rangle_{ik}$.

Jak wiadomo, wartość oczekiwaną wektora v_j wyznaczyć wówczas można z równania

$$(1.3) \quad \langle v \rangle_j = L_{jk}^{-1} \langle F \rangle_k,$$

gdzie L_{jk}^{-1} jest macierzą odwrotną do macierzy sztywności.

Przenosząc z teorii kontinuum sprężystego metodę opartą na znajomości tensora Greena, otrzymamy w przypadku równania (1.1) następujący wzór na macierz kowariancyjną wektora przemieszczeń uogólnionych:

$$(1.4) \quad \langle vv \rangle_{lm} = L_{rl}^{-1} L_{sm}^{-1} \langle FF \rangle_{rs}.$$

Podobnie wartość oczekiwaną i macierz kowariancyjną sił wewnętrznych przedstawiają wzory

$$(1.5) \quad \langle M \rangle_i = D_{ij} \langle v \rangle_j, \quad \langle MM \rangle_{lm} = D_{rl} D_{sm} \langle vv \rangle_{rs}.$$

Jeżeli cechy układu są również losowe, problem staje się stochastycznie nieliniowy.

W zadaniach praktycznych macierz L_{ij} z reguły nie ma postaci ogólnej macierzy losowej, a staje się jedynie macierzą zależną od parametrów losowych:

$$(1.6) \quad L_{ij} = L_{ij}(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots).$$

W tym przypadku najprostszą drogą rozwiązywania jest utworzenie zbioru realizacji macierzy L_{ij} oraz wyznaczenie wektora v_i dla wszystkich realizacji.

Dysponując informacjami odnośnie rozkładów gęstości prawdopodobieństwa oraz ewentualnej korelacji dla zmiennych losowych c_i (otrzymanymi np. na drodze doświadczalnej) — cały proces stochastyczny opisujemy ciągiem n realizacji z przypisanym prawdopodobieństwem p_k . Dla k -tej realizacji mamy zatem następujące rozwiązanie równania (1.1):

$$(1.7) \quad v_i = L_{ij} F_j \leftrightarrow p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Otrzymujemy ostatecznie następujący ciąg rozwiązań dla przemieszczeń i sił wewnętrznych:

$$(1.8) \quad \begin{array}{cccc} v_i, & v_i, & \dots, & v_i, \dots, & v_i, \\ (1) & (2) & & (k) & (n) \\ M_i, & M_i, & \dots, & M_i, \dots, & M_i, \\ (1) & (2) & & (k) & (n) \end{array}$$

na podstawie którego można wyznaczyć wartości oczekiwane oraz wariancje tych wielkości. Na przykład, dla przemieszczeń otrzymamy następujące wzory:

$$(1.9) \quad \langle v \rangle_j = \sum_{k=1}^n v_j p_k, \quad \langle vv \rangle_j = \sum_{k=1}^n v_j v_j p_k - (\langle v \rangle_j)^2.$$

Dla otrzymania rozwiązania praktycznego zadania konieczne jest (ze względu na dużą liczbę operacji) opracowanie odpowiedniego programu na EMC.

Tworząc zbiór realizacji macierzy L_{ij} , można poszczególnym realizacjom przypisywać określone prawdopodobieństwo lub też utworzyć zbiór jednakowo prawdopodobnych realizacji. W pierwszym przypadku liczność zbioru może wynosić około 20, w drugim natomiast powinna być rzędu kilku setek.

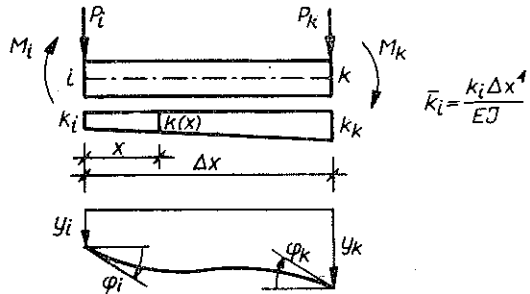
W dalszym ciągu pracy zilustrowano podane rozważania przykładem belki na sprężystym podłożu, dla której opracowane zostały odpowiednie programy na maszynie cyfrową.

2. BELKA NA NIEJEDNORODNYM, SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU W UJĘCIU METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Dla belki o osi prostoliniowej spoczywającej na podłożu sprężystym typu Winklera oraz o dowolnych warunkach brzegowych — celowe wydaje się przeprowadzenie analizy pola przemieszczeń i sił wewnętrznych za pomocą metody elementów skończonych. Ze względu na dalsze wykorzystanie konieczne jest określenie modułu podłoża przez funkcję $k(x)$.

Dzieląc belkę na elementy obciążone siłami zewnętrznymi o kierunkach dodatnich (rys. 1) przyjmujemy następującą funkcję kształtu:

$$(2.1) \quad y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$



Rys. 1. Element belki

Zmienność modułu podłoża dla elementu przyjęto wg funkcji liniowej:

$$(2.2) \quad k(x) = k_i \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) + k_k \frac{x}{\Delta x}.$$

Macierz sztywności dla elementu wyprowadzono przez bezpośrednią minimalizację całkowitej energii potencjalnej (2.3):

$$(2.3) \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta x} EJ (y')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\Delta x} k(x) y^2 dx - P_i y_i - P_k y_k - M_i \varphi_i - M_k \varphi_k.$$

Stałe a, b, c, \dots, e wyznaczymy z następujących warunków brzegowych:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} y(0) &= y_i, & y'(0) &= \varphi_i, \\ y(\Delta x) &= y_k, & y'(\Delta x) &= \varphi_k. \end{aligned}$$

Dodatkowo przyjmujemy, że funkcja kształtu (2.1) spełnia następujące równanie jednorodne w punkcie $x=0$ dla elementu $i-k$ (rys. 1):

$$(2.5) \quad \frac{d^4 y(x)}{dx^4} + \frac{k(x)}{EJ} y(x) = 0.$$

Tablica 1. Równania minimalizacyjne

$12 + \frac{\bar{K}_l}{24} \left[-\frac{5\bar{K}_k}{252} - \frac{17\bar{K}_k}{1260} \right] +$ $+ \frac{2}{7} \bar{K}_l + \frac{3}{35} \bar{K}_k + \frac{\bar{K}_l^2}{24^2} \times$ $\times \left[\frac{253}{1260} \bar{K}_l + \frac{\bar{K}_k}{1260} \right] + \frac{\bar{K}_l^2}{720}$	$6 + \frac{\bar{K}_l}{24} \left[-\frac{\bar{K}_l}{504} - \frac{\bar{K}_k}{630} \right] +$ $+ \frac{\bar{K}_k}{28} + \frac{\bar{K}_k}{60}$	$-12 + \frac{\bar{K}_l}{24} \left[-\frac{\bar{K}_l}{140} - \frac{5\bar{K}_k}{504} \right] +$ $+ \frac{9}{140} \bar{K}_l + \frac{9}{140} \frac{\bar{K}_k}{70}$	$6 + \frac{\bar{K}_l}{24} \left[\frac{\bar{K}_l}{630} + \frac{\bar{K}_k}{504} \right] +$ $\frac{\bar{K}_l}{60} - \frac{\bar{K}_k}{70}$	$\frac{P_l \Delta x^3}{EJ}$
$6 + \frac{\bar{K}_l}{24} \left[-\frac{\bar{K}_l}{504} - \frac{\bar{K}_k}{630} \right] +$ $\frac{\bar{K}_l}{28} + \frac{\bar{K}_k}{60}$	$4 + \frac{\bar{K}_l}{168} + \frac{\bar{K}_k}{280}$	$-6 + \frac{\bar{K}_l}{70} + \frac{\bar{K}_k}{60}$	$2 - \frac{\bar{K}_l}{280} - \frac{\bar{K}_k}{280}$	$\frac{M_l \Delta x^2}{EJ}$
$-12 + \frac{9}{140} \bar{K}_l + \frac{9}{140} \bar{K}_k +$ $\frac{\bar{K}_l}{24} \left[-\frac{\bar{K}_l}{140} - \frac{5\bar{K}_k}{504} \right] +$ $+ \frac{\bar{K}_l}{60} - \frac{\bar{K}_k}{70}$	$-6 + \frac{\bar{K}_l}{70} + \frac{\bar{K}_k}{60}$	$12 + \frac{3}{35} \bar{K}_l + \frac{2}{7} \bar{K}_k$	$-6 - \frac{\bar{K}_l}{60} - \frac{\bar{K}_k}{28}$	$\frac{P_k \Delta x^3}{EJ}$
$6 - \frac{\bar{K}_l}{60} - \frac{\bar{K}_k}{70} +$ $\frac{\bar{K}_l}{24} \left[\frac{\bar{K}_l}{630} + \frac{\bar{K}_k}{504} \right]$	$2 - \frac{\bar{K}_l}{280} - \frac{\bar{K}_k}{280}$	$-6 + \frac{\bar{K}_l}{60} + \frac{\bar{K}_k}{28}$	$4 + \frac{\bar{K}_l}{280} + \frac{\bar{K}_k}{168}$	$\frac{M_k \Delta x^2}{EJ}$

Po podstawieniu (2.1) do (2.4) i (2.5) otrzymano na stałe następujące wartości:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} a &= -\frac{k_i y_i}{24 EJ}, \\ b &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{2}{\Delta x} (y_i - y_k) + \varphi_i + \varphi_k \right] + \frac{k_i y_i \Delta x}{12 EJ}, \\ c &= -\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{3}{\Delta x} (y_i - y_k) + 2\varphi_i + \varphi_k \right] - \frac{k_i y_i \Delta x^2}{24 EJ}, \\ d &= \varphi_i, \quad e = y_i. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.1) do (2.3) przy wykorzystaniu (2.6) otrzymamy energię elementu odpowiadającą przyjętej funkcji kształtu, określoną przez skończoną liczbę parametrów węzłowych.

Dla tak otrzymanej energii mamy następujące warunki minimalizacji:

$$(2.7) \quad \frac{\partial J}{\partial y_i} = 0, \dots, \frac{\partial J}{\partial \varphi_k} = 0.$$

Z powyższego układu równań otrzymamy poszukiwane równania minimalizacyjne dla rozważanego elementu prętowego, podane w tabelicy 1.

W pierwszej wersji wyznaczono macierz sztywności dla funkcji kształtu wg wielomianu trzeciego stopnia. Uzyskane na tej podstawie przemieszczenia charakteryzowały się bardzo dobrą zgodnością z rozwiązaniami ścisłymi, natomiast znaczne rozbieżności otrzymywano dla sił wewnętrznych. Dlatego też w ostatecznej wersji przyjęto funkcję kształtu (2.1), co, jak wykazały liczne przykłady numeryczne, było przyjęciem właściwym. Ponadto dokonano pewnej modyfikacji w obliczeniach sił wewnętrznych.

Zamiast wyznaczyć siły wewnętrzne z równań

$$T = -EJ \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad M = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2},$$

wyznaczono je z macierzy sztywności dla elementu, która wiąże w poszczególnych węzłach przemieszczenia z siłami wewnętrznymi. Otrzymane tym sposobem siły wewnętrzne są jednoznacznie określone w poszczególnych węzłach oraz charakteryzują się dobrą zgodnością z analitycznymi rozwiązaniami testowymi.

Powyżej wspomniane testowe obliczenia numeryczne dotyczyły stałego modułu podłoża.

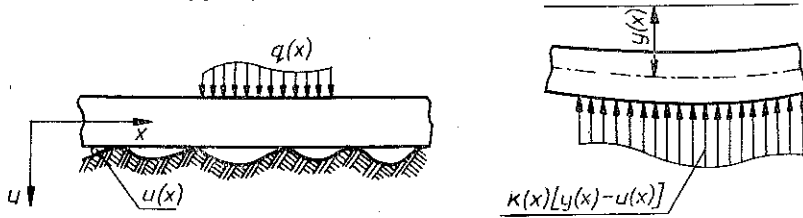
3. NUMERYCZNA ANALIZA BELEK NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU Z UWZGLĘDNIENIEM LOSOWYCH PARAMETRÓW UKŁADU

Zagadnienie belek na losowo zmiennym podłożu badane było w pracy BOLOTINA [2] dla belki nieskończenie długiej metodą małego parametru i analizy widmowej. Praca KAGANA [3] dotyczy również losowo zmiennego podłoża w ujęciu metody różnic skończonych. W pracy [4] podano doświadczalne wyznaczanie zmian krzy-

wizn rurociągu ułożonego w gruncie oraz porównanie gęstości widmowej krzywizn, otrzymane teoretycznie i z danych doświadczalnych.

Mając na uwadze utrudniony opis rzeczywistych charakterystyk gruntowych, zależny m.in. od rodzaju gruntu, sposobu zagęszczania, wilgotności, stopnia niejednorodności, jak również od przypadkowego charakteru występowania obciążeń — kompleksowy opis układu uzyskujemy uwzględniając zarówno w obciążeniu jak też w podłożu gruntowym losowy charakter występowania tych wielkości.

Rozpatrzmy belkę leżącą na niejednorodnym podłożu gruntowym ze wstępnymi nierównościami (rys. 2).



Rys. 2. Belka na nierównym podłożu

Równanie problemu dla konkretnej realizacji funkcji losowych jest następujące:

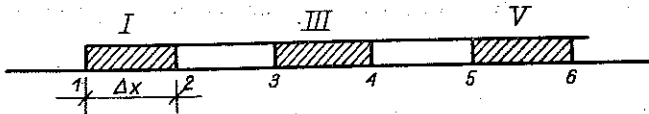
$$(3.1) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] + K(x) Y(x) = K(x) U(x) + Q(x),$$

gdzie $Y(x)$ oznacza przemieszczenie, $K(x)$ moduł podłoża, $Q(x)$ obciążenie, $U(x)$ nierówności podłoża; są to funkcje losowe, natomiast sztywność belki $EJ(x)$ jest funkcją w zwykłym sensie.

Efektywnym sposobem rozwiązania numerycznego powyższego zagadnienia jest metoda elementów skończonych, podana w p. 2.

Biorąc pod uwagę charakter i rodzaj losowości parametrów, opisujących układ, jak również odmienne czynniki wpływające na ich konkretne wartości w danej realizacji — w dalszej części pracy zagadnienie przeanalizowano w dwóch wariantach.

1. Zagadnienie stochastycznie liniowe, w którym zmienną losową jest obciążenie oraz wstępne nierówności podłoża gruntowego (sprowadzające się do pewnego zastępczego obciążenia). Losowe obciążenie określamy za pomocą jego wartości



Rys. 3. Podział belki na elementy

oczekiwanej oraz macierzy kowariancyjnej. Natomiast pozostałe wielkości określone są deterministycznie. Dzieliąc belkę na elementy (rys. 3) wyznaczamy odpowiednio wg wzorów (1.3) i (1.4) wartości oczekiwane i macierz kowariancyjną pola przemieszczeń. Charakterystyki sił wewnętrznych wyznaczamy przez macierz sztywności

elementu. Wypisując kolejno dla elementów I, III, V; (rys. 3) macierze sztywności, tworzymy pomocniczą macierz $[L]$ otrzymując następujące równanie:

$$(3.2) \quad [L]Y = M,$$

gdzie M i Y są wektorami macierzami wartości oczekiwanych sił wewnętrznych oraz przemieszczeń. Wykorzystując następnie wzory (1.5) oraz wnioski z p. 2, macierz kowariancyjną sił wewnętrznych wyznaczamy z następującego wzoru:

$$(3.3) \quad \langle MM \rangle_{lm} = [L_{rl}] [L_{sm}] \langle YY \rangle_{rs}.$$

2. Na podstawie ogólnej teorii podanej w p. 1 rozpatrzmy przypadek, gdy moduł podłoża jest funkcją losową. Ponieważ macierz sztywności elementu jest funkcją tego modułu, zatem zagadnienie staje się stochastycznie nieliniowym. Rozwiązanie tego przypadku budujemy za pomocą ogólnie sformułowanej w p. 1 metody tworzenia zbioru realizacji.

Przyjmujemy dla modułu podłoża następujący rozkład kanoniczny:

$$(3.4) \quad K(x) = m(x) + \sum_{j=1}^m v_j \varphi_j(x),$$

gdzie $m^{(k)}$ oznacza wartość oczekiwaną modułu podłoża, v_j zmienne losowe nieskorelowane o zerowych wartościach oczekiwanych oraz $\varphi_j(x)$ funkcje w zwykłym sensie.

Przyjmując za znany rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej v_j , rozwiązanie można zbudować przedstawiając funkcję losową w postaci zbioru realizacji z określonymi prawdopodobieństwami; rozwiązując (1.1) dla każdej realizacji otrzymujemy skończony zbiór elementarnych rozwiązań. Następnie obliczamy na podstawie (1.9) odpowiednio dla przemieszczeń i sił wewnętrznych

wartości oczekiwane

$$(3.5) \quad \langle Y \rangle = \sum_{i=1}^m Y_i p_i, \quad \langle M \rangle = \sum_{i=1}^m M_i p_i,$$

wariancje

$$(3.6) \quad \langle YY \rangle = \sum_{i=1}^m \{Y_i\} Y_i p_i - (\langle Y \rangle)^2,$$

$$\langle MM \rangle = \sum_{i=1}^m \{M_i\} M_i p_i - (\langle M \rangle)^2,$$

gdzie macierze $\{...\}$ są macierzami diagonalnymi o elementach równych odpowiednim elementom macierzy Y i M .

Przedstawiona powyżej metoda tworzenia zbioru realizacji jest bardzo efektywną metodą do obliczeń numerycznych na komputerach. Bardzo istotnym elementem obliczeń w powyższej metodzie jest ściśle zachowanie warunku

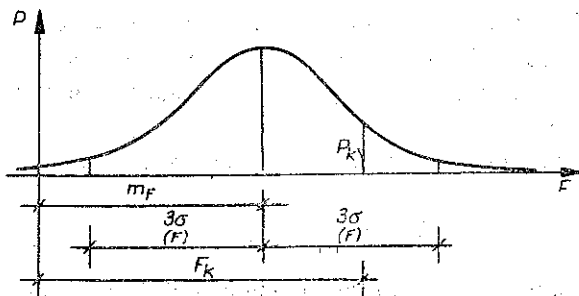
$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

W razie niespełnienia (3.7) otrzymuje się duże błędy w rozwiązaniu (3.6).

Jak już wspomniano, dla obydwu wariantów zostały napisane programy na komputer ODRA 1204 umożliwiające wyznaczenie odpowiednich wielkości dla jednorodnych warunków brzegowych.

4. ZAGADNIENIE STOCHASTYCZNIE LINIOWE. PORÓWNANIE OBU METOD NUMERYCZNYCH

Zagadnienie stochastycznie liniowe można również rozwiązać metodą tworzenia zbioru realizacji przy założeniu, iż dysponujemy funkcją gęstości prawdopodobieństwa obciążenia zewnętrznego.



Rys. 4. Gęstość prawdopodobieństwa dla obciążenia

Tworząc elementarne realizacje, np. z obszaru $m_F \pm 3\sigma$, otrzymamy rozwiązanie równania (1.1) dla i -tej realizacji:

$$(4.1) \quad y_j = L_{jk}^{-1} F_k, \quad F_k = m_k + \frac{6i}{n-1} \sigma_k,$$

gdzie m_k jest wartością oczekiwaną obciążenia w punkcie k , n liczbą realizacji, σ_k odchyleniem standardowym obciążenia w punkcie k , przy czym $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (n-1)/2$.

Wyznamy wartość oczekiwaną pola przemieszczeń wg (3.5)₁:

$$(4.2) \quad \langle y \rangle_j = \sum_{i=-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)} y_i p_i = \sum_{i=-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)} L_{jk}^{-1} \left[m_k + \frac{6i}{n-1} \sigma_k \right] p_i =$$

$$= L_{jk}^{-1} m_k \sum_{i=-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)} p_i + L_{jk}^{-1} \frac{6\sigma_k}{n-1} \sum_{i=-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)} i p_i = L_{jk}^{-1} m_k \cdot$$

Ponieważ dla rozkładu symetrycznego $\sum i p_i = 0$, otrzymano zatem zależność taką samą jak (4.1)₁ przy założeniu, iż $\sum p_i = 1$.

Postępując analogicznie wyznaczymy również wariancję wg (3.6)₁:

$$(4.3) \quad \langle y y \rangle_j = \sum_{i=-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)} y_j y_j p_i - (\langle y \rangle_j)^2.$$

Po podstawieniu (4.1)₁ i koniecznym zachowaniu (3.7) otrzymamy wzór

$$(4.4) \quad \langle yy \rangle_j = [L_{jk}^{-1} \sigma_k]^2 \left\{ \left(\frac{6}{n-1} \right)^2 \sum_{i=-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)} i^2 \times p_i \right\}.$$

Można wykazać, iż dla «dużej» liczby realizacji n wyrażenie {...} zmierza do jedności, a zatem otrzymujemy w końcu wzór:

$$(4.5) \quad \langle yy \rangle_j \approx [L_{jk}^{-1} \sigma_k]_{(F)}^2.$$

Wyznaczając z (1.4) elementy diagonalne macierzy kowariancyjnej k_{lm} przy założeniu, iż macierz kowariancyjna obciążenia zewnętrznego jest diagonalna, otrzymujemy następujący wzór:

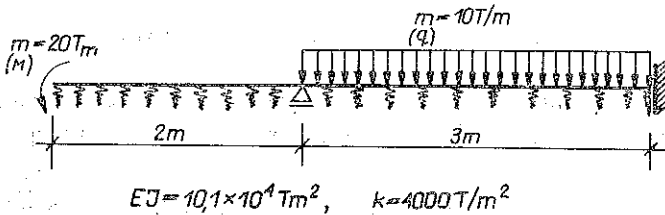
$$(4.6) \quad k_{ll} = L_{lr}^{-1} L_{lr}^{-1} k_{rr} \equiv [L_{lr}^{-1} \sigma_{rr}]_{(F)}^2,$$

przy czym $k_{rr} = \sigma_{rr}$, gdzie σ_{rr} jest odchyleniem standardowym; zatem wzory (4.5) i (4.6) są numerycznie identyczne dla dużej liczby realizacji.

Z przeprowadzonych obliczeń numerycznych wynika, iż bardzo dobrą zgodność obydwu metod uzyskano już dla 21 realizacji. Obecnie brak jednak precyzyjnego określenia odnośnie optymalnej liczby realizacji dla różnych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa.

5. PRZYKŁADY

A. Dla danej belki spoczywającej na jednorodnym podłożu i obciążonej losowo zmiennym obciążeniem wyznaczmy wartości oczekiwane i macierze kowariancyjne przemieszczeń i sił wewnętrznych. Przyjęto następujące przedziały zmienności obciążenia: $M \in [17; 23 \text{ Tm}]$, $q \in [7; 13 \text{ T/m}]$.



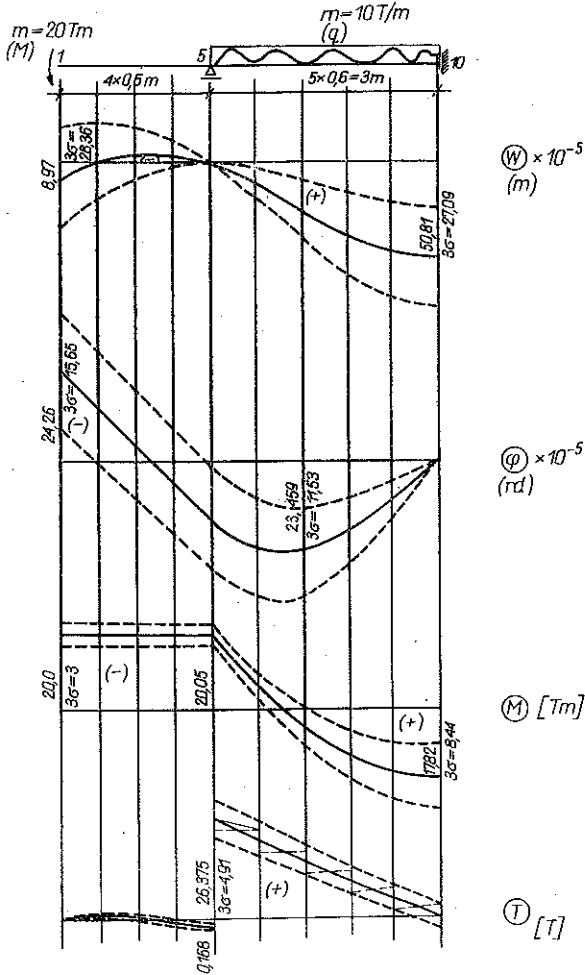
Rys. 5. Belka ze zmiennym obciążeniem

Wykresy odpowiednich wielkości podano na rys. 6.

B. Dla belki (rys. 7), spoczywającej na losowo zmiennym podłożu, wyznaczono wartości oczekiwane i wariancje pola przemieszczeń i sił wewnętrznych.

Przyjęto następującą zmienność modułu podłoża:

$$k(x) = k_0 + b \sin \frac{\pi x}{a},$$



Rys. 6. Wyniki dla zmiennego obciążenia

gdzie a i b są zmiennymi losowymi o rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa przedstawionym na rys. 8. Dla zmiennych losowych a i b przyjęto następujące parametry:

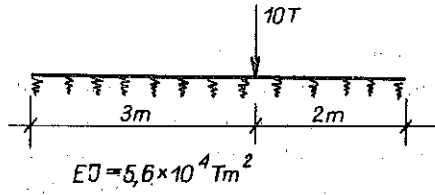
$$a \rightarrow m_y = 2L, \quad \sigma_y = \frac{L}{3}, \quad b \rightarrow m_x = 0, \quad \sigma_x = \frac{k_0}{3}.$$

(a) (b)

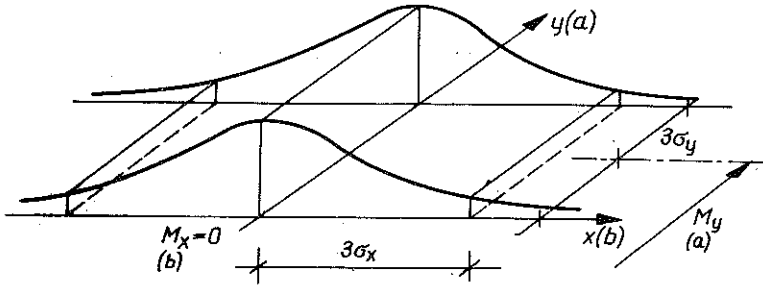
Dla 28 realizacji odpowiednie wielkości przedstawiono na rys. 9.

6. ZAKOŃCZENIE

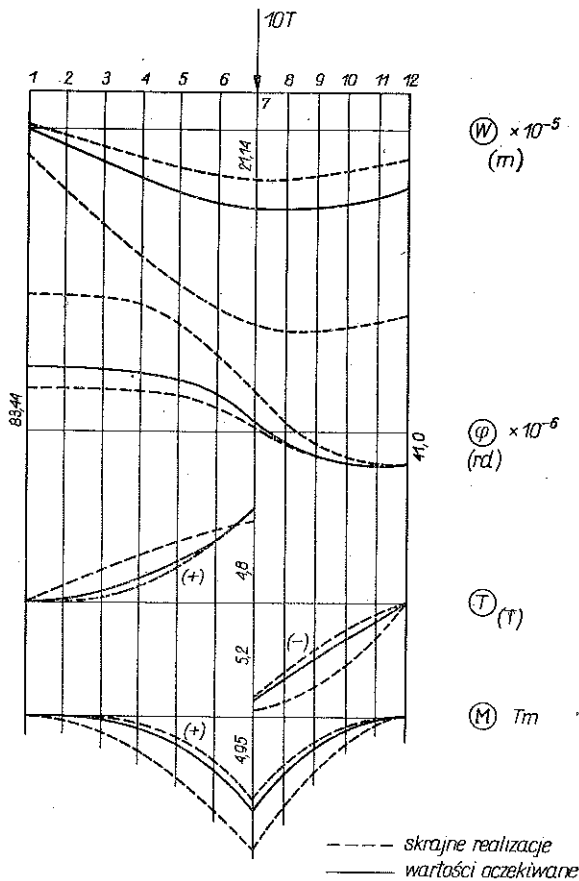
W większości praktycznych zagadnień inżynierskich obciążenia lub parametry układu konstrukcyjnego nie są znane w sposób ścisły. W porównaniu do deterministycznego punktu widzenia potraktowanie tych wielkości jako zmiennych lub funkcji losowych jest zatem spojrzeniem bardziej realistycznym.



Rys. 7. Belka na niejednorodnym podłożu



Rys. 8. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennych a i b



Rys. 9. Wyniki dla zmiennego podłoża

Praca zawiera ogólną koncepcję rozwiązywania numerycznego liniowych zagadnień teorii konstrukcji, opisywanych przez zmienné lub funkcje losowe. Na przykładzie belki na sprężystym podłożu rozwiązanie przedstawiono w postaci obszarów zawierających wyniki o określonym prawdopodobieństwie wystąpienia.

Dalszym postępowaniem w kierunku poprawnego projektowania konstrukcji tego typu byłoby zastosowanie do otrzymanych rozwiązań metod teorii niezawodności.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. А. Ломакин, *Статистические задачи механики твердых деформируемых тел*, Москва 1970.
2. В. В. Болотин, *Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений*, Москва 1971.
3. А. Я. Каган, *Исследования деформаций балок на стохастическом упругом основании методом монте-карло*, *Строительная механика и расчет сооружений*, 3, 1972.
4. Е. П. Кудрявцев и другие, *О статистических характеристиках механических неоднородностей подземных трубопроводов*, *Строительная механика и расчет сооружений*, 6, 1967.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Работа содержит общую формулировку численного решения линейных задач теории конструкции, для которых параметры описывающие систему и нагрузку, из-за своей физической интерпретации, являются случайными переменными. Опираясь на метод конечных элементов отдельно анализируется: 1) линейная стохастическая задача, когда случайной переменной является нагрузка и 2) нелинейная стохастическая задача в случае, когда случайными переменными являются параметры описывающие систему.

Применение обоих методов представлено на примере балки на неоднородном упругом основании в трактовке метода конечных элементов.

Для обоих задач изготовлены программы на ЭВМ ОДРА 1204.

SUMMARY

STOCHASTIC PROCESSES IN LINEAR ELASTIC SYSTEMS

The paper deals with the general approach to the numerical solution of linear problems in a theory of structure. The parameters describing the system and loading, due to their physical meaning are chosen as the random variables. Using the finite element method two problems were analyzed independently: 1) the linear stochastic problem with loading as a random variable and 2) the non-linear stochastic problem where, for the random variables the parameters describing the system were assumed.

The application of both the above approaches was demonstrated with the example of a beam lying on the homogeneous elastic foundation. Corresponding programs for the digital computer ODRA 1204 were prepared.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 listopada 1974 r.