

DYNAMIKA DACHÓW PŁYWAJĄCYCH

ANDRZEJ S A W I C K I (GDAŃSK)

W pracy rozważana jest teoria pływających dachów w zbiornikach walcowych. Rozważany jest klasyczny model hydrosprężystości: ustalone drgania układu pływający dach — ciecz idealna. Podstawą rozważań jest liniowa teoria sprężystości i liniowa teoria fal wodnych. Zanalizowano harmoniczne drgania swobodne i drgania wymuszone. Przedstawiono przykład liczbowy dla analizy dynamicznej typowego pływającego dachu.

W pracy przedstawiono analizę dynamiczną dachów pływających w zbiornikach na cieczy. Rozpatruje się klasyczny model hydrosprężystości, mianowicie sprzężone drgania układu płyta — ciecz w ramach liniowej teorii sprężystości i liniowej teorii falowania cieczy idealnej, zachodzącego pod wpływem sił ciężkości. Ciecz wypełnia obszar ograniczony nieruchomą i nieodkształcalną powierzchnią w postaci kierownicy i podstawy walca kołowego. Na powierzchni cieczy spoczywa dach pływający, złożony ze sprężystej płyty zamocowanej w pierścieniowym pontonie, który w porównaniu z płytą jest konstrukcją bardzo sztywną.

Dynamika przekryć zbiorników była przedmiotem niewielkiej ilości publikacji. Pracę [1] poświęcono drganiom zbiornika wieżowego z przekryciem w postaci membrany zamocowanej w ścianach zbiornika, a prace [4 i 5] związane są tematycznie z niniejszym opracowaniem. Praca [4] dotyczy uproszczonego sposobu wyznaczania częstości własnych dla przypadku osiowej symetrii. Rezultaty pracy [5] można otrzymać jako szczególny przypadek wyników przedstawionych poniżej. Zagadnieniem stateczności dachów pływających (z uwzględnieniem odkształcalności pontonu) zajmował się MITCHELL [3].

Niniejsza praca obejmuje drgania własne i wymuszone układu: dach pływający — ciecz w zakresie drgań stacjonarnych i harmonicznych.

1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA I WYPROWADZENIE POMOCNICZYCH ZALEŻNOŚCI HYDRODYNAMICZNYCH

Badany układ przedstawiono na rys. 1. Zbiornik posiada promień R_2 i jest wypełniony cieczą do głębokości H . Na powierzchni cieczy spoczywa dach pływający, złożony z płyty o promieniu R_1 i pontonu o szerokości b . Zakładamy, że w stanie spoczynku płyta jest nieobciążona. Równanie ruchu płyty ma postać

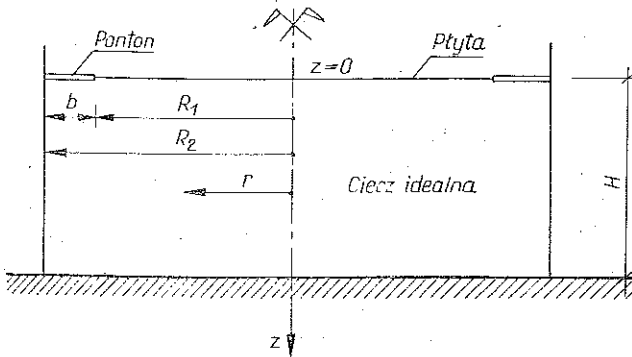
$$(1.1) \quad \rho h \ddot{w} + D \nabla^2 \nabla^2 w = -p + q,$$

gdzie ρ , h , D , w są odpowiednio gęstością, grubością, sztywnością na zginanie i ugięciem płyty, p jest ciśnieniem wywieranym na płytę przez ciecz, q wzbudzeniem

zewnątrznym. Do równania (1.1) należy dołączyć warunki brzegowe dla płyty, które sformułujemy później. Zajmiemy się natomiast określeniem parcia cieczy na płycie. Wyznamy je z całki Cauchy'ego-Lagrange'a, która jest rozwiązaniem równań ruchu Eulera dla przypadku ruchu niewirowego cieczy idealnej w potencjalnym polu sił [2]. Wspomniana całka ma postać

$$(1.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 - U + P = F(t),$$

gdzie Φ jest potencjałem prędkości cieczy, $U = gz$ potencjałem sił ciężkości, $P = p/\gamma$ jest funkcją ciśnienia oraz $F(t)$ pewną funkcją czasu (dla drgań stacjonarnych przyjmujemy $F=0$).



Rys. 1. Schemat zbiornika z dachem pływającym

Formułując zadanie w małych prędkościach należy przyjąć $V^2 \approx 0$ i wówczas ciśnienie cieczy wynosi

$$(1.3) \quad p = -\gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - gz \right),$$

gdzie γ jest masą właściwą cieczy.

Występujący we wzorach (1.2) i (1.3) potencjał prędkości Φ powinien spełniać następujące równania:

$$(1.4) \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

oraz

$$(1.5) \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=R_2} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=H} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Warunek (1.4) jest równaniem ciągłości, dwa pierwsze warunki (1.5) oznaczają, że składowe prędkości normalne do nieodkształcalnych powierzchni zbiornika są równe zeru. Trzecie z równań (1.5) jest warunkiem brzegowym sprzężenia drgań układu płyta - ciecz. Wprowadźmy zamiast potencjału prędkości Φ potencjał przemieszczeń $\chi(r, \theta, z; t)$ według formuły

$$(1.6) \quad \Phi = - \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Wówczas równanie (1.3) przybierze postać

$$(1.7) \quad p = \gamma \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + gz \right],$$

gdzie potencjał przemieszczeń χ spełnia równanie

$$(1.8) \quad \nabla^2 \chi = 0$$

oraz

$$(1.9) \quad \left[\frac{\partial \chi}{\partial r} \right]_{r=R_2} = 0, \quad \left[\frac{\partial \chi}{\partial z} \right]_{z=H} = 0, \quad \left[\frac{\partial \chi}{\partial z} \right]_{z=0} = -w.$$

Jako zagadnienie pomocnicze rozwiążemy oddzielnie zadanie o swobodnym falowaniu cieczy w zbiorniku walcowym. Otrzymane rozwiązanie wykorzystamy do wyznaczenia potencjału χ .

Poszukujemy potencjału prędkości $\Psi(r, \theta, z; t)$ spełniającego równanie Laplace'a oraz następujące warunki brzegowe:

$$(1.10) \quad \left[\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right]_{r=R_2} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right]_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right]_{z=0}.$$

Równanie Laplace'a oraz dwa pierwsze warunki (1.10) spełniają funkcje

$$(1.11) \quad \Psi_{mn} = A_{mn} e^{i\omega_{mn}t} \operatorname{ch} k_{mn}(z-H) \cos m\theta J_m(k_{mn}r),$$

gdzie k_{mn} są ciągiem liczb będących pierwiastkami równania

$$(1.12) \quad k_{mn} J_m'(k_{mn} R_2) = 0.$$

Symbole ω_{mn} oznaczają częstości kołowe swobodnego falowania cieczy, które wyznaczmy z trzeciego warunku brzegowego (1.10):

$$(1.13) \quad \omega_{mn}^2 = g k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H).$$

Potencjału przemieszczeń χ poszukiwać będziemy w postaci szeregu układu funkcji

$$(1.14) \quad \Psi_{mn} = \operatorname{ch} k_{mn}(z-H) \cos m\theta J_m(k_{mn}r),$$

otrzymanego ze wzoru (1.11). Napiszemy go w postaci

$$(1.15) \quad \chi(r, \theta, z; t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{ch} k_{mn}(z-H) \cos m\theta J_m(k_{mn}r),$$

gdzie B_{mn} są nieznanymi współczynnikami rozwinięcia w szereg, a ω jest częstością kołową drgań układu płyta-ciecz. Funkcja (1.15) spełnia równanie (1.8) oraz pierwsze dwa warunki brzegowe (1.9). Trzeci z warunków (1.9) daje wzór

$$(1.16) \quad w = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H) \cos m\theta J_m(k_{mn}r),$$

będącą warunkiem sprzężenia drgań. Parcie cieczy na płytę określa więc wzór

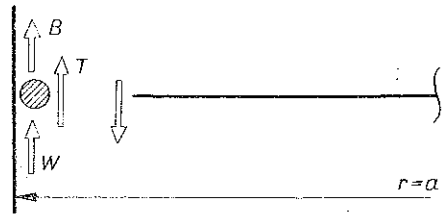
$$(1.17) \quad p = \gamma \left[\frac{\partial^2 \chi(r, \theta, 0; t)}{\partial t^2} + gw \right],$$

gdzie χ określone jest za pomocą wzoru (1.15).

Z kolei zajmiemy się sformułowaniem warunków brzegowych dla przypadku nieskończenie sztywnego pontonu (rys. 2).

Warunek utwierdzenia płyty w pontonie ma postać

$$(1.18) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=R_1} = 0.$$



Rys. 2. Równowaga pontonu

Drugi warunek brzegowy otrzymamy rozpatrując równowagę pontonu:

$$(1.19) \quad B + W + T = 0,$$

gdzie B jest siłą bezwładności pontonu, W wypadkową parcia cieczy na ponton oraz T reakcją płyty (siłą tnącą).

Równanie (1.19) w formie rozwiniętej ma postać

$$(1.20) \quad bp(R_0) \left[-D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]_{r=R_1} = 0,$$

gdzie μ oznacza masę jednostkową pontonu.

W dalszym ciągu założymy, że promienie R_1 , R_0 i R_2 niewiele różnią się od siebie, tzn. przyjmiemy, że

$$(1.21) \quad R_1 \approx R_0 \approx R_2 = a.$$

Wówczas warunki brzegowe (1.18) i (1.20) przybiorą postać

$$(1.22) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=a} = 0$$

oraz

$$(1.23) \quad \left[pb - D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]_{r=a} = 0.$$

Założenie (1.21) umożliwia otrzymanie analitycznego rozwiązania zagadnienia o stosunkowo prostej postaci. Przyjmując model pontonu należy mieć na uwadze fakt, że dynamika pontonu interesuje nas jedynie w stopniu umożliwiającym sformułowanie odpowiednich warunków brzegowych dla płyty. Rozważania na temat bardziej ścisłego sformułowania zagadnienia przedstawiono w pp. 2.4. Badane zagadnienie sprowadzone zostało do układu równań (1.1), (1.15), (1.16), (1.17), (1.22) i (1.23).

2. ZAGADNIENIE DRGAŃ WŁASNYCH

2.1. Przypadek pontonu sztywnego

Badamy drgania harmoniczne i stacjonarne, wobec czego założymy, że ugięcie płyty ma postać

$$(2.1) \quad w(r, \theta; t) = e^{i\omega t} v(r, \theta).$$

Podstawiając do równania (1.1) funkcje (1.17) i (2.1) oraz wykonując elementarne przekształcenia, otrzymujemy równanie drgań własnych układu płyta – ciecz w postaci

$$(2.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 v - \kappa^4 v = \frac{\gamma}{D} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} [\omega^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) - g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)] \cos m\theta J_m(k_{mn} r),$$

gdzie

$$\kappa^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Rozwiązania poszukiwać będziemy w formie liniowej kombinacji niezależnych rozwiązań równania jednorodnego (2.2) i całki szczególnej równania niejednorodnego. Rozwiązanie ogólne ma postać

$$(2.3) \quad v = \{C_1 J_m(\kappa r) + D_1 Y_m(\kappa r) + C_2 I_m(\kappa r) + D_2 K_m(\kappa r)\} \cos m\theta,$$

gdzie $J_m(\kappa r)$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu m , $Y_m(\kappa r)$ funkcję Bessela drugiego rodzaju rzędu m , $I_m(\kappa r)$ zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu m , $K_m(\kappa r)$ zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju rzędu m oraz C_i, D_i stałe. Ponieważ funkcje $Y_m(\kappa r)$ i $K_m(\kappa r)$ są nieokreślone w otoczeniu zera przyjmujemy $D_1 = D_2 = 0$. Tak więc rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$(2.4) \quad v = \cos m\theta \{C_1 J_m(\kappa r) + C_2 I_m(\kappa r)\}.$$

Pozostaje nam określenie całki szczególnej równania niejednorodnego (2.2). Znajdziemy ją dla n -tego wyrazu szeregu stojącego po prawej stronie i wówczas suma rozwiązań będzie poszukiwaną całką. Wprowadźmy nową zmienną

$$(2.5) \quad \xi = \kappa r.$$

Wówczas

$$\nabla^2 \equiv \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \equiv \kappa^2 \Delta \xi$$

i badane równanie przyjmie postać

$$(2.6) \quad (\Delta \xi \Delta \xi) v - v = \frac{\gamma}{D \kappa^4} B_{mn} [\omega^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) - g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)] \cos m\theta J_m \left(\frac{k_{mn}}{\kappa} \xi \right).$$

W tych rozważaniach wykluczmy przypadek $\kappa = k_{mn}$, który będzie przedyskutowany w pp. 2.2.

Rozwiązaniem szczególnym równania (2.6) jest funkcja

$$(2.7) \quad v_s = \frac{\gamma [\omega^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) - g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)]}{D(k_{mn}^4 - \kappa^4)} B_{mn} \cos m\theta J_m \left(\frac{k_{mn}}{\kappa} \xi \right).$$

Rozwiązanie równania (2.2) przedstawia się więc w formie

$$(2.8) \quad v = \cos m\theta \{ C_1 J_m(\kappa r) + C_2 I_m(\kappa r) \} + \\ + \frac{\gamma}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) - g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)}{k_{mn}^4 - \kappa^4} B_{mn} \cos m\theta J_m(k_{mn} r).$$

Przedstawimy zależność (2.8) w postaci bardziej przydatnej do dalszych rozwiązań, mianowicie rozwinieśmy funkcje Bessela argumentu κr w szeregi według układu funkcji Bessela argumentu $k_{mn} r$ [6].

Ponieważ w obszarze płyty funkcje $J_m(\kappa r)$ i $I_m(\kappa r)$ spełniają warunki Dirichleta, przeto można przedstawić je w postaci

$$(2.9) \quad J_m(\kappa r) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa k_{mn}^2 J'_m(\kappa a) J_m(k_{mn} r)}{(k_{mn}^2 - \kappa^2) \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(k_{mn} a)}$$

oraz

$$(2.10) \quad I_m(\kappa r) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa k_{mn}^2 I'_m(\kappa a) J_m(k_{mn} r)}{(k_{mn}^2 + \kappa^2) \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(k_{mn} a)}$$

Podstawiając (2.9) i (2.10) do (2.8) otrzymujemy

$$(2.11) \quad v = \cos m\theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\kappa k_{mn}^2 [C_1 (k_{mn}^2 + \kappa^2) J'_m(\kappa a) + C_2 (k_{mn}^2 - \kappa^2) I'_m(\kappa a)]}{(k_{mn}^4 - \kappa^4) \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) a J_m(k_{mn} a)} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{D} \frac{[\omega^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) - g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)]}{(k_{mn}^4 - \kappa^4)} B_{mn} \right\} J_m(k_{mn} r).$$

Ponieważ równanie (2.11) i warunek sprzężenia drgań (1.16) opisują tę samą wielkość fizyczną, przeto otrzymujemy równanie na określenie współczynników B_{mn} :

$$(2.12) \quad B_{mn} = \frac{2\kappa D k_{mn}^2 [C_1 (k_{mn}^2 + \kappa^2) J'_m(\kappa a) + C_2 (k_{mn}^2 - \kappa^2) I'_m(\kappa a)]}{\left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) a J_m(k_{mn} a) [D(k_{mn}^4 - \kappa^4) k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H) - \\ - \gamma \omega^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) + \gamma g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)]}$$

Podstawiając (2.12) do (2.11) lub (1.16) otrzymujemy wzór (2.8) w innej formie:

$$(2.13) \quad v = \cos m\theta \left\{ C_1 \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} J'_m(\kappa a) (k_{mn}^2 + \kappa^2) J_m(k_{mn} r) + \right. \\ \left. + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} I'_m(\kappa a) (k_{mn}^2 - \kappa^2) J_m(k_{mn} r) \right\},$$

gdzie

$$(2.14) \quad R_{mn} = \frac{2\kappa D k_{mn}^3 \operatorname{th}(k_{mn} H)}{\left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2}\right) a J_m(k_{mn} a) [D(k_{mn}^4 - \kappa^4) k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H) - \gamma \omega^2 + \gamma g k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H)]}$$

Wykorzystując warunek brzegowy (1.22) i równanie (2.8) otrzymujemy

$$(2.15) \quad C_1 \kappa J'_m(\kappa a) + C_2 \kappa I'_m(\kappa a) = 0.$$

Wykorzystanie warunku (1.23) i zależności (2.13) daje

$$(2.16) \quad C_1 \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} G_{mn} (k_{mn}^2 + \kappa^2) J'_m(\kappa a) J_m(k_{mn} a) + \\ + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} G_{mn} (k_{mn}^2 - \kappa^2) I'_m(\kappa a) J_m(k_{mn} a) = 0.$$

Równania (2.15) i (2.16) tworzą układ, z którego po przyrównaniu wyznacznika głównego do zera otrzymujemy równanie częstości:

$$(2.17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^3 R_{mn} G_{mn} I'_m(\kappa a) J'_m(\kappa a) J_m(k_{mn} a) = 0,$$

gdzie

$$(2.18) \quad G_{mn} = \gamma b g - \mu \omega^2 - \frac{\gamma b \omega^2}{k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H)}.$$

Dwa pierwsze pierwiastki równania (2.17) są następujące:

$$(2.19) \quad \kappa = 0, \quad \kappa = k_{mn}.$$

Przypadek $\kappa = 0$ oznacza, że płyta nie posiada masy, a przypadek $\kappa = k_{mn}$ jest sprzeczny z założeniem poczynionym przy wyznaczaniu rozwiązania szczególnego równania ruchu i będzie przedyskutowany w pp. 2.2. Dlatego obydwie pierwiastki (2.19) wyłączymy z dalszych rozważań.

Równanie częstości (2.17) po uproszczeniu przyjmie postać:

$$(2.20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{mn}^3 \operatorname{th}(k_{mn} H) \left[\gamma b g - \mu \omega^2 - \frac{\gamma b \omega^2}{k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H)} \right]}{\left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2}\right) [D(k_{mn}^2 - \kappa^4) k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H) - \gamma \omega^2 + \gamma g k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H)]} = 0.$$

Ścisłe rozwiązanie równania (2.20) nie jest praktycznie możliwe, gdyż mamy do czynienia z szeregiem nieskończonym, którego sumy nie potrafimy obliczyć. Jak wykazały obliczenia numeryczne, dobre przybliżenie otrzymać można uwzględniając tyle wyrazów szeregu, ile chcemy otrzymać najniższych częstości drgań własnych. Szereg (2.20) jest szeregiem szybkozbieżnym.

2.2. Interpretacja wyników

Interpretację wyników rozpoczniemy od przedyskutowania budowy równania ruchu

$$(2.21) \quad DV^2 \nabla^2 w + \rho h \ddot{w} = -\gamma \ddot{\chi} - \gamma g w.$$

Składniki lewej strony równania opisują ruch płyty, składniki prawej strony — ruch powierzchni cieczy. W przypadku, gdy przyjmemy $\gamma=0$ (brak cieczy), otrzymujemy równanie ruchu płyty sprężystej, drgającej swobodnie w próżni. Przy założeniu $D=\rho h=0$ (brak płyty) otrzymujemy równanie swobodnego falowania cieczy w potencjalnym polu sił ciężkości.

Jeżeli przyjmemy, że można pominąć wpływ sił bezwładności cieczy ($\gamma \ddot{\chi}=0$), wówczas równanie (2.21) staje się równaniem drgań własnych płyty spoczywającej na sprężystym podłożu typu Winklera, którego moduł podatności $k=\gamma g$ jest po prostu ciężarem właściwym cieczy, a wyraz $\gamma g w$ jest konsekwencją prawa Archimedes'a i przestawia wypór wody na jednostkę powierzchni płyty. W zagadnieniu sprzężonym siły bezwładności to siły pochodzące od masy płyty i masy cieczy towarzyszącej w drganiach:

$$(2.22) \quad B = \rho h \ddot{w} + \gamma \ddot{\chi}.$$

Dla drgań okresowych funkcja czasu występuje tu w postaci mnożnika, a istotny jest tylko rozkład sił bezwładności na powierzchni.

Siłami sprężystości są:

$$(2.23) \quad S = DV^2 \nabla^2 w + \gamma g w.$$

Układ sił (2.22) i (2.23) musi pozostawać w równowadze, co przedstawia równanie (2.21).

Zagadnienie drgań samej płyty posiada stosunkowo proste rozwiązanie; to samo dotyczy zadania o swobodnym falowaniu. Komplikacje powoduje dopiero sprzężenie drgań obu układów: ciekłego i sprężystego. Ze względu na to, że potencjał χ musi spełniać w obszarze cieczy równanie Laplace'a oraz odpowiednie warunki na brzegach i dnie zbiornika, prawa strona równania ruchu (2.21) musi mieć postać szeregu funkcji własnych swobodnego falowania. W odpowiednim szeregu nie znane są współczynniki rozwinięcia oraz częstości drgań własnych.

Równanie (2.21) można traktować jako równanie drgań płyty wymuszonych ciśnieniem cieczy, przy czym ciśnienie to oraz częstość możemy określić po uwzględnieniu dodatkowych warunków (sprężenia drgań i brzegowych). Całka ogólna (2.3) opisuje drgania samej płyty, całka szczególna (2.7) zaś uwzględnia «wymuszenie».

Z warunku sprzężenia drgań (1.16) określamy współczynniki B_{mn} jako funkcje stałych C_i . Żądając spełnienia warunków brzegowych otrzymujemy równanie częstości drgań własnych. Dla każdej częstości możemy wyznaczyć jedną ze stałych

C_i w zależności od drugiej i ostatecznie obliczyć B_{mn} z dokładnością do stałego mnożnika.

Rozwiążemy teraz zadanie pomocnicze, które będzie przydatne w dalszej dyskusji. Do równanie ruchu (2.21) podstawmy na miejsce w funkcję (1.16). Po wykonaniu odpowiednich operacji otrzymujemy

$$(2.24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[(k_{mn}^4 - \kappa^4) k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H) - \frac{\gamma}{D} [\omega^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) - g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)] \right] \times \\ \times B_{mn} \cos m \theta J_m(k_{mn} r) = 0.$$

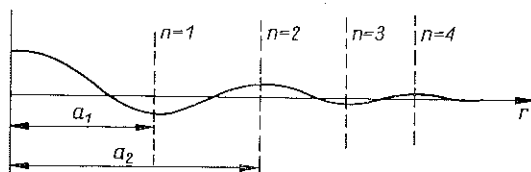
Załóżmy, że wszystkie oprócz jednego współczynniki B_{mn} równają się zeru. Różny od zera współczynnik oznaczmy przez B_{ij} . Wówczas, aby spełnione było równanie (2.24), wyrażenie w nawiasie musi być równe zeru. Otrzymujemy stąd

$$(2.25) \quad \omega^2 = \frac{Dk_{ij}^4 + \gamma g}{\rho h + \gamma \operatorname{cth}(k_{ij} H) / k_{ij}}.$$

Powyższy wynik oznacza, że wszystkie składowe drgań są równe zeru, oprócz jednej, oznaczonej indeksami ij . W liczniku wyrażenia (2.25) występują składniki charakteryzujące sprężystość układu płyta – ciecz. Wyrażenia w mianowniku oznaczają masę; ρh oznacza masę płyty na jednostkę powierzchni, drugi zaś składnik przedstawia masę towarzyszącą cieczy.

Wzór (2.25) otrzymano niezależnie od warunków brzegowych dla płyty. Interpretacja fizyczna wynika z charakteru funkcji Bessela i współczynników k_{ij} , które są pierwiastkami równania (1.12).

Brzeg obszaru, w którym spełniony jest wzór (2.25), powinien zapewnić spełnienie warunku (1.12). Przykładowo, dla zadania osiowo-symetrycznego warunkowi (1.12) odpowiadają proste naszkicowane liniami przerywanymi (rys. 3).



Rys. 3

Jeżeli założymy, że nie ma płyty ($D = \rho h = 0$), to ze wzoru (2.25) otrzymujemy częstość swobodnego falowania cieczy, określoną przez wzór (1.13).

Przy założeniu, że nie ma cieczy ($\gamma = 0$), otrzymujemy

$$(2.26) \quad \omega^2 = \frac{Dk_{ij}^4}{\rho h},$$

co jest równoznaczne z zależnością $\kappa^4 = k_{ij}^4$. Otrzymujemy więc interpretację jednego z pierwiastków (2.19) równania częstości (2.17). Przypadek ten oznacza, że płyta drga niezależnie od cieczy jedną z postaci przedstawionych na rys. 3. Innymi słowy, płyta drga niezależnie od cieczy. W przypadku dachu pływającego jest to możliwe, gdy pominiemy istnienie pontonu.

2.3. Dyskusja otrzymanych rozwiązań

Dalsze rozważania mają na celu analizę otrzymanych wyników pod kątem widzenia zastosowanego aparatu matematycznego.

Rozwiązanie zagadnienia przedstawiono w postaci kombinacji (2.8) całki ogólnej jednorodnego równania ruchu i całki szczególnej, odpowiadającej parciu cieczy. Następnie funkcje $J_m(\kappa r)$ oraz $I_m(\kappa r)$ rozwinięto w szeregi Fouriera-Bessela zbieżne w przedziale $\langle 0, a \rangle$. Również funkcja (2.13) jest przedstawiona w postaci szeregu zbieżnego (na mocy kryterium Weierstrassa). Ponieważ po zróżniczkowaniu funkcji (2.13) względem r nie otrzymujemy szeregu jednostajnie zbieżnego, przeto przy wykorzystaniu warunku brzegowego (1.22) różniczkowano funkcję ugięcia o postaci (2.8), którą można różniczkować czterokrotnie, otrzymując w wyniku szereg jednostajnie zbieżny.

Przedstawimy teraz rozwiązanie zagadnienia za pomocą transformacji całkowych. Dla ustalenia uwagi zbadamy zadanie osiowo-symetryczne. Równanie ruchu ma postać

$$(2.27) \quad \nabla^2 \nabla^2 v - \kappa^4 v = \frac{\gamma}{D} \sum_{n=1}^{\infty} B_n [\omega^2 \operatorname{ch}(k_n H) - g k_n \operatorname{sh}(k_n H)] J_0(k_n r).$$

Pomnóżmy równanie (2.27) obustronnie przez $r J_0(k_m r) dr$ i scałkujmy po promieniu zbiornika. Całkując przez części otrzymujemy

$$(2.28) \quad \int_0^a (\nabla^2 \nabla^2 v) r J_0(k_m r) dr = \left[a J_0(k_m a) \frac{d}{dr} \nabla^2 v - a k_m^2 J_0(k_m a) \frac{dv}{dr} \right]_{r=a} + k_m^4 f_J(k_m),$$

gdzie $f_J(k_m) = \int_0^a v r J_0(k_m r) dr$ jest skończoną transformatą Hankela.

Prawdziwy jest wzór

$$(2.29) \quad \int_0^a r J_0(k_n r) J_0(k_m r) dr = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \neq m, \\ \frac{a^2}{2} J_0^2(k_m a), & \text{gdy } n = m. \end{cases}$$

Po wykonaniu transformacji na równaniu (2.27) i uwzględnieniu wzorów (2.28) i (2.29) otrzymujemy

$$(2.30) \quad f_J(k_m) = \frac{\gamma a^2 B_m [\omega^2 \operatorname{ch}(k_m H) - g k_m \operatorname{sh}(k_m H)] J_0^2(k_m a) - \left[a J_0(k_m a) \frac{d}{dr} \nabla^2 v - a k_m^2 J_0(k_m a) \frac{dv}{dr} \right]_{r=a}}{2D(k_m^4 - \kappa^4)}$$

Wykonajmy z kolei skończoną transformację Hankela na warunku sprzężenia drgań:

$$(2.31) \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n \operatorname{sh}(k_n H) J_0(k_n r).$$

Po wykonaniu właściwych całkowań dostajemy

$$(2.32) \quad f_J(k_m) = \frac{1}{2} a^2 B_m k_m \operatorname{sh}(k_m H) J_0^2(k_m a).$$

Przyrównując do siebie prawe strony (2.30) i (2.32), otrzymujemy

$$(2.33) \quad B_m = \frac{\left[\frac{d}{dr} \nabla^2 v - k_m^2 \frac{dv}{dr} \right]_{r=a}}{a J_0(k_m a) [D(\kappa^4 - k_m^4) k_m \operatorname{sh}(k_m H) + \gamma \omega^2 \operatorname{ch}(k_m H) - \gamma g k_m \operatorname{sh}(k_m H)]}.$$

Podstawiając (2.33) do (2.31) otrzymujemy

$$(2.34) \quad v = -\frac{1}{2\kappa D} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \left\{ \left[\frac{d}{dr} \nabla^2 v \right]_{r=a} - \left[k_n^2 \frac{dv}{dr} \right]_{r=a} \right\} J_0(k_n r).$$

W przypadku, gdy kąt obrotu dla $r=a$ równy jest zeru (utwierdzenie płyty w płaszczyźnie zbiornika lub w pontonie nieskończenie sztywnym na obrót), wzór (2.34) upraszcza się do postaci

$$(2.35) \quad v = -\frac{1}{2\kappa D} \left[\frac{d}{dr} \nabla^2 v \right]_{r=a} \sum_{n=1}^{\infty} R_n J_0(k_n r),$$

gdzie wyrażenie $\left[\frac{d}{dr} \nabla^2 v \right]_{r=a}$ określa liczbę.

Łatwo sprawdzić, że wzór (2.34) jest identyczny ze wzorem (2.13), gdy przyjmujemy $m=0$:

$$(2.36) \quad v = -\sum_{n=1}^{\infty} R_n \{ [C_1 J_1(\kappa a) + C_2 I_1(\kappa a)] \kappa^2 - [-C_1 J_1(\kappa a) + C_2 I_1(\kappa a)] k_n^2 \} J_0(k_n r).$$

Pomiędzy stałymi zachodzą następujące związki:

$$(2.37) \quad \begin{aligned} [C_1 J_1(\kappa a) + C_2 I_1(\kappa a)] \kappa^2 &= \frac{1}{2\kappa D} \left[\frac{d}{dr} \nabla^2 v \right]_{r=a}, \\ [-C_1 J_1(\kappa a) + C_2 I_1(\kappa a)] &= \frac{1}{2\kappa D} \left[\frac{dv}{dr} \right]_{r=a}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że druga z zależności (2.37) jest identyczna z warunkiem na kąt obrotu (2.15), otrzymanym przez zróżniczkowanie funkcji (2.8). Równanie częstości własnych otrzymamy uwzględniając zależność (2.35) w warunku równowagi pontonu.

2.4. Sformułowanie zagadnienia przy uwzględnieniu szerokości pontonu

Przyjmijmy model dachu jako układ dwóch płyt: środkowej pełnej (oznaczonej nr 1), która jest membraną dachu, oraz zewnętrznej pierścieniowej (nr 2), która jest pontonem (rys. 4). Dla ustalenia uwagi badamy zadanie osiowo-symetryczne.

Potencjał przemieszczeń dla całego układu ma postać

$$(2.38) \quad \chi = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch} k_n (z-H) J_0(k_n r).$$

Równanie ruchu płyty nr 1 ma postać

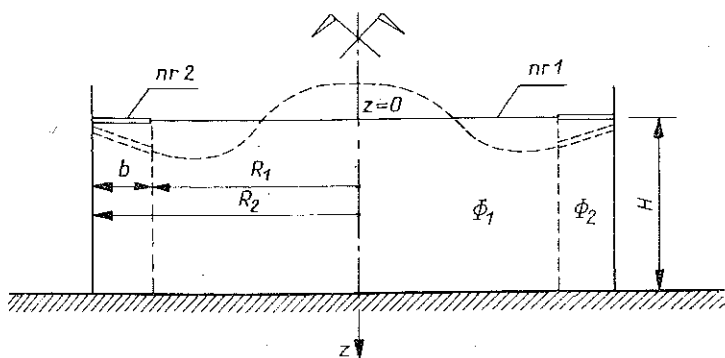
$$(2.39) \quad \nabla^2 \nabla^2 v_1 - \kappa_1^4 v_1 = \frac{\gamma}{D_1} \sum_{n=1}^{\infty} B_n [\omega^2 \operatorname{ch}(k_n H) - g k_n \operatorname{sh}(k_n H)] J_0(k_n r).$$

Równanie ruchu płyty zewnętrznej ma postać

$$(2.40) \quad \nabla^2 \nabla^2 v_2 - \kappa_2^4 v_2 = \frac{\gamma}{D_2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n [\omega^2 \operatorname{ch}(k_n H) - g k_n \operatorname{sh}(k_n H)] J_0(k_n r).$$

Powyżej przyjęto oznaczenia

$$\kappa_i^4 = \frac{\rho_i h_i \omega^2}{D_i}, \quad i=1, 2.$$



Rys. 4

Rozwiązaniem równania (2.39) jest funkcja

$$(2.41) \quad v_1 = C_1 J_0(\kappa_1 r) + C_2 I_0(\kappa_1 r) + \frac{\gamma}{D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \operatorname{ch}(k_n H) - g k_n \operatorname{sh}(k_n H)}{k_n^4 - \kappa_1^4} B_n J_0(k_n r),$$

a równania (2.40) funkcja

$$(2.42) \quad v_2 = F_1 J_0(\kappa_2 r) + F_2 Y_0(\kappa_2 r) + F_3 I_0(\kappa_2 r) + F_4 K_0(\kappa_2 r) + \frac{\gamma}{D_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \operatorname{ch}(k_n H) - g k_n \operatorname{sh}(k_n H)}{k_n^4 - \kappa_2^4} B_n J_0(k_n r).$$

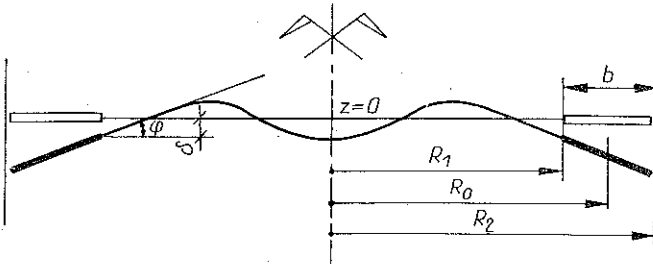
Przemieszczenia v_1 i v_2 w punkcie $r=R_1$ spełniają warunki:

$$(2.43) \quad v_1 = v_2, \quad \frac{\partial v_1}{\partial r} = \frac{\partial v_2}{\partial r}, \quad q_2 = -q_1, \quad m_2 = m_1,$$

gdzie q_i i m_i są odpowiednio siłą tnącą i momentem zginającym. Warunki (2.43) pozwalają na wyeliminowanie czterech stałych z równań (2.41) i (2.42). Po eliminacji pozostają dwie stałe, mamy więc dwuparametrową rodzinę krzywych opisaną w przedziałach $\langle 0, R_1 \rangle$ oraz $\langle R_1, R_2 \rangle$ różnymi zapisami analitycznymi, ale równania ciągłości gwarantują, że w punkcie granicznym zachowana jest ciągłość funkcji aż do trzeciej pochodnej. W tym momencie mamy sytuację podobną jak w przypadku pontonu punktowego. Tak więc do warunków (2.43) dołączymy jeszcze dwa równania, które zastępują warunki dla pontonu: dla $r=R_2$

$$(2.44) \quad q_2=0, \quad m_2=0.$$

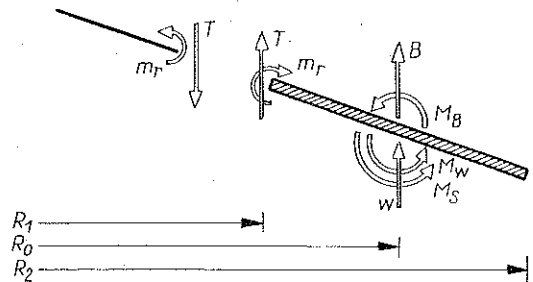
Dalszy tok postępowania jest podobny do podanego uprzednio z tym, że przy rozwijaniu funkcji w szeregi należy uwzględnić, że podane są one w przedziałach $\langle 0, R_1 \rangle$ i $\langle R_1, R_2 \rangle$ innym zapisem. Rozwiązanie zagadnienia jest zadaniem bardzo trudnym, dlatego też wydaje się bardziej właściwe sformułowanie problemu numerycznie. Tematu tego nie będziemy dalej rozwijali, a zajmiemy się nieco odmiennym sformułowaniem zagadnienia.



Rys. 5

Utrzymując w mocy założenia p. 1 można przyjąć, że ponton jest bardzo sztywny w stosunku do płyty i wówczas ugięcie płyty zewnętrznej może być przedstawione w postaci prostej (rys. 5). Jeżeli membrana i ponton stanowią monolit, wówczas na styku (dla $r=R_1$) istnieje wspólne przemieszczenie δ i wspólny kąt obrotu φ . Dlatego też, zamiast funkcji (2.42), możemy rozpatrywać funkcję

$$(2.45) \quad w_2 = e^{i\omega t} v_2 = e^{i\omega t} [\delta + (r - R_1) \varphi].$$



Rys. 6

Rozpatrzmy równowagę elementu płyty zewnętrznej. Układ wszystkich obciążeń możemy zredukować do środka ciężkości przekroju poprzecznego, określonego współrzędną R_0 (rys. 6). Z warunku równowagi sił pionowych otrzymujemy

$$(2.46) \quad T_1 + W + B = 0,$$

gdzie

$$(2.47) \quad T_1 = T \frac{2\pi R_1}{2\pi R_0}, \quad W = \int_{R_1}^{R_2} p \frac{2\pi r}{2\pi R_0} dr, \quad B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu}{b} \ddot{w}_2 \frac{2\pi r}{2\pi R_0} dr.$$

Warunek równowagi momentów ma postać

$$(2.48) \quad M_B + M_W + M_S - T_1 \frac{b}{2} - m_r^* = 0,$$

gdzie

$$(2.49) \quad M_B = I_0 \left[\frac{\partial^3 w_2}{\partial r \partial t^2} \right]_{r=R_0} = -\omega^2 I_0 \varphi,$$

$$M_W = \int_{R_1}^{R_2} p \frac{2\pi r}{2\pi R_0} (r - R_0) dr,$$

$$M_S = \frac{EI_x}{R_0^2} \varphi, \quad m_r^* = \frac{2\pi R_1}{2\pi R_0} m_r.$$

Podstawmy do trzeciego wzoru (2.47) wyrażenie (2.46). Uwzględniając fakt, że δ i φ są liczbami, otrzymujemy

$$(2.50) \quad B = -\frac{\mu\omega^2}{bR_0} \int_{R_1}^{R_2} [\delta + \varphi(r - R_1)] r dr = -\mu\omega^2 \left[\delta + \varphi \frac{b}{2} \left(1 + \frac{b}{6R_0} \right) \right].$$

Przy założeniu, że ponton jest punktowy, ze wzoru (2.50) otrzymujemy wzór na siłę bezwładności wyprowadzony w p. 1.

Podobną procedurę postępowania zastosować możemy do wyliczenia całki określonej drugim ze wzorów (2.47). W tym celu rozwińmy ciśnienie p w szereg Taylora w otoczeniu punktu $r = R_0$:

$$p = p(R_0) + \left[\frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r=R_0} (r - R_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right]_{r=R_0} (r - R_0)^2 + \dots$$

Uwzględniając pierwsze dwa wyrazy szeregu dostajemy

$$(2.51) \quad W = p(R_0) b + \left[\frac{\partial p}{\partial r} \right]_{R_0} \frac{b^3}{12R_0}.$$

Podobnie obliczamy

$$(2.52) \quad M_W = \frac{b^3}{12} \left[\frac{\partial p}{\partial r} \right]_{R_0} + \frac{b^3}{12R_0} p(R_0).$$

Uwzględnienie dwóch wyrazów szeregu odpowiada przyjęciu liniowego rozkładu ciśnienia cieczy. Wzory (2.46) – (2.49) są ściśle z matematycznego punktu widzenia. Przyjęcie modelu, w którym ponton może przemieszczać się jedynie jak ciało sztywne w płaszczyznach r, z jest uproszczeniem w stosunku do sformułowania

zagadnienia opisanego równaniami (2.41) – (2.44). Rozwiązanie obu przypadków jest zadaniem trudnym i może nie spełnić swojego zadania — to jest nie umożliwi przeprowadzenia możliwie przejrzystej dyskusji, jak to miało miejsce w przypadku pontonu punktowego. Dlatego też wydaje się bardziej właściwe sformułowanie zagadnienia numerycznie.

3. DRGANIA WYMUSZONE

Równaniem ruchu układu dla przypadku drgań wymuszonych jest równanie (1.1), gdzie q jest jawną funkcją czasu. Ciśnienie p zależy od potencjału przemieszczeń χ , który realizuje sprzężenie drgań płyty i cieczy przez warunek na powierzchni.

W punkcie niniejszym zajmiemy się drganiami wymuszonymi stacjonarnymi. Można więc założyć, iż drgania własne zanikną i układ będzie drgać według prawa

$$(3.1) \quad w = e^{i\vartheta t} v(r, \theta),$$

gdzie ϑ jest częstością kołową wymuszenia. Założymy ponadto, że obciążenie wymuszające można przedstawić w postaci szeregu

$$(3.2) \quad q = e^{i\vartheta t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos m\theta J_m(k_{mn}r),$$

gdzie współczynniki A_{mn} są znane.

W analogicznej postaci poszukiwać będziemy potencjału przemieszczeń:

$$(3.3) \quad \chi = e^{i\vartheta t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{ch} k_{mn}(z-H) \cos m\theta J_m(k_{mn}r).$$

W rozważaniach przeprowadzonych w p. 2 poszukiwaliśmy funkcji χ w postaci sumy częściowej nieskończonego szeregu, począwszy od wyrazu oznaczonego indeksem $n=1$ i dla ustalonego m . W rzeczywistości rozwiązaniem równania Bessela

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] y = 0$$

jest dla przypadku $k=0$ funkcja

$$(3.4) \quad y = r^m,$$

jednakże potencjał prędkości cieczy o postaci

$$\Phi = e^{i\vartheta t} r^m \cos m\theta$$

nie spełnia warunku brzegowego zadania: $[\partial\Phi/\partial r]_{r=a} = 0$. Jeżeli przejmujemy potencjał przemieszczeń w postaci szeregu, który sumujemy od wyrazu oznaczonego indeksem $n=0$, to pierwszy wyraz $e^{i\vartheta t} B_0$ daje ciśnienie o wielkości

$$(3.5) \quad p = -\gamma \vartheta^2 B_0 e^{i\vartheta t},$$

które jest stałe na całej powierzchni cieczy i ze względu na jej nieściśliwość nie posiada żadnego wpływu na pracę dynamiczną dachu. Z tego powodu szeregi

sumujemy od wyrazu z indeksem $n=1$. Rozwiązanie równania (1.1) po uwzględnieniu wzorów (3.1), (3.2) i (3.3) ma postać

$$(3.6) \quad v_m = \cos m\theta \{C_1 J_m(\lambda r) + C_2 I_m(\lambda r)\} + \\ + \frac{\gamma}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) - g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)}{k_{mn}^4 - \lambda^4} B_{mn} \cos m\theta J_m(k_{mn} r) + \\ + \frac{1}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{k_{mn}^4 - \lambda^4} \cos m\theta J_m(k_{mn} r), \quad \lambda^4 = \frac{\rho h \vartheta^2}{D}.$$

Po wykorzystaniu wzorów (2.9) i (2.10) otrzymujemy funkcję ugięcia w formie następującej:

$$(3.7) \quad v_m = \cos m\theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_1 \frac{2}{a} \frac{\lambda k_{mn}^2 J'_m(\lambda a)}{(k_{mn}^2 - \lambda^2) \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(k_{mn} a)} + \right. \\ \left. + C_2 \frac{2}{a} \frac{\lambda k_{mn}^2 I'_m(\lambda a)}{(k_{mn}^2 + \lambda^2) \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(k_{mn} a)} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma [\vartheta^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) - g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)] B_{mn} + A_{mn}}{D(k_{mn}^4 - \lambda^4)} \right\} J_m(k_{mn} r).$$

Z warunku sprzężenia drgań i wzoru (3.7) wyznaczamy współczynniki szeregu

$$(3.8) \quad B_{mn} = \frac{2\lambda D k_{mn}^2 [C_1 (k_{mn}^2 + \lambda^2) J'_m(\lambda a) + C_2 (k_{mn}^2 - \lambda^2) I'_m(\lambda a)] + \\ + a \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(k_{mn} a) A_{mn}}{a \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(k_{mn} a) [D(k_{mn}^4 - \lambda^4) k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H) - \\ - \gamma \vartheta^2 \operatorname{ch}(k_{mn} H) + \gamma g k_{mn} \operatorname{sh}(k_{mn} H)]}$$

Podstawiając (3.8) do warunku sprzężenia drgań dostajemy

$$(3.9) \quad v_m = \cos m\theta \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \left\{ C_1 (k_{mn}^2 + \lambda^2) J'_m(\lambda a) + C_2 (k_{mn}^2 - \lambda^2) I'_m(\lambda a) + \right. \\ \left. + a \frac{\left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(k_{mn} a) A_{mn}}{2\lambda D k_{mn}^2} \right\} J_m(k_{mn} r),$$

gdzie

$$(3.10) \quad R_{mn} = \frac{2\lambda D k_{mn}^3 \operatorname{th}(k_{mn} H)}{a \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) J_m(k_{mn} a) [D(k_{mn}^4 - \lambda^4) k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H) - \gamma \vartheta^2 + \\ + \gamma g k_{mn} \operatorname{th}(k_{mn} H)]}$$

Warunek utwierdzenia płyty w pontonie przybiera postać

$$(3.11) \quad C_1 \lambda J'_m(\lambda a) + C_2 \lambda I'_m(\lambda a) = 0,$$

a warunek równowagi pontonu — postać

$$(3.12) \quad C_1 \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} G_{mn} (k_{n,n}^2 + \lambda^2) J'_m(\lambda a) J_m(k_{mn} a) + \\ + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} G_{mn} (k_{mn}^2 - \lambda^2) I'_m(\lambda a) J_m(k_{mn} a) = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) R_{mn} G_{mn} A_{mn} J_m^2(k_{mn} a)}{2\lambda D k_{mn}^2}.$$

Wyznacznik główny układu równań (3.11) i (2.12) ma postać

$$Wg = -2\lambda^3 J'_m(\lambda a) I'_m(\lambda a) \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} G_{mn} J_m(k_{mn} a),$$

z której, po przyrównaniu do zera, otrzymać można równanie częstości własnych (2.17).

Po wyznaczeniu z warunków brzegowych stałych całkowania C_i amplitudy drgań przedstawimy w postaci:

$$(3.13) \quad w = -e^{i\theta t} \frac{a}{2\lambda D} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) R_{mn} G_{mn} A_{mn} k_{mn}^{-2} J_m^2(k_{mn} a)}{\sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} G_{mn} J_m(k_{mn} a)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} J_m(k_{mn} r) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(k_{mn}^2 - \frac{m^2}{a^2} \right) A_{mn} J_m(k_{mn} a)}{k_{mn}^2} J_m(k_{mn} r) \right\}.$$

4. OBLICZENIA DYNAMICZNE TYPOWEGO DACHU PŁYWAJĄCEGO

Obliczenia numeryczne wykonano dla typowego dachu pływającego przy założeniu pontonu punktowego nieskończenie sztywnego «na obrót». Na podstawie dokumentacji projektowej przyjęto następujące dane:

$$a = 26 \text{ m}, \quad H = 16 \text{ m}, \quad b = 3 \text{ m}, \quad h = 0,005 \text{ m}, \quad \rho = 7,8 \text{ t/m}^3,$$

$$E = 2,1 \times 10^7 \text{ T/m}^2, \quad \nu = 0,3, \quad \gamma = 1 \text{ t/m}^3, \quad D = 3,066 \frac{\text{tm}^2}{\text{s}^2}, \quad \mu = 0,05 \text{ t/m}.$$

4.1. Drgania własne

Przy obliczaniu częstości drgań własnych dachu pływającego skorzystamy ze wzoru (2.20), uwzględniając skończoną liczbę wyrazów szeregu. W tabelicy 1 przedstawiono podstawowe częstości własne obliczone odpowiednio z uwzględnieniem jednego, dwóch i trzech wyrazów szeregu. W czwartym wierszu tabelicy przedstawiono częstości własne obliczone sposobem przybliżonym (n -tą częstość otrzymano przyrównując do zera n -ty wyraz szeregu).

Tabela 1. Częstości drgań własnych dachu pływającego

	$m=0$			$m=1$			$m=2$		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_2	ω_1	ω_2	ω_3
1 wyraz szeregu	1,1902			0,752			1,04792		
2 wyrazy szeregu	1,189	1,622		0,752	1,413		1,04734	1,585	
3 wyrazy szeregu	1,1891	1,6211	1,9518	0,752	1,412	1,7877	1,04714	1,5848	1,932
I przybliżenie	1,1902	1,623	1,9529	0,752	1,4144	1,7897	1,04792	1,5872	1,933

Tabela 2. Częstości własne dla płyty utwardzonej w zbiorniku

$m=0$	$\omega_1=1,3091 \text{ s}^{-1}$	$\omega_2=1,7755 \text{ s}^{-1}$
$m=1$	$\omega_1=0,9059 \text{ s}^{-1}$	$\omega_2=1,5772 \text{ s}^{-1}$
$m=2$	$\omega_1=1,1983 \text{ s}^{-1}$	$\omega_2=1,7464 \text{ s}^{-1}$

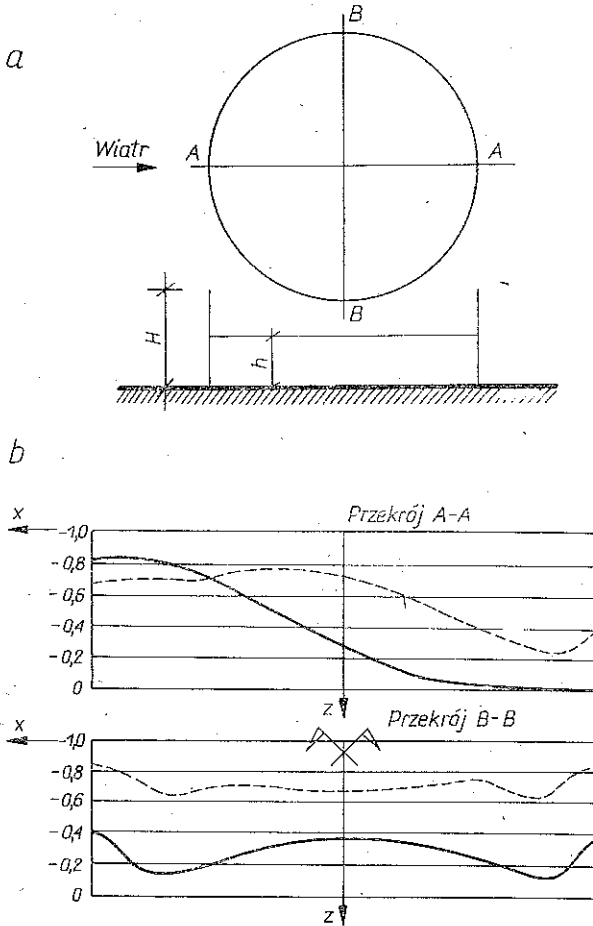
Przedstawione wyniki wskazują na dobrą zbieżność uzyskanych rozwiązań. Dla porównania przytacza się podstawowe częstości własne obliczone dla płyty utwardzonej w korpusie zbiornika.

4.2. Drgania wymuszone ssaniem wiatru

Ze względu na dużą powierzchnię (rzędu kilku tysięcy m^2) dach pływający narażony jest na dynamiczne oddziaływanie wiatru, które przejawia się w postaci pulsującego ssania, mogącego doprowadzić nawet do zniszczenia konstrukcji. Przypadki takie stwierdzono np. we Francji. Występowanie ssania potwierdzone zostało również przez badania modelowe [7].

Działanie wiatru jest procesem losowym i bardzo trudnym do analitycznego ujęcia. Występują jednakże pewne cechy, które mogą dosyć wiernie przedstawić charakter obciążenia wiatrem. Są nimi: charakterystyczne częstości pulsowania wiatru, prędkość wiatru (i związana z nią wielkość ciśnienia) oraz kształt rozkładu ciśnień na konstrukcji. Ponieważ dokładna analiza obciążenia wiatrem dachów pływających wymaga przeprowadzenia dużej ilości badań, w pracy skupiono uwagę na zasadniczych, wyżej wymienionych cechach. Zakłada się, że znane są charakterystyczne częstości pulsowania wiatru oraz jego prędkość (wielkości te są systematycznie mierzone przez placówki meteorologiczne). Zagadnienie rozkładu ciśnień na konstrukcji było przedmiotem badań modelowych [7].

Program badań obejmował określenie wielkości oraz rozkładu parcia i ssania wiatru na modelach zbiorników wyposażonych w ruchomy dach. Badania przeprowadzono w tunelu aerodynamicznym dla różnych wysokości usytuowania dachu. W wyniku otrzymano wykresy współczynników opływu dla płaszcza zbiornika oraz dachu pływającego. Przykładowy rozkład ssania wiatru na powierzchni dachu pływającego przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Wykresy współczynników opływu dachu pływającego wiatrem [7]

$h/H=0,94$ (linia ciągła), $h/H=0,37$ (linia przerywana)

W celu dokonania analizy drgań wymuszonych ssaniem wiatru, konieczne staje się znalezienie funkcji określającej obciążenie. Dysponujemy wynikami badań modelowych, które na dwóch wzajemnie prostopadłych średnicach dane są w postaci ciągłych wykresów. Ciągły charakter wykresów sugeruje, że obciążenie przedstawić można w postaci ciągłych funkcji.

Ze względu na symetrię obciążenia względem jednej ze średnic dachu przedstawimy je w postaci szeregu

$$(4.1) \quad p(r, \theta) = a_0(r) + a_1(r) \cos \theta + a_2(r) \cos 2\theta,$$

przy czym spełnione powinny być następujące warunki:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} p(r, 0) &= a_0(r) + a_1(r) + a_2(r) = p(r, 2\pi), \\ p(r, \pi/2) &= a_0(r) - a_2(r) = p(r, 3\pi/2), \\ p(r, \pi) &= a_0(r) - a_1(r) + a_2(r). \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (4.2) względem współczynników $a_i(r)$ otrzymujemy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a_0(r) &= \frac{1}{4} p(r, 0) + \frac{1}{2} p\left(r, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} p(r, \pi), \\ a_1(r) &= \frac{1}{2} p(r, 0) - \frac{1}{2} p(r, \pi), \\ a_2(r) &= \frac{1}{4} p(r, 0) - \frac{1}{2} p\left(r, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} p(r, \pi). \end{aligned}$$

Równania (4.3) oznaczają, że żądamy, aby funkcja (4.1) była zgodna z wynikami eksperymentu na dwóch wzajemnie prostopadłych średnicach dachu. Funkcje (4.3) spełniają w obszarze zbiornika warunki Dirichleta, wobec czego można przedstawić je w postaci szeregów Fouriera-Bessela, co uczynimy następująco: a_0 rozwińniemy w szereg wg układu funkcji $J_0(k_{0n}r)$, a_1 wg $J_1(k_{1n}r)$, a_2 wg $J_2(k_{2n}r)$. Powyższa procedura doprowadzi wzór (4.1) do postaci

$$(4.4) \quad p(r, \theta) = \sum_{n=1}^k A_{0n} J_0(k_{0n}r) + \cos \theta \sum_{n=1}^k A_{1n} J_1(k_{1n}r) + \cos 2\theta \sum_{n=1}^k A_{2n} J_2(k_{2n}r),$$

gdzie ilość wyrazów szeregu k dobieramy w zależności od zgodności funkcji (4.4) z wynikami doświadczenia.

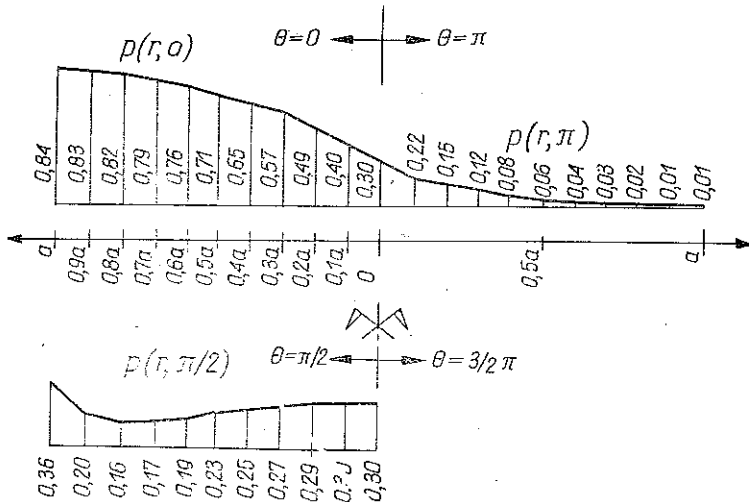
Współczynników A_{mn} poszukamy na drodze numerycznej, dzieląc promień zbiornika na pewną liczbę odcinków i obliczając skończone transformaty Hankela:

$$(4.5) \quad f_J(k_{mn}) = \int_0^a r a_{mn}(r) J_m(k_{mn}r) dr$$

za pomocą całkowania metodą trapezów.

Jako przykład rozpatrzmy rozkład ssania wiatru na powierzchni dachu dla $h/H=0,94$ [7]. Jest to przypadek najbardziej niekorzystny ze względu na drgania wymuszone, gdyż w miarę zmniejszania się stosunku h/H rozkład ssania zbliża się do równomiernego, a poprzednio wykazano, że równomiernie rozłożone obciążenie jest całkowicie przejmowane przez ciecz. Promień zbiornika podzielono na

10 odcinków o długości $0,1 a$. Na rys. 8 przedstawiono rzędne wykresów w charakterystycznych punktach. Na podstawie wzorów (4.3) obliczono współczynniki $a_i(r)$ dla każdego z punktów podziału; wyniki przedstawiono w tablicy 3. Wynika z niej, że wyraz a_0 można traktować jako obciążenie równomiernie rozłożone.



Rys. 8

będące «bierną» częścią wykresu ssania. Wyrazami «aktywnymi» są a_1 i a_2 . Rozwijając je w szeregi otrzymujemy następujący wzór na obciążenie dachu wiatrem (dla $a=26$ m):

$$(4.6) \quad p(r, \theta) = \cos \theta \sum_{n=1}^4 A_{1n} J_1(k_{1n} r) + \cos 2\theta \sum_{n=1}^4 A_{2n} J_2(k_{2n} r),$$

gdzie

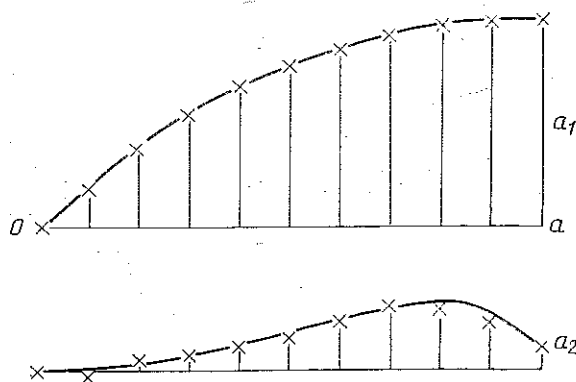
$$\begin{aligned} A_{11} &= 0,66, & A_{12} &= 0,0476, & A_{13} &= 0,0136, & A_{14} &= -0,0019, \\ A_{21} &= 0,22865, & A_{22} &= 0,06964, & A_{23} &= -0,05805, & A_{24} &= 0,05633. \end{aligned}$$

Przy uwzględnieniu czterech wyrazów szeregu uzyskano wystarczającą zgodność z eksperymentem (rys. 9).

Tablica 3

r	0	0,1a	0,2a	0,3a	0,4a	0,5a	0,6a	0,7a	0,8a	0,9a	a
$p(0)$	0,30	0,40	0,49	0,57	0,65	0,71	0,76	0,79	0,82	0,83	0,84
$p(\pi/2)$	0,30	0,30	0,29	0,27	0,25	0,23	0,19	0,17	0,16	0,20	0,36
$p(\pi)$	0,30	0,22	0,15	0,12	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01
a_0	0,30	0,305	0,305	0,3075	0,3075	0,3075	0,295	0,29	0,29	0,31	0,3925
a_1	0	0,09	0,17	0,225	0,285	0,325	0,36	0,38	0,40	0,41	0,415
a_2	0	0,005	0,015	0,0375	0,0575	0,0775	0,105	0,120	0,130	0,110	0,0325

W celu obliczenia amplitud ugięć i sił wewnętrznych płyty dachu wymuszonych ssaniem wiatru ułożono program na EMC ODRA-1204. Na rys. 10 przykładowo przedstawiono amplitudy ugięć obliczone dla maksymalnego normowego ciśnienia wiatru $p=0,075 \text{ T/m}^2$ i dwóch częstości pulsowania wiatru $\varrho=0,5 \text{ s}^{-1}$ i $\varrho=5 \text{ s}^{-1}$.



Rys. 9. Wykresy współczynników a_1 i a_2 (rzędne w tablicy 3). Linia ciągła oznacza dane doświadczalne, krzyżyki otrzymano na podstawie (4.6)

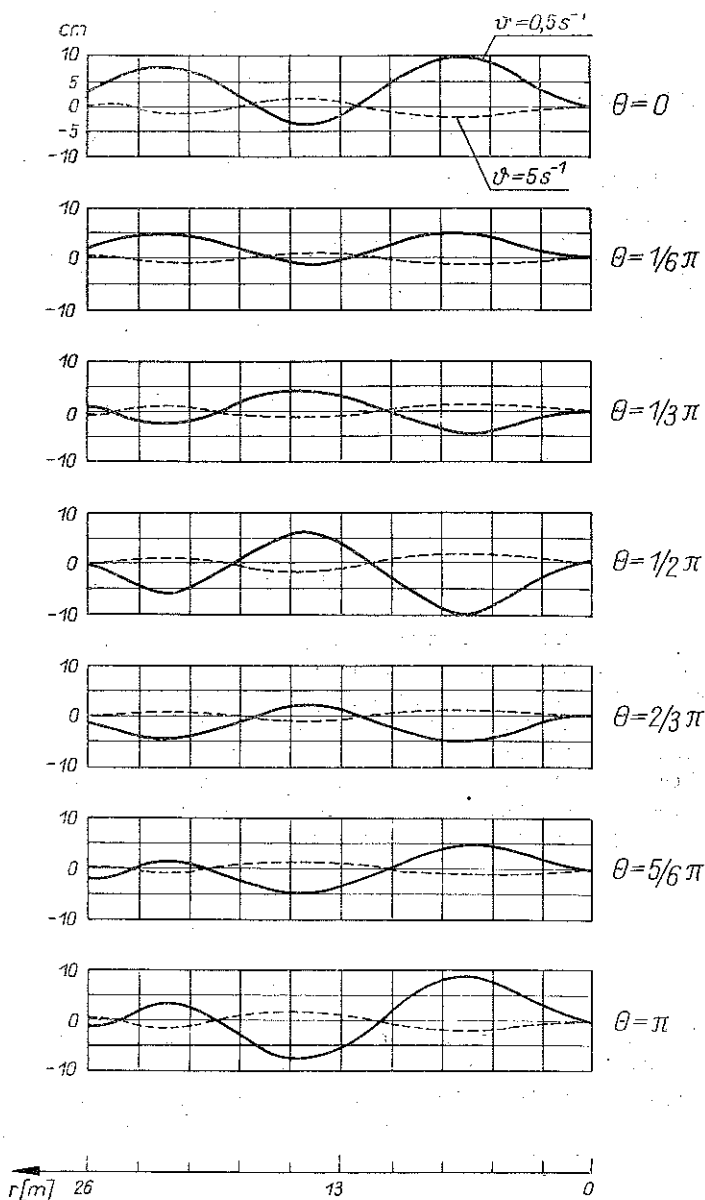
5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono teorię dachów pływających utworzoną na gruncie hydro-sprężystości — w ramach liniowej teorii sprężystości i liniowej teorii falowania cieczy idealnej. Rozwiązanie uzyskano przy wykorzystaniu funkcji własnych swobodnego falowania cieczy w zbiorniku.

Przedstawiony sposób postępowania można zastosować do szerszej klasy zagadnień hydrosprężystości. Rozwiązanie zagadnienia otrzymano w postaci zbieżnych szeregów, a przykłady numeryczne wskazują, że szeregi te są szybkozbieżne. Tak więc obciążenie wymuszające jest już dobrze aproksymowane szeregiem złożonym z czterech wyrazów, a przy rozwiązywaniu równania częstości można ograniczyć się do kilku pierwszych wyrazów szeregu. Tego typu oszacowanie zbieżności wydaje się być wystarczające przy rozwiązywaniu problemu inżynierskiego. Obliczone przykładowo amplitudy drgań wymuszonych są rzędu kilku centymetrów, stąd wniosek, że przedstawioną teorię należałoby uściślić, uwzględniając geometryczną nieliniowość.

Częstości drgań własnych typowego dachu pływającego znajdują się w strefie częstości rozwijania się porywów wiatru, co może spowodować powstanie rezonansu. Fakt ten przemawia na korzyść hipotezy przedstawionej w pp. 4.2, mianowicie, stwierdzone pęknięcia przekryć mogły zostać spowodowane działaniem wiatru. Wynika stąd wniosek, że aby zabezpieczyć konstrukcję przed szkodliwym wpływem pulsowania wiatru, można pójść w dwóch kierunkach:

a) zbudowanie konstrukcji bardziej sztywnej, o wyższych częstościach własnych; postulatowi temu odpowiada wstępnie sprężona powłoka;



Rys. 10. Amplitudy drgań wymuszonych

b) wykonanie konstrukcji o bardzo niskich częstościach własnych, przy jednoczesnym skonstruowaniu urządzeń tłumiących drgania. Konstrukcją taką może być dach dwupowłokowy z otworami w dolnej powłoce.

Obciążenie wiatrem posiada charakter losowy, a przyjęty model deterministyczny jest jedynie przybliżeniem. Dlatego też wskazuje się na celowość prowadzenia badań nad stworzeniem stochastycznego modelu obciążenia dachu pływającego wiatrem, a następnie nad uzyskaniem dla tego modelu rozwiązań rezonansowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Л. В. Докучаев, *О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана*, Строительная механика и расчет сооружений, 1/1972.
2. Н. Е. Кочин, Ц. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1948.
3. G. C. MITCHELL, *Analysis and stability of floating roofs*, Proc. ASCE, EM5, October/73.
4. A. SAWICKI, *Analiza drgań własnych uproszczonego modelu dachu pływającego*, Księga Zjazdowa XIX Konf. Nauk. KI PAN, Krynica 1973.
5. A. SAWICKI, *Osiowo-symetryczne drgania swobodne dachu pływającego*, Zeszyty Naukowe P.G. Bud. Łąd. XXV, nr 204/73.
6. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw Hill, 1951.
7. J. ZIÓŁKO, *Obciążenie wiatrem zbiorników z dachami pływającymi w świetle badań modelowych*, Księga Zjazdowa XVIII Konf. Nauk. KI PAN, Krynica 1972.

Резюме

ДИНАМИКА ПЛАВАЮЩИХ КРЫШ

В работе представляется теория плавающих крыш, построенная на основе гидроупругости. Рассматривается классическая модель гидроупругости: стационарные колебания системы плавающая крыша — жидкость, которая занимает внутренность цилиндрического танка. Теория построена на основе линейной теории упругости и линейной теории колебаний идеальной жидкости, происходящих под влиянием сил тяжести. В работе рассмотрены гармонические свободные колебания и колебания вынужденные действием ветра. В примере вычислены частоты свободных колебаний типической крыши и представлены амплитуды колебаний вынужденных гармоническими взрывами ветра.

SUMMARY

THEORY OF FLOATING ROOFS

The paper deals with the theory of floating roofs in cylindrical tanks. The classical model of hydroelasticity and steady vibrations of the system: floating roof-ideal liquid are investigated. The theory is based on linear theory of elasticity and linear theory of water waves. The harmonic free vibrations and vibrations forced by wind load are analysed. A numerical example of the dynamical analysis of typical floating roof is presented.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 sierpnia 1974 r.