

O RÓWNOWADZE SIŁ MOMENTOWYCH W NAROŻU CIENKOŚCIENNEJ RAMY

JAN KAZIMIERZ SZMIDT (SZCZECIN)

Praca dotyczy naroża cienkościennej ramy składającej się z elementów o przekroju dwuteowym (I). Kołnierze elementów zbiegających się w narożu nie leżą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny ramy. Wykorzystując teorię wytrzymałości materiałów wykazano, że w tym narożu nie spełniona jest równowaga sił momentowych. Wyprowadzono zależności między siłami momentowymi i paczeniem się przekrojów poprzecznych, zbiegających się elementów w tego typu narożu. Rozważania zilustrowano prostym przykładem liczbowym.

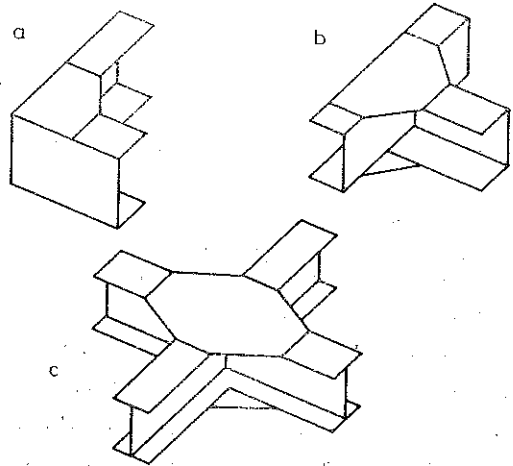
1. WSTĘP

W niniejszym opracowaniu analizuje się problem modelowania pracy węzłów ram z elementów cienkościennych. Aktualność tego problemu wynika z faktu, że niejednokrotnie przyjmuje się tu bezkrytycznie wszystkie założenia analizy ram składających się z prętów o przekrojach zwartych i próbuje się je uogólnić na sferę ram cienkościennych. W opracowaniu wykazuje się, że takie postępowanie jest możliwe tylko w niektórych przypadkach szczególnych.

Jak wiadomo, węzły ram z prętów o przekrojach zwartych sprowadza się w obliczeniach do teoretycznego punktu leżącego na przecięciu osi schodzących się w nim prętów, a równania równowagi węzła wyrażają wówczas fakt przenoszenia się sił wewnętrznych w takim węźle. Dla ram z prętów cienkościennych sprowadzenie węzła do teoretycznego punktu jest możliwe tylko dla pewnej klasy tych ram o szczególnej konstrukcji węzłów. Występują tu bowiem nowe wielkości, takie jak

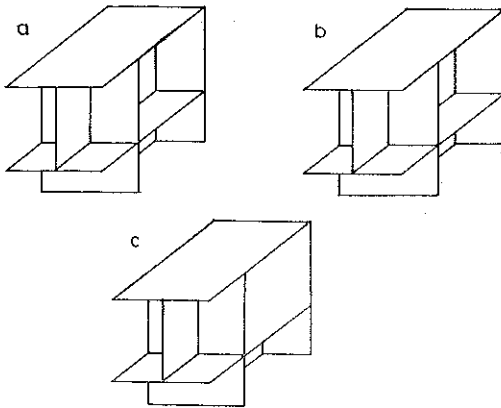
bimoment i spaczenie. Okazuje się, że sposób «rozdzięcia» tych wielkości na przekroje przywęzłowe prętów zbiegających się w węźle zależy w sposób istotny od jego konstrukcji.

Dla niektórych typów węzłów (rys. 1a, b, c) oraz przy pewnych założeniach upraszczających można ustawić równanie równowagi bimomentów. Węzły takie,



Rys. 1

badane w pracach [2 i 3], są elementami łączącymi zbiegające się w nich pręty cienkościenne, co do których przyjmuje się, że składają się ze środników i półek. Dodatkowo zakłada się, że półki prętów leżą w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny ramy. Przy obliczaniu pomija się tu sztywności giętne środników i półek w obrębie



Rys. 2

w którym półki schodzących się w nim prętów rygla i słupa nie leżą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny ramy (rys. 2a). Dla porównania poddaje się skrótowej analizie także dwa inne typy węzła (rys. 2 b, c), które można wyprrowadzić z typu pierwszego.

węzła, zakładając jednocześnie nieskończenie wielką sztywność półek (blach węzłowych) w swoich płaszczyznach.

Pewne typy węzłów cienkościennych ram przestrzennych analizowane były przez K. CZAPLIŃSKIEGO w jego pracach [4 i 5]. Biorąc za podstawę analizy technicznej teorię skręcania prętów cienkościennych dochodzi autor do równania równowagi bimomentów w węźle dyskusowanego typu [4] i do uogólnionych równań równowagi węzła [5].

W pracy niniejszej bada się praktycznie ważny przypadek węzła,

2. ANALIZA PRACY WĘZŁA

2.1. Węzeł normalny (rys. 2a)

W celu przeanalizowania sprawy przenoszenia się bimomentów i spaceń w węźle rozpatruje się poniżej prostą ramę wspornikową, której pręty rygla i słupa, o przekrojach dwuteowych, łączą się z sobą w badanym węźle (rys. 3a).

Przeprowadzimy najpierw analizę statyczną. Niech od strony rygla, w bezpośrednim przekroju przywęzłowym działa moment skręcający $H_r = T_1 h_r$ i bimoment $B_r = M_1 h_r$, realizowane odpowiednio przez siły T_1 i momenty M_1 , działające w płaszczyznach półek rygla (rys. 3b). Dla tego obciążenia należy wyznaczyć bimoment w przekroju przywęzłowym słupa oraz znaleźć związki pomiędzy spaceniami przekrojów przywęzłowych rygla i słupa. Pomijając sztywności płytowe elementów tworzących węzeł, przyjmuje się tym samym, że rygiel w swoim położeniu utrzymuje się na przeponach stanowiących przedłużenie półek słupa (przepony 1-2-3-4 i 5-6-7-8 na rys. 3b). Na skutek obciążenia, działającego od strony rygla w krawędziach połączenia półek i wymienionych przepon, powstaną naprężenia, które zastępuje się wypadkowymi siłami T_2 i T_3 (rys. 3c — krawędzie 1-4, 2-3, 5-8, 6-7.

Wypisując równania równowagi niezależnie dla górnej i dolnej półki ryglu w obszarze 1-2-3-4-5-6-7-8 węzła, otrzymuje się

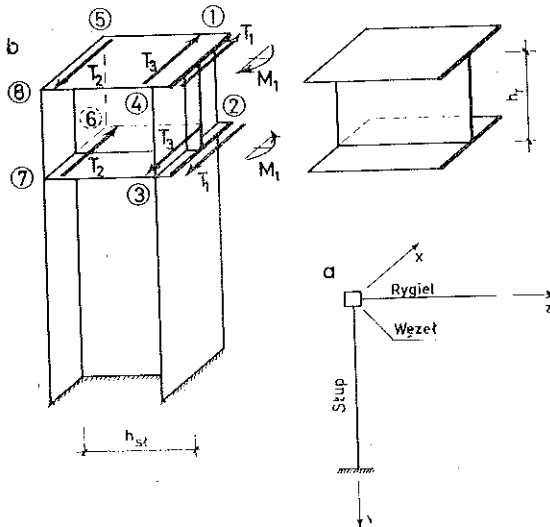
$$(2.1) \quad \begin{aligned} -T_2 + T_3 + T_1 &= 0, \\ T_2 h_s - M_1 &= 0. \end{aligned}$$

Równocześnie powinny być spełnione następujące równania:

$$(2.2) \quad H_r = T_1 h_r, \quad B_r = M_1 h_r.$$

Z rozwiązania równań (2.1) i (2.2) wynikają wzory

$$(2.3) \quad \begin{aligned} T_2 &= \frac{B_r}{h_r h_s} = \frac{M_1}{h_s}, \\ T_3 &= \frac{1}{h_r} \left(\frac{B_r}{h_s} - H_r \right). \end{aligned}$$



Rys. 3

Na słup działają te same siły T_2 i T_3 , ale ze zwrotami przeciwnymi do tych z rys. 3b. Powodują one zginanie półek słupa w ich płaszczyznach momentami

$$(2.4) \quad M_2 = T_2 h_r$$

dla płaszczyzny 5-6-7-8 oraz

$$(2.4') \quad M_3 = T_3 h_r$$

dla płaszczyzny 1-2-3-4.

Moment zginający słup określamy wzorem

$$(2.5) \quad M_g = M_2 - M_3.$$

Łącząc wzory (2.3) (2.4) i (2.5) otrzymuje się

$$(2.6) \quad M_g = H_r.$$

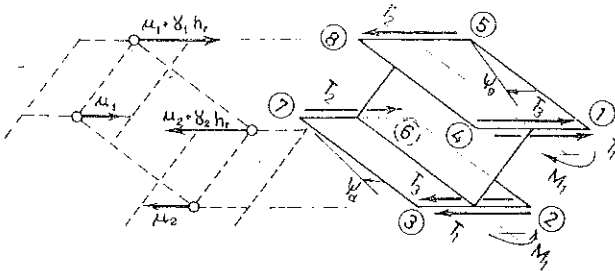
Bimoment w przekroju przywęzłowym słupa jest następujący:

$$(2.7) \quad B_s = \frac{M_2 + M_3}{2} h_s.$$

Uwzględniając zależności (2.3) i (2.4) można równanie (2.7) po prostych przekształceniach doprowadzić do postaci

$$(2.8) \quad B_s = B_r - H_r \frac{h_s}{2}.$$

Z kolei zajmiemy się analizą przemieszczeń. Na skutek obciążenia półek słupa momentami zginającymi M_2 i M_3 słup obróci się dookoła swojej osi jak również wykona obrót odpowiadający zginaniu według wzoru (2.6). Spowoduje to odpowiednio obroty półek słupa w ich płaszczyznach o kąty wzajemnie przeciwnie zwrócone oraz przemieszczanie ryglu. Otrzymuje się zatem spaczenie słupa. Trzeba zadać pytanie, jak przeniesie się ono na rygiel? Aby to ustalić, zakłada się wirtualne przemieszczenia przekroju przywęzłowego słupa: liniowe μ_1 i μ_2 oraz kątowe γ_1 i γ_2 (rys. 4). Stosownie do tego krawędzie 2-3, 1-4, 6-7 i 5-8 przemieszczą się odpowiednio o μ_2 , $\mu_2 + \gamma_2 h_r$, μ_1 i $\mu_1 + \gamma_1 h_r$ (rys. 4).



Rys. 4

Oddzielając myślowo rygiel od słupa traktuje się siły T_2 i T_3 jako zewnętrzne dla ryglu. Ponieważ węzeł ma być w równowadze, praca wszystkich sił na przemieszczeniach wirtualnych powinna być równa zero. Otrzymuje się stąd dwa równania odpowiednio dla półki górnej i dolnej ryglu:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} M_1 \psi_g - T_1 (\mu_2 + \gamma_2 h_r) - T_2 (\mu_1 + \gamma_1 h_r) - T_3 (\mu_2 + \gamma_2 h_r) &= 0, \\ -M_1 \psi_d + T_1 \mu_2 + T_2 \mu_1 + T_3 \mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach kąty ψ_d i ψ_g stanowią odpowiednio kąty obrotów dolnej i górnej półek ryglu w swoich płaszczyznach. Uwzględniając równania (2.1), (2.2) i (2.3) otrzymuje się z równań (2.9) następujące wzory:

$$(2.10) \quad \psi_g = \frac{\mu_1 + \gamma_1 h_r + \mu_2 + \gamma_2 h_r}{h_s}, \quad \psi_d = \frac{\mu_1 + \mu_2}{h_s}.$$

Kąty ψ_g i ψ_d można także przedstawić w formie

$$(2.11) \quad \psi_g = \psi^* + \psi^{**}, \quad \psi_d = \psi^* - \psi^{**}.$$

Spaczenie Θ_r^1 przywęzłowego przekroju rygła można uzależnić od kąta ψ^{**} w następujący sposób:

$$(2.12) \quad -\Theta_r^1 = \frac{2\psi^{**}}{h_r}.$$

Wykorzystując związki (2.10) (2.11) i (2.12) uzyskuje się

$$(2.13) \quad \Theta_r^1 = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{h_s}.$$

Kąt obrotu słupa względem swojej osi wynosi

$$(2.14) \quad \Theta_s = \Theta_y = \psi^* = \frac{\mu_1 + \mu_2}{h_s} + \frac{h_r}{2h_s}(\gamma_1 + \gamma_2).$$

Spaczenie przekroju przywęzłowego słupa otrzymuje się bezpośrednio z rys. 4:

$$(2.15) \quad \Theta_s^1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{h_s}.$$

Łącząc (2.13) i (2.15), otrzymuje się prosty związek

$$(2.16) \quad \Theta_r^1 + \Theta_s^1 = 0.$$

Wnioski o przenoszeniu się bimomentów i spaczeń w węźle ramy cienkościennej, wyprowadzone w postaci wzorów (2.8) i (2.16), są bardzo wygodne, ale trzeba odnieść się do nich z rezerwą, ponieważ przedstawiona wyżej analiza ma charakter przybliżony. I tak np. wzajemne oddziaływanie prętów rygła i słupa zastępuje się tu siłami skupionymi T_2 i T_3 działającymi w krawędziach węzła, a hipotezy W. Z. WŁASOWA [1], dotyczące prętów cienkościennych, odnosi się także do obszaru węzła. Pomiędzy ponadto jako małe sztywności giętne elementów tworzących węzeł.

Dla porównania rozważmy tę samą ramę z innymi węzłami (rys. 2b,c).

2.2. Węzeł «wiatki» (rys. 2b)

Łatwo zauważyć, że przy obciążeniu rygła ramy bimomentem i momentem skręcającym, siły z rygła mogą się przenieść na słup raczej wyłącznie wskutek oddziaływań płytowych elementów węzła. Nie można tutaj traktować niezależnie górnego i dolnego pasa rygła w obrębie węzła, jak to miało miejsce w poprzednim przypadku. Można by tu założyć swobodę paczenia się przekrojów przywęzłowych rygła i słupa niezależnie od siebie, bimomenty w tych przekrojach byłyby równe zeru. Moment skręcający od strony rygła wywołuje silne zginanie środka, co spowoduje duży obrót górnej półki rygła w tym miejscu. Przypadek ten nie jest zatem, ze względów praktycznych, rozwiązaniem dopuszczalnym w konstrukcji.

2.3. Węzeł «sztywny» (rys. 2c)

Węzeł ten powstaje przez zamknięcie przestrzeni węzła «normalnego» (rys. 2a) dwiema pionowymi płytami bocznymi. W efekcie otrzymuje się węzeł w postaci zamkniętego pudełka przegrodzonego dodatkowo wewnątrz środnikiem. Jest to konstrukcja stosunkowo sztywna na skręcanie. Można by więc przyjąć, że węzeł taki jest bryłą doskonale sztywną i nie podlega żadnym odkształceniom. Założeniu temu odpowiadałby wówczas warunek zerowania się spaczni w przekrojach przywęzłowych i trzeba by założyć, że bimomenty się nie przenoszą. Te ostatnie, bowiem, jako statycznie równoważne zero, gubiłyby się w obrębie węzła każdy z osobna.

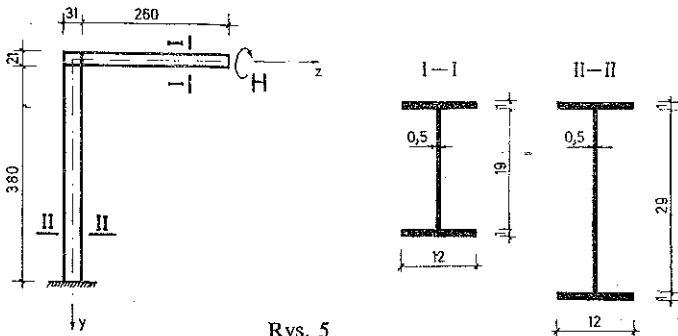
3. WNIOSKI

Wydaje się, że przynajmniej w odniesieniu do ram z węzłami «normalnymi» (rys. 2a) można uznać przeprowadzoną przybliżoną analizę za dostatecznie dokładną i w obliczeniach praktycznych ram cienkościennych z takimi węzłami wykorzystać wyprowadzone tutaj wzory (2.8) i (2.16). Spaczenia w przekrojach przywęzłowych przenoszą się ze zmianą znaku, bimomenty w tych przekrojach różnią się między sobą. Różnica w wielkości bimomentów zależy od wymiarów przekrojów poprzecznych prętów zbiegających się w węzle oraz od momentów skręcających w przekrojach przywęzłowych.

Dokładniejsze badania, dające wyniki bliższe rzeczywistości, można przeprowadzić na podstawie metod teorii sprężystości. Płaci się za to jednak znacznym zwiększeniem nakładu pracy, co stanowiłoby uzasadnienie racjonalnego wykorzystania teorii przybliżonej.

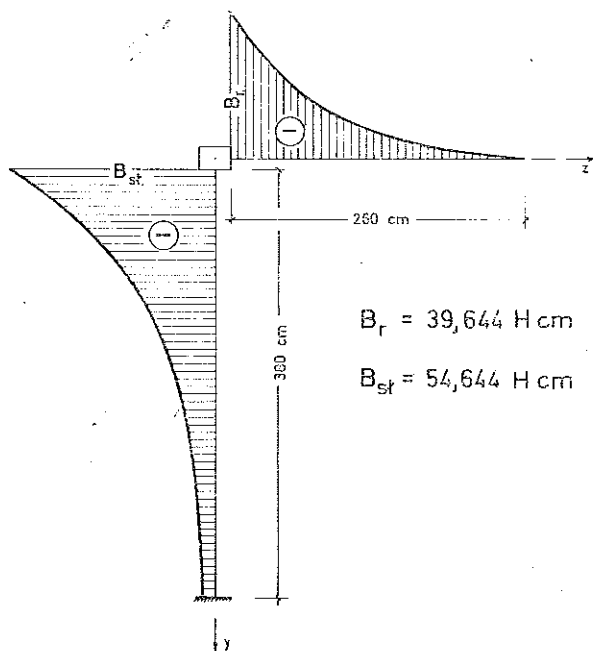
4. PRZYKŁAD LICZBOWY

W uzupełnieniu przeprowadzonych rozważań teoretycznych przedstawia się niżej przykład liczbowy odniesiony do ramy cienkościennej składającej się z rygla i słupa, połączonych w węzle typu «normalnego». Charakterystyka ramy zana-



Rys. 5

czona jest na rys. 5. Wykresy bimomentów, wyznaczone na podstawie przeprowadzonej wyżej analizy, przy obciążeniu końca rygla momentem skręcającym przedstawia rys. 6.



Rys. 6

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Госуд. издатель. физико-матем. литературы, Москва 1959.
2. Б. Н. Горбунов, А. И. Стрельбицкая, *Теория рам из тонкостенных стержней*, Огиз-Гостехиздат, Москва 1948.
3. Д. В. Бычков, *Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций*, Гостройиздат, Москва 1962.
4. K. CZAPLIŃSKI, *Kąt spazenia i równowaga bimomentów w węźle sztywnym pewnego typu*, Arch. Inżyn. Łądown., 16, 2, 1970.
5. K. CZAPLIŃSKI, W. DĄBROWSKI, *O równowadze węzłów w cienkościennych konstrukcjach przestrzennych*, Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej, Nr. 187, Bud. Łąd., 23, 1972.

Резюме

О РАВНОВЕСИИ БИМОМЕНТОВ В УЗЛЕ ТОНКОСТЕННОЙ РАМЫ

В работе рассматриваются некоторые типы узлов тонкостенной рамы состоящей из стержней двутаврового сечения. Полки сбегающих в узле стержней не лежат в плоскости параллельной плоскости рамы. На основании сопротивления материалов, указано, что для рассматриваемого типа узла, не возможно приравнять к нулю суммы бимоментов. Получены зависимости между бимоментами и деформациями в приузловых сечениях, важны для обсуждаемого типа узла. Исследования иллюстрированы числовым примером.

SUMMARY

ON THE EQUILIBRIUM OF BIMOMENTS AT THE CORNER OF A THINWALLED FRAME

The paper deals with the corner of a thinwalled frame consisting of members with I — sections. The ledges of the members converging at the corner are not situated in the plane parallel to the frame plane. Basing on the strength of materials, it has been proved that the equilibrium of biomoments at this corner does not take place. The dependences between bimoments and warpings in cross-sections of converging members in that type of corner have been deduced. A simple numerical example illustrates the considerations.

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 października 1974 r.
