

## ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ZAGADNIENIACH HYDRODYNAMICZNEGO SMAROWANIA POPZECZNYCH ŁOŻYSK ŚLIZGOWYCH

KAROL KRZEMIŃSKI i TOMASZ MARKS (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono algorytm rozwiązania zagadnienia brzegowego dla równania Reynoldsa, opisującego ruch cieczy smarnej w łożysku ślizgowym. Wykorzystano metodę elementów skończonych. Podano opis budowy programu obliczeniowego w języku FORTRAN IV. Program umożliwia obliczenie rozkładu ciśnień, nośności łożyska, kąta działania obciążenia oraz współczynnika tarcia dla dowolnego kształtu poprzecznego łożyska ślizgowego, pracującego w warunkach tarcia płynnego.

### WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$R$	promień wewnętrzny panwi,
$R_{cz}$	promień czopa,
$L$	długość łożyska,
$U$	prędkość obwodowa czopa,
$W$	obciążenie łożyska,
$M_t$	moment oporów ruchu w łożysku,
$c = R - R_{cz}$	luz promieniowy,
$h$	wysokość szczeliny smarnej,
$p$	ciśnienie,
$\varepsilon = \frac{e}{c}$	mimośrodowość względna,
$\eta$	lepkość dynamiczna oleju,
$\theta$	kąt w kierunku obwodowym łożyska,
$\nabla$	operator gradientu,
$\nabla \cdot$	operator divergencji.

### 1. WPROWADZENIE

Ustalony, izotermiczny przepływ cieczy w łożysku ślizgowym można opisać zagadnieniem brzegowym dla równania Reynoldsa. Rozwiązania analityczne tego zagadnienia uzyskano tylko dla pewnych przypadków szczególnych, otrzymanych przez wprowadzenie założeń upraszczających dotyczących parametrów geometrycznych łożyska i warunków brzegowych.

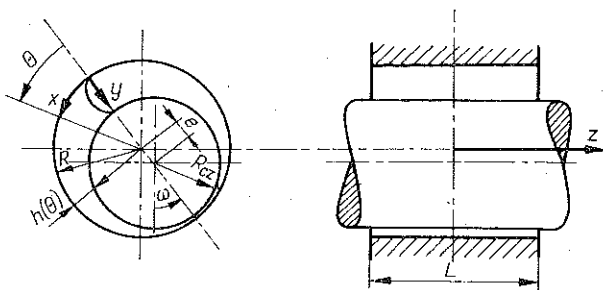
W opracowanym przez autorów programie obliczeniowym istnieje możliwość wprowadzenia dowolnych warunków brzegowych dla klina smarnego, dowolnych kształtów szczeliny smarnej, jak i dowolnego położenia osi czopa w łożysku, a po niewielkich modyfikacjach można również uwzględnić w obliczeniach siły masowe.

Program napisano w języku FORTRAN IV, przez co nadaje się do eksploatacji na wszystkich maszynach cyfrowych wyposażonych w translator tego języka.

Należy zauważyć, że choć program ten zastosowano do analizy zagadnienia hydrodynamicznego smarowania łożysk ślizgowych, to równie dobrze może być on wykorzystany do rozwiązywania innych problemów, których opis matematyczny ma analogiczną postać. Może więc być wygodnym narzędziem przy rozwiązywaniu wielu problemów technicznych.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Ruch cieczy w konwencjonalnym łożysku ślizgowym z litą panwią, w przypadku ustalonego izotermicznego przepływu newtonowskiej cieczy nieściśliwej o stałej



Rys. 1

lepkości, można opisać równaniem Reynoldsa. Dla łożyska o skończonej długości równanie to, napisane we współrzędnych walcowych (rys. 1), ma postać

$$(2.1) \quad \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U \frac{\partial h}{R \partial \theta}.$$

Zwykle przyjmuje się, że na powierzchniach czołowych ciśnienie (dokładniej, nadciśnienie w stosunku do ciśnienia atmosferycznego) jest zerowe. Prowadzi to do warunku brzegowego

$$(2.2) \quad p \left( \theta, \pm \frac{L}{2} \right) = 0.$$

W przypadku, gdy oś czopa jest równoległa do osi tulei, gradient ciśnienia w kierunku osiowym liczony w połowie długości panwi jest równy zero, tzn.

$$(2.3) \quad \frac{\partial p}{\partial z} (\theta, 0) = 0.$$

W tym szczególnym przypadku można rozpatrywać problem na obszarze zredukowanym do połowy długości łożyska.

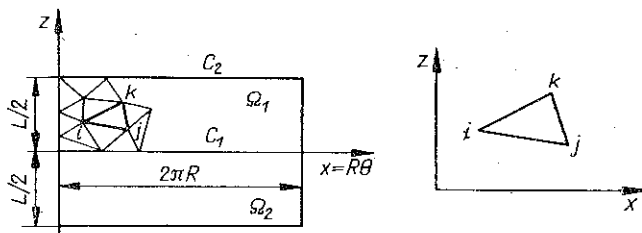
Rozpiętość klina smarnego można określać z warunków Sommerfelda,

$$(2.4) \quad p(0, z) = p(\pi, z) = 0,$$

bądź z warunków Reynoldsa

$$(2.5) \quad p(\theta_0, z) = p(\theta_k, z) = 0, \quad \left[ \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_k} = 0.$$

Ponieważ zmiany ciśnienia w kierunku wysokości szczeliny smarnej są pomijalne, rozpatrywany problem sprowadza się do zagadnienia płaskiego. Zatem analizę można przeprowadzić w układzie  $x, z$ , rozwijając do płaszczyzny wewnętrzną powierzchnię panwi łożyskowej (rys. 2).



Rys. 2

Po dokonaniu odpowiedniej zamiany zmiennych otrzymujemy równanie Reynoldsa w układzie  $x, z$ :

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Należy zwrócić uwagę, że dla boków pionowych rozpatrywanego prostokąta, stanowiących początek i koniec rozwinięcia powierzchni wewnętrznej panwi, powinien być spełniony warunek «sklejenia»:

$$(2.7) \quad p(\theta, z) = p(2\pi R, z).$$

Weźmy pod uwagę obszar  $\Omega = \Omega_1$  (rys. 2) z brzegiem  $C = C_1, C_2$ , gdzie  $C_1$  jest bokiem prostokąta leżącym na osi  $x$ , zaś  $C_2$  oznacza pozostałą część brzegu. Rozpatrzmy zagadnienie brzegowe dla równania (2.6) na obszarze  $\Omega$  z jednorodnymi warunkami brzegowymi na  $C_2$  oraz z warunkiem (2.3) na  $C_1$ . Dalszą analizę przeprowadzimy korzystając z równoważnego sformułowania wariacyjnego. Prowadzi to do poszukiwania funkcji, która realizuje minimum następującego funkcjonału:

$$(2.8) \quad X(p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int \left[ -\frac{h^3}{12\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{h^3}{12\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + hU \frac{\partial p}{\partial x} \right] d\Omega.$$

Funkcji minimalizującej funkcjonał (2.8) poszukujemy w zbiorze funkcji mających ciągle pierwsze pochodne i spełniających warunki brzegowe określone na  $C_2$ . Warunkiem koniecznym istnienia minimum jego zerowanie się pierwszej wariacji

funkcjonału. Korzystając z definicji wariacji oraz z twierdzeniem Greena [5], można napisać

$$(2.9) \quad \delta x = \int_{\Omega} \int \left[ \nabla \cdot \left( \frac{h^3}{12\eta} \nabla p \right) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (hU) \right] \delta p d\Omega + \int_{\lambda} \left[ \left( \frac{h^3}{12\eta} \nabla p - \frac{hU}{2} \right) n \right] \delta p dc,$$

gdzie  $n$  jest wektorem normalnym skierowanym na zewnątrz powierzchni  $\Omega$ .

Aby równanie (2.9) było spełnione dla dowolnej wariacji  $\delta p$  znikającej na  $C_2$ , oba wyrażenia podcałkowe muszą znikać tożsamościowo. Jest to równoważne spełnianiu przez funkcję minimalizującą równania (2.6) w obszarze  $\Omega$  oraz warunków brzegowych na  $C_1$  i  $C_2$ . Jak łatwo stwierdzić w pierwszej całce funkcja podcałkowa przedstawia równanie Reynoldsa i dla  $p(x, z)$  spełniającego to równanie całka ta jest zerem. Całka brzegowa po brzegu  $C_2$  zeruje się automatycznie, wówczas bowiem

$\delta p = 0$ . Natomiast na  $C_1$  zeruje się funkcja podcałkowa  $\left( \frac{h^3}{12\eta} \nabla p - \frac{hU}{2} \right) n = 0$ , ponieważ ze względu na warunek brzegowy (2.3) przepływ normalny do brzegu  $C_1$  jest zerem

Łatwo sprawdzić, że

$$(2.10) \quad \delta^2 x = \frac{h^3}{12\eta} \geq 0,$$

wobec nieujemności funkcji  $h$  i parametru  $\eta$ . Zatem poszukiwane ekstremum funkcyjonału  $x$  jest minimum absolutnym i oba zagadnienia są równoważne.

### 3. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Rozpatrzmy obszar filmu smarowego (wewnętrzna powierzchnia panwi łożyskowej) podzielony na skończoną liczbę podobszarów, tzw. elementów skończonych. W omawianym programie przyjęto podział na elementy trójkątne. Poszukiwana funkcja  $p$ , w tym przypadku rozkład ciśnień, jest aproksymowana przez pewną funkcję  $\bar{p}$ , która wewnątrz każdego elementu może mieć inną postać analityczną. Przebieg zmienności funkcji  $\bar{p}$  opisuje się za pomocą tzw. funkcji kształtu w ten sposób, że postać analityczna funkcji  $\bar{p}$  w danym elemencie jest jednoznacznie określona przez wartość funkcji w wybranych punktach węzłowych (tu w wierzchołkach trójkąta  $i, j, k$  na rys. 2).

Zakładając, że wewnątrz elementu zmienność ciśnienia ma w przybliżeniu charakter liniowy, można napisać

$$(3.1) \quad \bar{p} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 z.$$

Oznaczając przez  $p_i, p_j, p_k$  przybliżone wartości ciśnienia odpowiednio w węzłach  $i, j, k$  otrzymujemy

$$(3.2) \quad p_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 z_m, \quad m = i, j, k.$$

Rozwiązanie układu (3.2) ze względu na  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  i wstawienie obliczonych wartości do (3.1) daje

$$(3.3) \quad \bar{p} = \frac{1}{\Delta} [(a_i + b_i x + c_i z) p_i + (a_j + b_j x + c_j z) p_j + (a_k + b_k x + c_k z) p_k] = [\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k] P^e,$$

gdzie użyto następujących oznaczeń:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix},$$

$$a_i = x_j z_k - x_k z_j,$$

$$b_i = z_j - z_k,$$

$$c_i = x_k - x_j,$$

$$\varphi_m = \varphi_m(x, z) = a_m + b_m x + c_m z, \quad m = i, j, k,$$

$$P^e = [p_i, p_j, p_k]^T.$$

Wartość wyznacznika  $\Delta$  można interpretować jako podwójne pole trójkąta o wierzchołkach  $i, j, k$ . Pozostałe wartości  $a_i, b_i, c_i, \dots$ , otrzymuje się przez cykliczną zamianę indeksów, ja to ilustruje rysunek



Podobnie otrzymuje się wyrażenie określające zmienność wysokości szczyliny smarnej w obszarze rozpatrywanego elementu:

$$(3.4) \quad \bar{h} = [\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k] H^e.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(3.5) \quad P = [p_1, p_2, \dots, p_N]^T,$$

gdzie  $N$  jest liczbą węzłów w rozpatrywanym zagadnieniu. Zastępując  $p$  i  $h$  odpowiednio przez  $\bar{p}$  i  $\bar{h}$  oraz korzystając z addytywności całki (2.8) otrzymujemy

$$(3.6) \quad X(\bar{p}) = X(P) = \sum_{e=1}^M X^e(P^e),$$

gdzie  $M$  jest liczbą elementów oraz

$$(3.7) \quad X^e(P^e) = \frac{1}{2} \iint_{S^e} \left[ -\frac{\bar{h}^3}{12\eta} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\bar{h}^3}{12\eta} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right)^2 + \bar{h} U \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right] dx dz.$$

Symbol  $S^e$  oznacza obszar zajmowany przez element  $e$ .

Warunki stacjonarności funkcjonału prowadzą do układu równań

$$(3.8) \quad \frac{\partial X(\bar{p})}{\partial p_i} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Oczywiste są związki

$$(3.9) \quad \frac{\partial X(\bar{p})}{\partial p_i} = \sum \frac{\partial x^e}{\partial p_i},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie elementy zawierające  $i$ -ty wierzchołek oraz gdzie

$$\frac{\partial X^e}{\partial p_i} = \int_{S^e} \int \left[ -\frac{\hbar^3}{12\eta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) - \frac{\hbar^3}{12\eta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) + \frac{\hbar U}{2} \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \right] dx dz.$$

Biorąc pod uwagę postać funkcji  $\bar{p}$  na elemencie  $e$  otrzymujemy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{1}{A} [b_i, b_j, b_k] P^e, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \frac{1}{A} [c_i, c_j, c_k] P^e, \\ \frac{\partial}{\partial p_m} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) &= \frac{b_m}{A} \quad \text{dla } m=i, j, k. \end{aligned}$$

Wstawiając (3.10) do (3.9) otrzymujemy

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial X^e}{\partial p_m} &= -\frac{1}{12\eta A^2} [b_m, c_m] \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} P^e \int_{S^e} \int \hbar^3 dx dz + \\ &+ \frac{U b_m}{2A} \int_{S^e} \int \hbar dx dz \quad \text{dla } m=i, j, k, \end{aligned}$$

lub w zwartej postaci

$$(3.12) \quad \frac{\partial X^e}{\partial p^e} = K^e P^e + F^e,$$

gdzie

$$K^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} \end{bmatrix}, \quad F^e = [F_i, F_j, F_k]^T.$$

Niech  $A^e = \{i, j, k\}$  będzie zbiorem numerów węzłów elementu  $e$ . Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} \bar{K}^e &= [\bar{k}_{n,m}],_{n,m=1,N}, \\ \bar{F}^e &= [\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n]^T, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{k}_{n,m} &= \begin{cases} k_{n,m}, & \text{gdy } n, m \in A^e, \\ 0, & \text{gdy } n, m \notin A^e; \end{cases} \\ \bar{F}_n &= \begin{cases} F_n, & \text{gdy } n \in A^e, \\ 0, & \text{gdy } n \notin A^e. \end{cases} \end{aligned}$$

Warunki stacjonarności funkcjonału można teraz napisać w postaci

$$(3.13) \quad \frac{\partial X}{\partial p} = KP + F = 0,$$

gdzie

$$K = \sum_{c=1}^M \bar{K}^e, \quad F = \sum_{c=1}^M \bar{F}^e.$$

Rozpatrywane zadanie sprowadza się zatem od rozwiązywania układu równań liniowych (3.14) z niewiadomymi wartościami  $p_i$ .

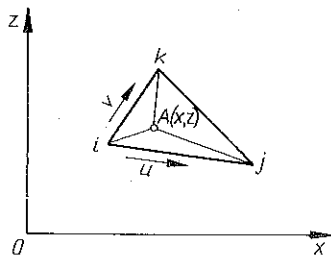
#### 4. LOKALNY UKŁAD WSPÓLRZĘDNYCH DLA ELEMENTU TRÓJKĄTNEGO. OBLICZANIE CAŁEK

W celu zbudowania macierzy  $K$  niezbędne jest obliczanie całek typu:

$$\iint_{S^e} h dx dz, \quad \iint_{S^e} h^3 dx dz,$$

gdzie  $S^e$  jest obszarem trójkątnym na płaszczyźnie  $x, z$ . Można tu zastosować metody całkowania numerycznego, jednak wymaganie odpowiedniego rzędu dokładności rzutuje w niekorzystny sposób na czas obliczeń.

Dlatego tam gdzie jest to możliwe i uzasadnione dążymy do wyznaczenia potrzebnych wartości przy użyciu wzorów analitycznych. W omawianym przypadku, ze względu na postać funkcji kształtu, wzory analityczne wyrażone we współrzędnych kartezjańskich  $x, z$  są dość skomplikowane. Istotne uproszczenie uzyskujemy wprowadzając lokalny układ współrzędnych  $u, v$  skierowany wzdłuż boków trójkąta (rys. 3).



Rys. 3

Zauważmy, że współrzędne kartezjańskie dowolnego punktu  $A(x, z)$  leżącego wewnątrz trójkąta można napisać w następującej postaci:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x &= x_i + (x_j - x_i)u + (x_k - x_i)v, \\ z &= z_i + (z_j - z_i)u + (z_k - z_i)v. \end{aligned}$$

Wyliczając z (4.1)  $u$  i  $v$  otrzymuje się

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{\Delta} (a_j + b_j x + c_j z), \\ v &= \frac{1}{\Delta} (a_k + b_k x + c_k z), \end{aligned}$$

gdzie wielkości  $\Delta, a_j, a_k, b_k, \dots$  są takie same jak we wzorze (3.3).

Uwzględniając powyższe można napisać

$$u = \varphi_j(x, z), \quad v = \varphi_k(x, z).$$

Ponadto można sprawdzić, że

$$\varphi_i(x, z) = 1 - (u + v).$$

Przejście z układu lokalnego (trójkątnego) od kartezjańskiego  $x, z$  można przedstawić w postaci

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \end{pmatrix},$$

gdzie  $[J]$  jest tzw. macierzą Jacobiego:

$$(4.3) \quad [J] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_j - x_i & z_j - z_i \\ x_k - x_i & z_k - z_i \end{vmatrix} = \Delta.$$

Dla elementu powierzchni mamy

$$dx dz = \det [J] du dv = \Delta.$$

Dokonując zamiany zmiennych otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \iint_{S^c} h dx dz &= \Delta \int_0^1 \int_0^{1-\varphi_j} (\varphi_i h_i + \varphi_j h_j + \varphi_k h_k) du dv = \frac{\Delta}{6} (h_i + h_j + h_k), \\ \iint h^3 dx dz &= \Delta \int_0^1 \int_0^{1-\varphi_j} (\varphi_i h_i + \varphi_j h_j + \varphi_k h_k)^3 du dv = \frac{\Delta}{5} (h_i^3 + h_i^2 h_j + h_i^2 h_k + h_j^3 + \\ &+ h_j^2 h_i + h_j^2 h_k + h_k^3 + h_k^2 h_i + h_k^2 h_j + h_i h_j h_k) = \frac{\Delta}{5} \left( \sum_{i=1}^3 h_i \sum_{j=1}^3 h_j^2 + \prod_{i=1}^2 h_i \right). \end{aligned}$$

Wartości funkcji  $h$  w punktach węzłowych trójkąta oblicza się wg przyjętej funkcji  $h = h(\varepsilon, \theta, c, z)$  danej *explicite*. Dla kołowych powierzchni czopa i panwi oraz przy równoległym położeniu ich osi, wysokość szczeliny smarnej można określić ze wzoru

$$h = c(1 + \varepsilon \cos \theta).$$

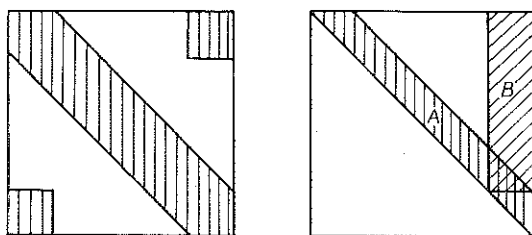
Współrzędne lokalne nazywa się często współzrędnymi powierzchniowymi, ponieważ wartości poszczególnych  $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$  dla dowolnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta mogą być wyrażone przez stosunki pól powierzchni figur powstałych z połączenia punktu  $A$  z wierzchołkami trójkąta do pola powierzchni całego trójkąta



## 5. BUDOWA MACIERZY PRZEPŁYWU I ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ

Numeracja węzłów ma istotny wpływ na postać macierzy przepływu, a co za tym idzie na objętość pamięci maszyny cyfrowej wymaganą przez program obliczeniowy. Z punktu widzenia czasu realizacji programu, optymalny jest przypadek, gdy całą macierz układu można pomieścić w pamięci operacyjnej. Jak wiadomo, korzystanie z pamięci zewnętrznej w poważnym stopniu wydłuża czas pracy.

Budowę macierzy przepływu  $K$  przeprowadza się w dwóch etapach. Najpierw buduje się ją dla pełnej numeracji węzłów. Otrzymana macierz jest pasmowa. Ponieważ film smarny rozpatrywano rozwijając powierzchnię wewnętrzną panwi do płaszczyzny  $x, z$ , więc węzły o współrzędnej  $\theta=0$  i  $\theta=2\pi$  otrzymały różną numerację. Węzły te trzeba utożsamić. Dokonujemy tego w drugim etapie dodając odpowiednie wyrazy z wierszy macierzy dopowiadających węzłom o współrzędnej  $x=2\pi R$  do wyrazów z wierszy odnoszących się do węzłów o współrzędnej  $x=0$ . Operacja ta zmniejsza rozmiary macierzy, lecz poza pasmem pojawiają się dodatkowe niezerowe wyrazy (rys. 4). Ponadto należy zauważyć, że utożsamienie węzłów odpo-

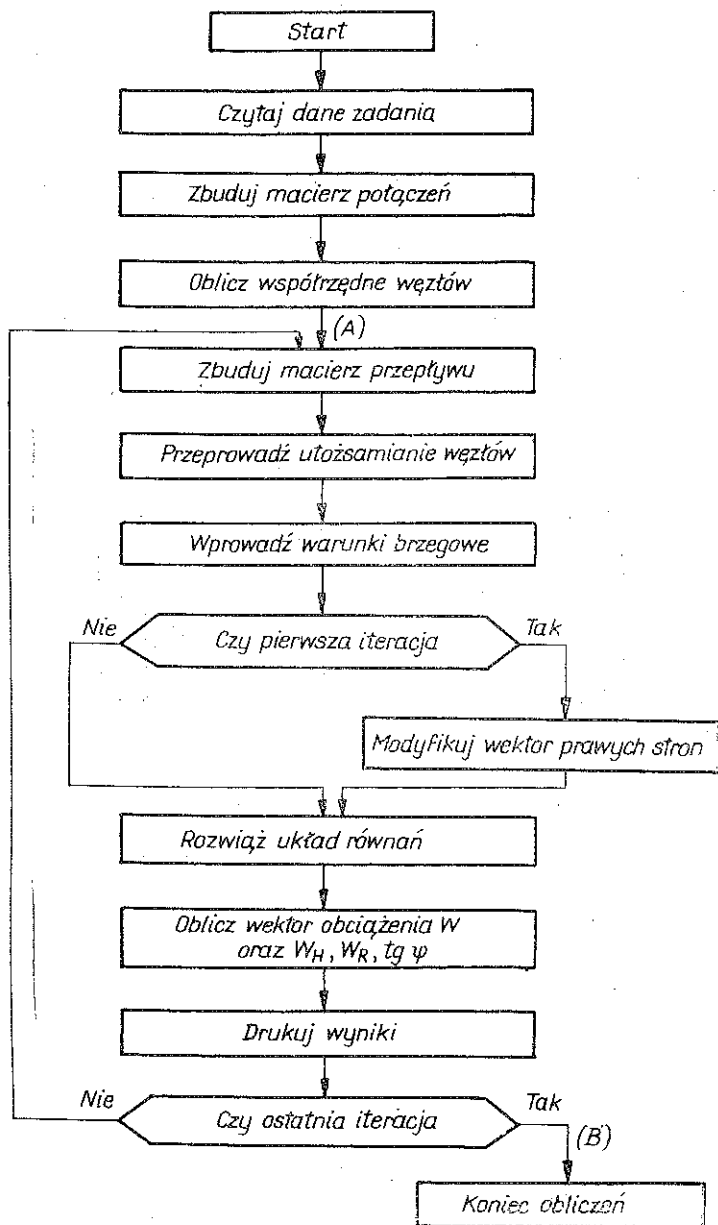


Rys. 4

wiada wprowadzeniu warunków brzegowych (2.4). Uwzględnienie warunków brzegowych (2.2) polega na odpowiedniej modyfikacji macierzy układu i wektora prawych stron. W omawianym przypadku ze względu na jednorodność tych warunków, jest to zabieg szczególnie prosty. Dla danego węzła brzegowego trzeba wyzerować odpowiedni wiersz i kolumnę macierzy, a na głównej przekątnej postawić jedynkę; ponadto należy wprowadzić zero na odpowiednią pozycję wektora prawych stron. Pozostałe warunki brzegowe, jak już wspomniano, są automatycznie spełnione przez funkcję minimalizującą funkcjonal  $X(p)$ .

Do rozwiązania układu równań użyto w programie metody eliminacji Gaussa. Zastosowany algorytm wykorzystuje pewne szczególne cechy macierzy przepływu. Ponieważ elementy głównej przekątnej mają tu wartości kilkakrotnie wyższe niż leżące poza nią, więc odpada potrzeba poszukiwania elementów głównych.

Ze względu na symetrię oraz prawie pasmową budowę macierzy, do zapamiętania niezbędnych wartości i przeprowadzenia obliczeń wystarcza użycie dwóch tablic będących odpowiednikami obszarów  $A$  i  $B$  zaznaczonych na rys. 4. Schemat logiczny programu przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5

## 6. NOŚNOŚĆ ŁOŻYSKA ORAZ POŁOŻENIE WYPADKOWEJ SIŁY HYDRODYNAMICZNEGO WYPORU

Po obliczeniu ciśnień w punktach węzłowych można obliczyć nośność hydrodynamicznego klina smarnego, co jest równoważne z obliczeniem nośności łożyska przy założeniu, że nie występuje bezpośredni kontakt między panwią a czopem.

Dla elementu leżącego na płaszczyźnie  $\Omega$  można łatwo obliczyć zarówno wartość jak i położenie wypadkowej siły hydrodynamicznego wyporu działającej na jego powierzchnię, wykorzystując współrzędne powierzchniowe (rys. 6):

$$(6.1) \quad R^e = \int \int_{s^e} \bar{p} \, dx \, dz = \frac{\Delta}{6} (p_i + p_j + p_k) = \frac{\Delta}{2} p_r.$$

Współrzędną  $x^e$  punktu przyłożenia wypadkowej siły  $R^e$  określić ze wzoru

$$(6.2) \quad X^e = \frac{\int \int_{s^e} x \bar{p} \, dx \, dz}{\int \int_{s^e} \bar{p} \, dx \, dz} = \frac{(2x_i + x_j + x_k)p_i + (x_i + 2x_j + x_k)p_j + (x_i + x_j + 2x_k)p_k}{4(p_i + p_j + p_k)} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i (1 + \delta_{ij}) P^e}{4 \sum_{i=1}^3 p_i},$$

gdzie

$$\delta_{ij} = 1, \quad \text{gdy } j=i \quad \text{oraz} \quad \delta_{ij} = 0, \quad \text{gdy } j \neq i.$$

Podobnie można obliczyć współrzędną  $z^e$ :

$$(6.3) \quad z^e = \frac{\sum_{i=1}^3 z_i (1 + \delta_{ij}) P^e}{4 \sum_{i=1}^3 p_i}.$$

Ze wzoru (6.3) korzysta się tylko w przypadku, gdy oś czopa nie jest równoległa do osi panwi. Kiedy obie osie są równoległe wówczas poszukuje się tylko kąta położenia wypadkowej siły wyporu hydrodynamicznego, gdyż w kierunku osi  $z$  będzie ona położona w połowie długości łożyska.

Kąt działania wypadkowej siły wyporu hydrodynamicznego dla pojedynczego elementu wynosi

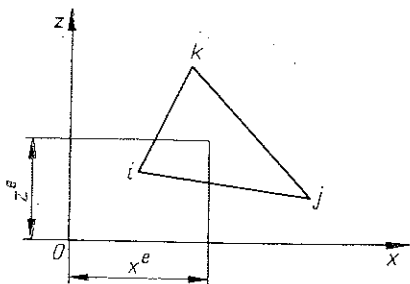
$$(6.4) \quad \theta^e = \frac{x^e}{R}.$$

Dokonując sumowania sił działających na poszczególne elementy można obliczyć całkowitą siłę hydrodynamicznego wyporu i kąt jej działania. Siła ta równoważy obciążenie przyłożone do czopa.

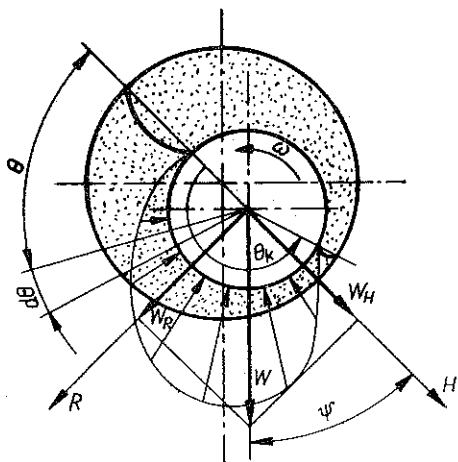
Przyjmując układ odniesienia jak na rys. 7 oraz pomijając siły tarcia jako bardzo małe, składowe wektora obciążenia zewnętrznego można obliczyć ze wzorów

$$(6.5) \quad W = - \int_{-L/2}^{-L/2} \int_0^{\theta_K} p \cos \theta R d\theta dz = - \sum_1^M \frac{\Delta}{2} p_{sr} \cos \theta^e,$$

$$W_R = \int_{-L/2}^{-L/2} \int_0^{\theta_K} p \sin \theta R d\theta dz = \sum_1^M \frac{\Delta}{2} p_{sr} \sin \theta^e.$$



Rys. 6



Rys. 7

Nośność łożyska można określić ze wzoru

$$(6.7) \quad W = \sqrt{W_H^2 + W_R^2},$$

a kąt działania obciążenia ze wzoru

$$(6.8) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{W_R}{W_H}.$$

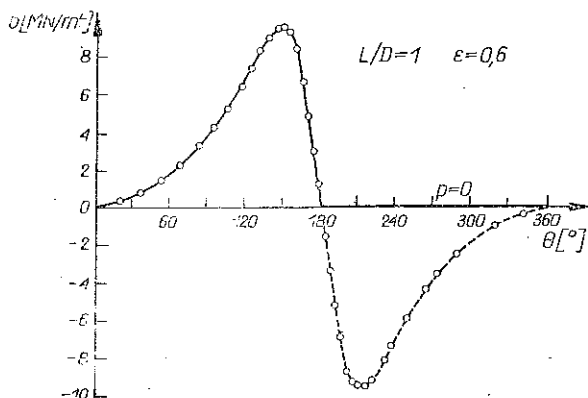
Mając obliczone powyższe wielkości, pozorny współczynnik tarcia w łożysku można określić bezpośrednio ze wzoru

$$(6.9) \quad \mu = \frac{c\varepsilon}{2R} \sin \psi + \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \frac{\eta URL}{Wc}.$$

## 7. PODSUMOWANIE

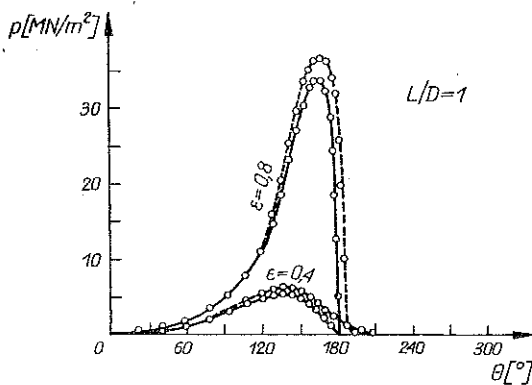
W wyniku rozwiązania układu równań minimalizujących funkcjonal  $X(\bar{p})$  otrzymuje się rozkład ciśnień pokazany na rys. 7. Przyjmując dla określenia rozpiętości klina smarnego warunki Sommerfelda, pomija się strefę występowania ujemnych ciśnień jako sprzeczną z zasadą ciągłości przepływu cieczy, przyjmując w tej strefie

stałą wartość ciśnienia  $p=0$ . Wprowadzenie do rozwiązania warunków granicznych Reynoldsa uzyskuje się na drodze iteracyjnej. Mając rozkład ciśnień uzyskany z rozwiązania bezpośredniego można przeprowadzić dalsze rozwiązania wprowadzając kolejno w miejsce ujemnych ciśnień — ciśnienie  $p=0$ . Ponowne rozwiązania tak otrzymanych układów równań przeprowadza się aż do momentu, kiedy w wyniku nie wystąpią ciśnienia ujemne.



Rys. 8

Po przeprowadzonych iteracjach zmienia się rozkład ciśnień i rozpiętość klina smarnego, którego początek znajduje się w miejscu maksymalnego luzu (zależnie od miejsca i ilości doprowadzonego oleju), a koniec przesuwa się w kierunku miejsca, dla którego  $p=0$  i  $\partial p/\partial \theta=0$ . Rozkłady ciśnień otrzymane przy przyjęciu dla klina smarnego warunków Sommerfelda oraz Reynoldsa pokazano na rys. 9.



Rys. 9

Dokładność obliczeń sprawdzona na wybranych testach wynosiła  $\pm 0.5\%$ .

Należy tu wspomnieć o możliwości zastosowania wyżej opisanej metody w przypadku łożysk kieszeniowych zasilanych z zewnątrz. Zagadnienie to jest dokładniej analizowane np. w pracy [1]; tutaj ograniczymy się jedynie do zasygnalizowania

problemu. Realizacja obliczeń wymaga w tym przypadku niezbyt skomplikowanej przeróbki podstawowego programu przedstawionego schemtycznie na rys. 5. Sprowadza się ona w zasadzie do zamknięcia fragmentu programu zawartego na schemacie pomiędzy punktami *A* i *B* w dodatkowej pętli oraz modyfikacji procedury wprowadzania warunków brzegowych. Zakłada się tutaj pewne początkowe ciśnienia w kieszeniach, które dla pierwszej iteracji musi podać użytkownik, jako dane wejściowe programu. W następnych iteracjach wartości te są określane na podstawie obliczeń z iteracji poprzednich. Procedurę tę powtarza się aż do otrzymania wymaganego rzędu dokładności.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. ALLAN, *The application of finite element analysis to hydrodynamic and externally pressurised pocket bearings*, Wear, **19**, 2, 1972.
2. T. ALLAN, *The effect of deformation on the behaviour of hydrodynamic journal bearings*, Tribology, **8**, 1971.
3. A. CAMERON, *Basic lubrication theory*, Longman, London 1971.
4. V. CASTELLI, W. SHAPIRO, *Improved method of numerical solution of general incompressible fluid film lubrication problem*, J. Lubrication Technol., **4**, 1967.
5. I. GELFAND, W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1972.
6. D. F. HAYS, *A variational approach to lubrication problems of the finite journal bearings*, ASME, Semi-Annual Meeting Paper, Detroit, Michigan 1958.
7. K. KRZEMIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych w hydrodynamicznej teorii smarowania łożysk porowatych*, Ref. II Konf. Metody Komp. w Mech. Konstrukcji, Gdańsk 1975.
8. K. KRZEMIŃSKI, *Nośność łożysk porowatych w warunkach hydrodynamicznego smarowania*, Praca doktorska, Warszawa 1974.
9. M. M. REDDI, *Finite element solution of the incompressible lubrication problem*, J. Lubrication Technol., **6**, 1969.
10. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

#### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕОРИИ СМАЗКИ РАДИАЛЬНЫХ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

В работе представлено решение уравнения Рейнольдса для радиальных подшипников при использовании метода конечных элементов. Приведено описание программы аналитического решения проблемы в языке Fortran IV. Программа дает возможность исследования распределения давления, несущей способности, угла нагрузки и коэффициента трения для произвольной геометрии радиального подшипника.

## SUMMARY

APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD TO DETERMINATION  
OF PRESSURE DISTRIBUTION IN SELF-ACTING JOURNAL BEARINGS

This paper presents an algorithm for solving a boundary-value problem for Reynolds' equation applied to a hydrodynamic bearing. The finite element method is used and brief description of a computer program in FORTRAN IV is given. The program makes possible to compute a pressure distribution, bearing capacity, bearing load angle, and coefficient of friction for self-acting journal bearings with various geometric and physical properties.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 maja 1976 r.*