

## STATECZNOŚĆ DŹWIGARÓW KRATOWYCH PODDANYCH DZIAŁANIU SIŁ SKIEROWANYCH DO BIEGUNA (\*)

JAN MISIAK (WARSZAWA)

Przedmiotem pracy jest zagadnienie stateczności dźwigarów kratowych poddanych działaniu sił skierowanych do bieguna w świetle eulerowskiego kryterium stateczności. Uzyskano układ jednorodny sześciu równań różnicowych, nieliniowych, o stałych współczynnikach, z których obliczono krytyczne wartości obciążeń zewnętrznych i postacie wybożenia dźwigarów. Zbadano szereg przypadków obciążeń w całym zakresie odległości bieguna od punktu przyłożenia obciążenia.

### 1. WSTĘP

Praca stanowi kontynuację pracy H. FRĄCKIEWICZA i J. MISIAKA [7], w której dla prostokątnych dźwigarów kratowych przedstawiono rozwiązanie stateczności płaskiej postaci zginania przy działaniu sił skierowanych do bieguna. Opierając się na eulerowskim kryterium stateczności zbadano tam wpływ takich parametrów jak sposób obciążenia, charakter układu krzyżulców i wartość odległości bieguna — na stateczność tych dźwigarów.

Dla prętów przyzmatycznych przypadek obciążenia siłą o zmieniającym się kierunku w czasie wybożenia podano w pracach G. BURGERMEISTERA i H. STEUPA [2], W. J. FIEDOSJEWY [4], Ja. G. PANOWKO i J. J. GUBANOWEJ [18] i R. ROSMANA [19]. W wymienionych tam przykładach siła skierowana jest zawsze w stronę stałego bieguna i działa na koniec pręta, sztywno zamocowanego na drugim końcu. Optymalnym kształtowaniem prętów przy działaniu tego typu obciążenia zajmowali się A. GAJEWSKI i M. ŻYCKOWSKI w pracach [8, 9 i 10].

Szereg przykładów szczególnych, dotyczących stateczności układów prętowych przy obciążeniach siłami eulerowskimi zebrano w monografiach [2, 20 i 21]. Ogólne rozwiązanie stateczności dowolnego układu prętowego oraz przykłady szczególne przedstawili J. BAUER i W. GUTKOWSKI w pracy [1]. H. FRĄCKIEWICZ w pracy [5] przedstawił przybliżoną metodę obliczania stateczności konstrukcji siatkowych, polegającą na przyjęciu przybliżonego modelu utraty stateczności. J. LEWIŃSKI w rozprawie doktorskiej [13] przedstawił kryterium stosowności tej metody. J. MISIAK opierając się na przybliżonym modelu H. Frąckiewicza rozwiązał w pracach [14, 15 i 16] zagadnienie stateczności dźwigarów kratowych. H. FRĄCKIEWICZ i J. MISIAK w pracy [6] przedstawili analizę wielu parametrów konstrukcyjnych

(\*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego nr 05.12 (temat 08.7).

dźwigarów kratowych opierając się na kryterium stateczności płaskiej postaci zginania; J. MISIAK i J. DREWNIAC w pracy [17] zamieścili rozwiązanie stateczności płaskiej postaci zginania prostokątnych dźwigarów ramowych typu Vierendeela.

W pracy niniejszej przedstawiono rozwiązanie stateczności dźwigarów sciskanych siłami skierowanymi do stałego bieguna, położonego na osi pasów bądź na prostej do nich równoległej, leżącej w równej odległości między nimi. Oprócz pewnego teoretycznego znaczenia przypadek tak obciążonego dźwigara ma duże znaczenie praktyczne, przykłady zastosowań można znaleźć w pracach J. Ja. KOGANA [11] i D. DIMITRIJUKA [3].

Problem opisany w niniejszej pracy należy do zagadnień zachowawczych stateczności, ponieważ obciążenie skierowane do bieguna posiada potencjał. Na podstawie eulerowskiego kryterium stateczności zbadano szereg przypadków obciążenia w całym zakresie odległości bieguna od punktu przyłożenia obciążenia.

## 2. METODA BADANIA STATECZNOŚCI DŹWIGARÓW KRATOWYCH PRZY DZIAŁANIU SIŁ SKIEROWANYCH DO BIEGUNA

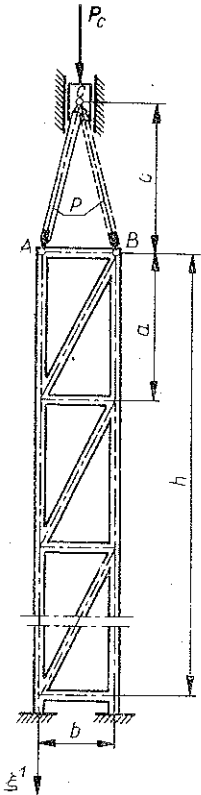
Przedmiotem rozważań jest regularny, płaski dźwigar prostokątny z pojedynczymi krzyżulcami, przedstawiony na rys. 1. Pionowe pasy, przewiązki i krzyżulce stanowią proste pręty sprężyste, połączone w węzłach przegubami płaskimi, tworząc płaską kratownicę. Dźwigar w płaszczyźnie prostopadłej do jego płaszczyzny jest płytą kratową o sztywnych węzłach. Przekroje wszystkich prętów są jednakowe, a ich główne osie bezwładności są odpowiednio prostopadłe i równoległe do płaszczyzny dźwigara. Dźwigar obciążony jest siłami  $P$  skierowanymi do stałego bieguna.

Rozważany przypadek obciążenia jest dla każdej wartości odległości bieguna od punktu przyłożenia siły przypadkiem potencjalnym. Przy podobnym obciążeniu istnienie potencjału zostało wykazane w pracy [7] dla problemu stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych. Zgodnie z tym, co wykazał H. LEIPHOLZ [12], jeśli istnieje potencjał, to kryterium eulerowskie jest zawsze wystarczającym kryterium stateczności.

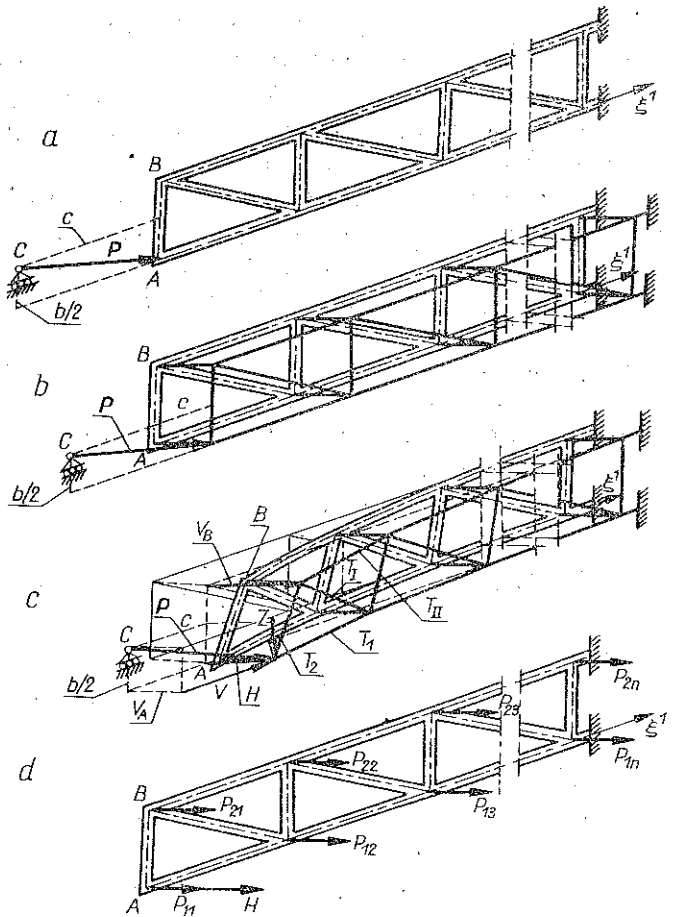
Przy rozpatrywaniu zagadnienia stateczności opisanego dźwigara opierać się będziemy na przybliżonej metodzie obliczania wyboczenia płytowego płaskich dźwigarów siatkowych, omówionej w pracy H. FRĄCKIEWICZA [5]. Przybliżenie to polega na takim wymodelowaniu zjawiska wyboczenia, które daje się opisać prostymi liniowymi równaniami algebraicznymi. Wg tej metody równaniami stateczności dźwigarów siatkowych stają się równania statycznego zginania płyty siatkowej, w których to równaniach obciążenie zewnętrzne jest pewną pochodną tarczowego stanu napięcia i stanu przemieszczenia, powodujące płytowe wygięcie dźwigara. W cytowanej pracy [5] przedstawiony został model ilustrujący sposób obliczania tego obciążenia.

Podobny model można zbudować w celu opisanego zagadnienia stateczności dźwigarów kratowych poddanych działaniu sił skierowanych do bieguna (rys. 2). Nad dźwigarem (rys. 2a) rozpina się siatkę zbudowaną z prętów sztywno-sprężystych,  $[EJ = \infty]$ , połączonych ze sobą przegubowo oraz poprzez sztywne łączniki połączone

przegubowo z dźwigarem (rys. 2b). Pówtaje w ten sposób układ składający się ze sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty kratowej. Sposób połączenia węzłów sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty jest taki, że umożliwia przeniesienie niezrównoważonych obciążeń w obrębie tarczowego stanu napięcia z tarczy na płytę. Nadając węzłom tarczy przemieszczenia  $V_A, V_B$  powoduje się przejście układu



Rys. 1



Rys. 2

sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty od płaskiej postaci do konfiguracji wygiętej (rys. 2c). Rozpatrywane zagadnienie różni się od zwykłego przypadku eulerowskiego tym, że przy wyoboczeniu w punkcie przyłożenia siły skierowanej do bieguna występują jej składowe siły:

$$V = \frac{Pc}{\sqrt{V_A^2 + c^2 + \frac{b^2}{4}}}, \quad H = \frac{PV_A}{\sqrt{V_A^2 + c^2 + \frac{b^2}{4}}}, \quad Z = \frac{P \frac{b}{2}}{\sqrt{V_A^2 + c^2 + \frac{b^2}{4}}}$$

gdzie  $V$  oznacza poziomą ściskającą,  $H$  prostopadłą do płaszczyzny dźwigara (zginająca) oraz  $Z$  pionową (leżąca w płaszczyźnie dźwigara), powodującą utratę stateczności płaskiej postaci zginania.

Obciążeniem krytycznym nazywać będziemy taką wartość obciążenia  $P$ , przy którym jest możliwa równowaga następującego układu: sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty w płytowej konfiguracji wygiętej.

Zgodnie z rys. 2c pręty tarczy po nadaniu wspomnianych wychyleń pozostają proste, a płyta wygina się sprężysto. W efekcie siły pojawiające się w prętach tarczy ( $T_1, T_2, T_3, T_{II}$ ), obliczane jako funkcje sił  $V$  i  $Z$  leżących w płaszczyźnie tarczy, dają rzut na kierunek prostopadły do jej płaszczyzny i powstałe w ten sposób siły  $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}, P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2n}$  nie mogą być zrównoważone w obszarze tarczowego stanu napięcia i obciążają sprzężoną z tarczą płytę. Siły te są liniową funkcją sił tarczowych i założonego wychylenia płytowego. Zagadnienie w efekcie sprowadza się do rozwiązania płyty kratowej obciążonej w węzłach siłami liniowymi zależnymi od ugięcia tych węzłów (rys. 2d). Oprócz tych sił płytę obciążać będzie siła  $H$  prostopadła do jej płaszczyzny.

Opierając się na przedstawionej metodzie etapy rozwiązania rozpatrywanego problemu stateczności są następujące: 1) określenie tarczowego stanu napięcia (od obciążenia  $V$  i  $Z$ ), 2) wyprowadzenie równań równowagi płyty kratowej obciążonej w węzłach dowolnym obciążeniem, 3) obliczenie obciążenia płytowego zgodnie z przedstawionym modelem (siły  $H$  i wypadkowe od sił tarczowych) oraz 4) ustalenie wybozczeniowych równań równowagi.

Zgodnie z przyjętą metodą, wybozczeniowe równania równowagi dla rozpatrywanego dźwigara kratowego mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 & E_{11}^{1A} \Omega_A^1(\xi^i) + E_{12}^{1A} \Omega_A^1(\xi^{i+1}) + E_{13}^{1A} \Omega_A^1(\xi^{i+2}) + E_{22}^{1A} \Omega_A^2(\xi^{i+1}) + E_{11}^{1B} \Omega_B^1(\xi^i) + \\
 & \quad + E_{12}^{1B} \Omega_B^1(\xi^{i+1}) + E_{21}^{1B} \Omega_B^2(\xi^i) + E_2^{1A} V_A(\xi^{i+1}) + E_1^{1B} V_B(\xi^i) + \\
 & \quad + E_2^{1B} V_B(\xi^{i+1}) = 0, \\
 & E_{12}^{2A} \Omega_A^1(\xi^{i+1}) + E_{21}^{2A} \Omega_A^2(\xi^i) + E_{22}^{2A} \Omega_A^2(\xi^{i+1}) + E_{23}^{2A} \Omega_A^2(\xi^{i+2}) + E_{11}^{2B} \Omega_B^1(\xi^i) + \\
 & \quad + E_{21}^{2B} \Omega_B^2(\xi^i) + E_{22}^{2B} \Omega_B^2(\xi^{i+1}) + E_1^{2A} V_A(\xi^i) + E_2^{2A} V_A(\xi^{i+1}) + \\
 & \quad + E_3^{2A} V_A(\xi^{i+2}) + E_1^{2B} V_B(\xi^i) = 0, \\
 & E_{12}^{3A} \Omega_A^1(\xi^{i+1}) + E_{13}^{3A} \Omega_A^1(\xi^{i+2}) + E_{23}^{3A} \Omega_A^2(\xi^{i+2}) + E_{11}^{3B} \Omega_B^1(\xi^i) + E_{12}^{3B} \Omega_B^1(\xi^{i+1}) + \\
 & \quad + E_{13}^{3B} \Omega_B^1(\xi^{i+2}) + E_{22}^{3B} \Omega_B^2(\xi^{i+1}) + E_2^{3A} V_A(\xi^{i+1}) + E_3^{3A} V_A(\xi^{i+2}) + \\
 & \quad + E_2^{3B} V_B(\xi^{i+1}) = 0, \\
 & E_{13}^{4A} \Omega_A^1(\xi^{i+2}) + E_{22}^{4A} \Omega_A^2(\xi^{i+1}) + E_{23}^{4A} \Omega_A^2(\xi^{i+2}) + E_{12}^{4B} \Omega_B^1(\xi^{i+1}) + E_{21}^{4B} \Omega_B^2(\xi^i) + \\
 & \quad + E_{22}^{4B} \Omega_B^2(\xi^{i+1}) + E_{23}^{4B} \Omega_B^2(\xi^{i+2}) + E_3^{4A} V_A(\xi^{i+2}) + E_1^{4B} V_B(\xi^i) + \\
 & \quad + E_2^{4B} V_B(\xi^{i+1}) + E_3^{4B} V_B(\xi^{i+2}) = 0, \\
 & E_{12}^{5A} \Omega_A^1(\xi^{i+1}) + E_{21}^{5A} \Omega_A^2(\xi^i) + E_{22}^{5A} \Omega_A^2(\xi^{i+1}) + E_{23}^{5A} \Omega_A^2(\xi^{i+2}) + E_{11}^{5B} \Omega_B^1(\xi^i) + \\
 & \quad + E_{12}^{5B} \Omega_B^1(\xi^{i+1}) + E_{21}^{5B} \Omega_B^2(\xi^i) + (E_1^{5A} + E_{1P}^{5A}) V_A(\xi^i) +
 \end{aligned}$$

(2.1)  
[cd.]

$$\begin{aligned}
 & + \left( E_2^{5A} + \frac{P}{\sqrt{V_A^2(\xi^1+1) + c^2 + \frac{b^2}{4}}} + E_{2P}^{5A} \right) V_A(\xi^1+1) + \\
 & + (E_3^{5A} + E_{3P}^{5A}) V_A(\xi^1+2) + (E_1^{5B} + E_{1P}^{5B}) V_B(\xi^1) + (E_2^{5B} + E_{2P}^{5B}) V_B(\xi^1+1) = 0, \\
 & E_{12}^{6A} \Omega_A^1(\xi^1+1) + E_{13}^{6A} \Omega_A^1(\xi^1+2) + E_{23}^{6A} \Omega_A^2(\xi^1+2) + E_{12}^{6B} \Omega_B^1(\xi^1+1) + E_{21}^{6B} \Omega_B^2(\xi^1) + \\
 & + E_{22}^{6B} \Omega_B^2(\xi^1+1) + E_{23}^{6B} \Omega_B^2(\xi^1+2) + (E_2^{6A} + E_{2P}^{6A}) V_A(\xi^1+1) + \\
 & + (E_3^{6A} + E_{3P}^{6A}) V_A(\xi^1+2) + (E_1^{6B} + E_{1P}^{6B}) V_B(\xi^1) + \\
 & + \left( E_2^{6B} + \frac{P}{\sqrt{V_B^2(\xi^1+1) + c^2 + \frac{b^2}{4}}} + E_{2P}^{6B} \right) V_B(\xi^1+1) + \\
 & + (E_3^{6B} + E_{3P}^{6B}) V_B(\xi^1+2) = 0.
 \end{aligned}$$

Jest to układ jednorodny sześciu równań różnicowych, nieliniowych, o stałych współczynnikach. Niewiadomymi funkcjami współrzędnej  $\xi^1$  węzłów dźwigara jest sześć składowych  $\Omega_A^1, \Omega_A^2, V_A, \Omega_B^1, \Omega_B^2, V_B$  stanu przemieszczenia tych węzłów oraz zewnętrzne obciążenie  $P$ . Ze względu na to, że stan odkształcenia dźwigarów płaskich został szczegółowo omówiony w pracach [14 i 15], w tym opracowaniu nie będzie przedmiotem rozważań.

Operatory równań mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{1A} = E_{13}^{1A} &= a\psi, & E_{12}^{1A} &= -\frac{4a^2 b^2 \eta + a^4 \mu}{A^3} - 2a\psi - \frac{4a^2 \alpha}{b}, \\
 E_{22}^{1A} = E_{12}^{2A} = E_{22}^{2B} = E_{12}^{4B} &= \frac{a^2 b^2 (\mu - 4\eta)}{A^3}, & E_{11}^{1B} = E_{13}^{3A} &= \frac{a^4 \mu - 2a^2 b^2 \eta}{A^3}, \\
 E_{12}^{1B} = E_{12}^{3A} &= -\frac{2a^2 \alpha}{b}, & E_{21}^{1B} = E_{11}^{2B} = E_{23}^{3A} = E_{13}^{4A} &= -\frac{a^2 b^2 (2\eta + \mu)}{A^3}, \\
 E_2^{1A} = -E_2^{3B} = E_2^{5A} = -E_{12}^{6B} &= -\left( \frac{6ab\eta}{A^3} + \frac{6a\alpha}{b^2} \right), \\
 E_1^{1B} = -E_2^{2A} = E_1^{2B} = -E_3^{3A} = -E_3^{6A} = E_2^{6B} = -E_{22}^{5A} = -E_{11}^{5B} &= \\
 &= -E_{21}^{5B} = E_{13}^{6A} = E_{23}^{6A} = E_{22}^{6B} = \frac{6ab\eta}{A^3}.
 \end{aligned}$$

(2.2)

$$\begin{aligned}
 E_2^{5B} = -E_2^{3A} = -E_{12}^{5B} = E_{12}^{6A} &= \frac{6a\alpha}{b^2}, & E_{21}^{2A} = E_{22}^{1A} &= -\frac{2b^2}{a}, \\
 E_{22}^{2A} = E_{22}^{6B} &= -\left( \frac{8b^2}{a} + \frac{4a^2 b^2 \eta + b^4 \mu}{A^3} + \gamma b \right), & E_{21}^{2B} = E_{23}^{6A} &= \frac{b^4 \mu - 2a^2 b^2 \eta}{A^3}, \\
 E_{22}^{2B} = E_{22}^{4A} = b\gamma, & E_1^{2A} = -E_3^{2A} = -E_{21}^{5A} = E_{23}^{5A} = \frac{6b}{a^2}, & E_{11}^{3B} = E_{13}^{3B} &= \delta a,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad [cd.] \quad E_{12}^{3B} &= - \left( \frac{a^4 \mu + 4a^2 b^2 \eta}{A^3} + 2a\delta + \frac{4a^2 \alpha}{b} \right), & E_{21}^{4B} &= E_{23}^{4B} = - \frac{2b^2 \beta}{a}, \\
 E_1^{4B} &= -E_3^{4B} = -E_{21}^{6B} = E_{23}^{6B} = \frac{6b\beta}{a^2}, & E_1^{5A} &= E_3^{5A} = \frac{12}{a^3}, \\
 E_2^{5A} &= -12 \left( \frac{\eta}{A^3} + \frac{2}{a^3} + \frac{\alpha}{b^3} \right), & E_1^{5B} &= E_3^{6A} = \frac{12\eta}{A^3}, & E_2^{5B} &= E_2^{6A} = \frac{12\alpha}{b^3}, \\
 E_1^{6B} &= E_3^{6B} = \frac{12\beta}{a^3}, & E_2^{6B} &= -12 \left( \frac{\eta}{A^3} + \frac{2\beta}{a^3} + \frac{\alpha}{b^3} \right), \\
 E_{1P}^{5A} &= \frac{T_1(\xi^1)}{a_1 a}, & E_{2P}^{5A} &= -\frac{1}{a_1} \left[ \frac{T_1(\xi^{1+1}) + T_1(\xi^1)}{a} + \frac{T_1(\xi^1)}{A} + \frac{T_2(\xi^{1+1})}{b} \right], \\
 E_{3P}^{5A} &= \frac{T_1(\xi^{1+1})}{a_1 a}, & E_{1P}^{5B} &= \frac{T_1(\xi^1)}{a_1 A}, & E_{2P}^{5B} &= \frac{T_2(\xi^{1+1})}{a_1 b}, & E_{2P}^{6A} &= \frac{T_2(\xi^{1+1})}{a_1 b}, \\
 E_{3P}^{6A} &= \frac{T_1(\xi^{1+1})}{a_1 A}, & E_{1P}^{6B} &= \frac{T_{II}(\xi^1)}{a_1 a}, & E_{3P}^{6B} &= \frac{T_{II}(\xi^{1+1})}{a_1 a}, \\
 E_{2P}^{6B} &= \frac{1}{a_1} \left[ \frac{T_{II}(\xi^1) + T_{II}(\xi^{1+1})}{a} + \frac{T_2(\xi^{1+1})}{b} + \frac{T_{I}(\xi^{1+1})}{A} \right],
 \end{aligned}$$

gdzie  $a, b, A = (a^2 + b^2)^{1/2}$  oznaczają długości odpowiednich prętów,  $\alpha, \beta, \eta, \mu, \gamma, \delta, \psi$  stosunki sztywności zginania i skręcania poszczególnych prętów  $T_1, T_2, T_I, T_{II}$  wewnętrzne siły istniejące w poszczególnych prętach tarczy oraz  $a_1$  sztywność zginania pasa, łączącego na linii prametrycznej  $\xi^1$ .

Ponieważ wyobczeniowe równania równowagi dźwigara zostały napisane w układzie jednoparametrowym ( $\xi^1$ ), przeto warunki brzegowe będziemy spełniać tylko na górnej i dolnej krawędzi dźwigara. Warunki brzegowe na krawędziach pionowych dźwigara zostały spełnione przez równania płyty kratowej, które napisano dla dwóch charakterystycznych węzłów leżących na obu pionowych pasach. Wartości przemieszczeń węzłów fikcyjnych na odpowiednich krawędziach dla rozpatrywanych warunków brzegowych są następujące: 1) dla brzegu swobodnego górnego — składowe stanu przemieszczenia nie są znane, ale wiadomo, że obciążenia węzłów w postaci sił i momentów płytowych są równe zero. Wyrażając te obciążenia przez siły i momenty w odpowiednich prętach a następnie przez przemieszczenia, otrzymujemy wartości przesunięć i obrotów:

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad \Omega_B^1(\xi^{1-1}) &= \Omega_B^1(\xi^1), & \Omega_B^2(\xi^{1-1}) &= \Omega_B^2(\xi^1), & V_B(\xi^{1-1}) &= V_B(\xi^1) + ab\Omega_B^2(\xi^1), \\
 \Omega_A^1(\xi^{1-1}) &= \left[ \frac{6b\eta}{\psi A^3} \right] V_A(\xi^1) + \left[ 1 + \frac{4b^2 \eta a + a^3 \mu}{\psi A^3} \right] \Omega_A^1(\xi^1) + \\
 &+ \left[ \frac{b^2(4a\eta - a\mu)}{\psi A^3} \right] \Omega_A^2(\xi^1) + \left[ -\frac{6b\eta}{\psi A^3} \right] V_B(\xi^1) - \\
 &- \left[ \frac{a^3 \mu - 2b^2 a\eta}{\psi A^3} \right] \Omega_B^1(\xi^1) + \left[ \frac{a^2 b^2 (\mu - 4\eta)}{\psi A^3} \right] \Omega_B^2(\xi^1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad \Omega_{A(\xi^1-1)}^2 &= \left[ \frac{a^3(\eta-\mu)}{A^3} \right] \Omega_{A(\xi^1)}^1 + \left[ 1 + \frac{a^3\eta+ab^2\mu}{A^3} \right] \Omega_{A(\xi^1)}^2 + \\
 &\quad + \left[ \frac{a^3(\mu-\eta)}{A^3} \right] \Omega_{B(\xi^1)}^1 + \left[ -\frac{a^3\eta+ab^2\mu}{A^3} \right] \Omega_{B(\xi^1)}^2, \\
 V_{A(\xi^1-1)} &= \left[ 1 + \frac{a^3\eta}{A^3} \right] V_{A(\xi^1)} + \left[ \frac{ba^4(2\eta-\mu)}{2A^3} \right] \Omega_{A(\xi^1)}^1 + \\
 &\quad + \left[ ab + \frac{a^2b^2(b^2\mu+2a^2\eta)}{2A^3} \right] \Omega_{A(\xi^1)}^2 + \left[ -\frac{a^3\eta}{A^3} \right] V_{B(\xi^1)} + \\
 &\quad + \left[ \frac{ba^4\mu}{2A^3} \right] \Omega_{B(\xi^1)}^1 + \left[ -\frac{a^2b^2(2a^2\eta+b^2\mu)}{2A^3} \right] \Omega_{B(\xi^1)}^2;
 \end{aligned}$$

2) brzeg sztywno zamocowany dolny charakteryzuje się tym, że przesunięcia i obroty węzłów są równe zeru:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad [V_A]_{\xi^1=n} &= 0, & [\Omega_A^1]_{\xi^1=n} &= 0, & [\Omega_A^2]_{\xi^1=n} &= 0, \\
 [V_B]_{\xi^1=n} &= 0, & [\Omega_B^1]_{\xi^1=n} &= 0, & [\Omega_B^2]_{\xi^1=n} &= 0.
 \end{aligned}$$

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ NAJMNIEJSZYCH SIŁ KRYTYCZNYCH I POSTACI WYBOCZENIA

Obliczenie z równań stateczności (2.1) krytycznej wartości zewnętrznego obciążenia  $P$  dokonuje się za pomocą metody numerycznej, która została opracowana na maszynie cyfrową CDC-3170 w języku FORTRAN.

Warunkiem istnienia niezerowych przemieszczeń (czyli istnienia postaci równowagi dźwigara po odkształceniu) jest znikanie wyznacznika charakterystycznego układu równań (2.1), napisanych dla wszystkich węzłów dźwigara. Warunek ten można napisać następująco:

$$(3.1) \quad \left| \mathbf{A} - \mathbf{PB} \frac{1}{\sqrt{V_{A(b)}^2 + c^2 + \frac{b^2}{4}}} \right| = 0,$$

gdzie macierzą kwadratową współczynników rozpatrywanego układu równań jest wyrażenie

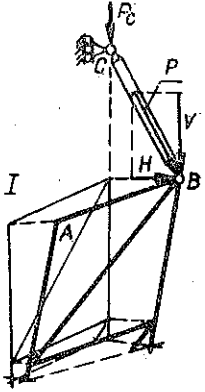
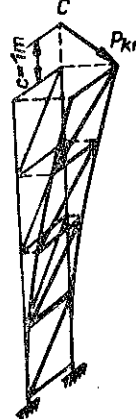
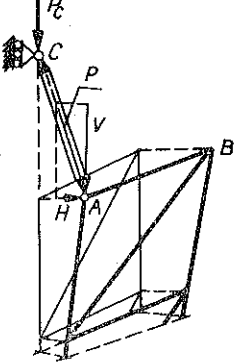
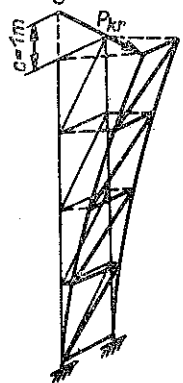
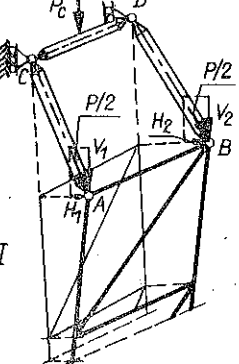
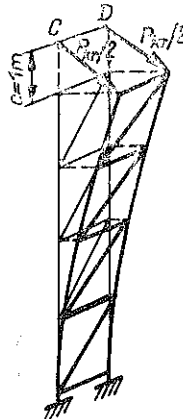
$$\left[ \mathbf{A} - \mathbf{PB} \frac{1}{\sqrt{V_{A(b)}^2 + c^2 + \frac{b^2}{4}}} \right],$$

przy czym macierz  $\mathbf{B}$  nie jest macierzą jednostkową.

Ze względu na liczbę stopni swobody wszystkich węzłów dźwigara otrzymuje się kilka wartości sił krytycznych. Nas interesuje najmniejsza wartość siły krytycznej  $P$  oraz odpowiadająca jej postać wyboczenia dźwigara.

Rozpatrujemy szereg przypadków obciążenia (I-XII), które zostały przedstawione w tablicach 1-4. Dla przykładów zestawionych w tych tablicach obliczenia numerycz-

Tablica 1

Kol. Wiersz	Rodzaj obciążenia a	Składowe obciążenia zewnętrznego b	Odległość bieguna c [m] c	Siły krytyczne P <sub>kr</sub> [kG] d	Postacie wybożenia wybranych dźwigarów e
1		$V = \frac{P \cdot c}{\sqrt{v^2 + c^2}}$ $H = \frac{P \cdot v_B}{\sqrt{v^2 + c^2}}$	<p>0</p> <p>0,1</p> <p>1</p> <p>5</p> <p>∞</p>	<p>0</p> <p>0,012524 a<sub>1</sub></p> <p>0,092446 a<sub>1</sub></p> <p>0,256359 a<sub>1</sub></p> <p>0,424986 a<sub>1</sub></p>	
2		$V = \frac{P \cdot c}{\sqrt{v^2 + c^2}}$ $H = \frac{P \cdot v_A}{\sqrt{v^2 + c^2}}$	<p>0</p> <p>0,1</p> <p>1</p> <p>5</p> <p>∞</p>	<p>0</p> <p>0,014645 a<sub>1</sub></p> <p>0,115264 a<sub>1</sub></p> <p>0,295005 a<sub>1</sub></p> <p>0,480889 a<sub>1</sub></p>	
3		$V_1 = \frac{P \cdot c}{2\sqrt{v^2 + c^2}}$ $H_1 = \frac{P \cdot v_A}{2\sqrt{v^2 + c^2}}$ $V_2 = \frac{P \cdot c}{2\sqrt{v^2 + c^2}}$ $H_2 = \frac{P \cdot v_B}{2\sqrt{v^2 + c^2}}$	<p>0</p> <p>0,1</p> <p>1</p> <p>5</p> <p>∞</p>	<p>0</p> <p>0,012584 a<sub>1</sub></p> <p>0,099818 a<sub>1</sub></p> <p>0,259321 a<sub>1</sub></p> <p>0,429896 a<sub>1</sub></p>	



Tablica 2

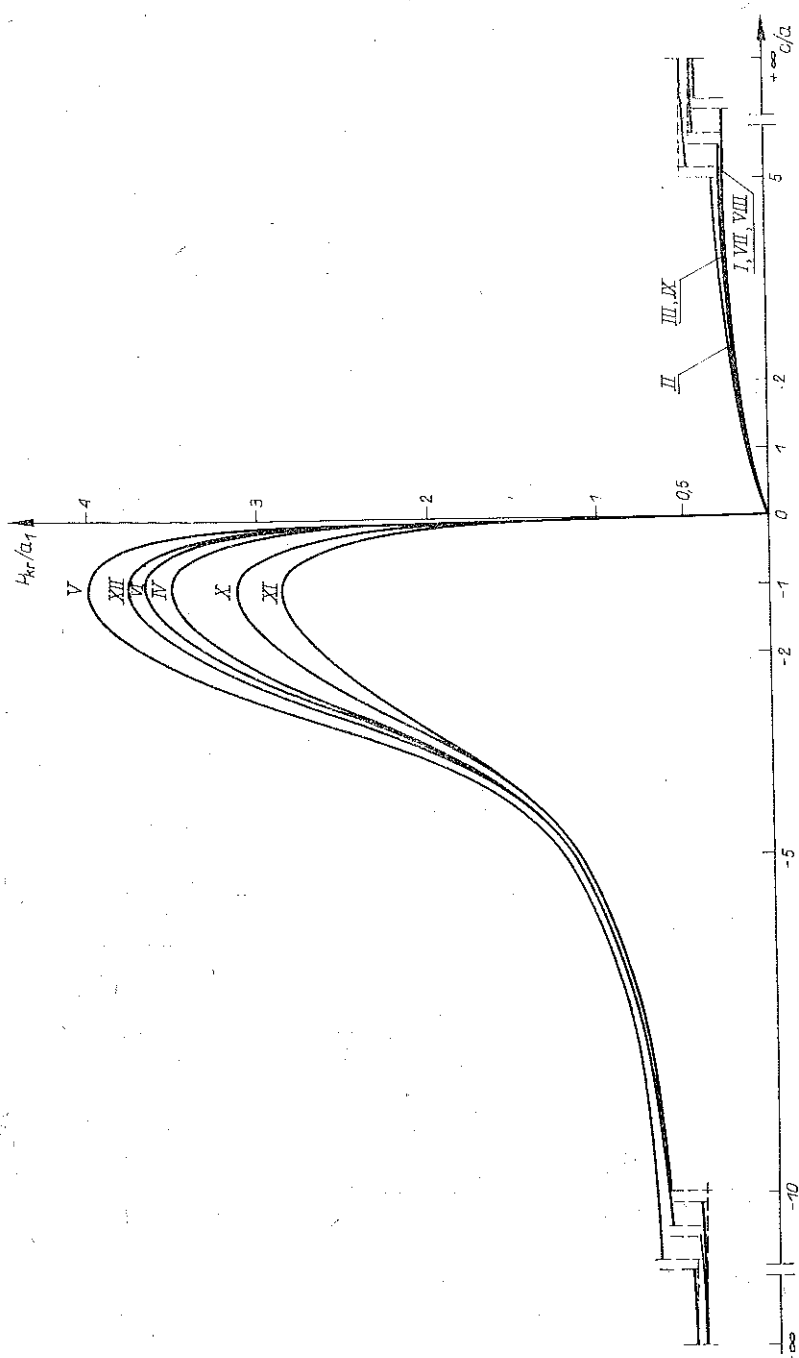
Kol.	Rodzaj obciążenia	Składowe obciążenia zewnętrznego	Odległość bieguna $c$ [m]	Siły krytyczne $P_{kr}$ [kG]	Postacie wybożenia wybranych dźwigarów
Wiersz	a	b	c	d	e
1		$V = \frac{P \cdot c}{\sqrt{v_B^2 + c^2}}$ $H = \frac{P \cdot v_B}{\sqrt{v_B^2 + c^2}}$	0	0	
			-0,1	1,345344 $a_1$	
			-0,5	3,301425 $a_1$	
			-1	3,573251 $a_1$	
			-2	3,143482 $a_1$	
			-5	1,165684 $a_1$	
			-10	0,635916 $a_1$	
			$-\infty$	0,424986 $a_1$	
2		$V = \frac{P \cdot v_A}{\sqrt{v_A^2 + c^2}}$ $H = \frac{P \cdot v_A}{\sqrt{v_A^2 + c^2}}$	0	0	
			-0,1	1,642358 $a_1$	
			-0,5	3,834235 $a_1$	
			-1	4,003622 $a_1$	
			-2	3,646927 $a_1$	
			-5	1,210132 $a_1$	
			-10	0,696609 $a_1$	
			$-\infty$	0,480889 $a_1$	
3		$V_1 = \frac{P \cdot c}{2\sqrt{v_A^2 + c^2}}$ $H_1 = \frac{P \cdot v_A}{2\sqrt{v_A^2 + c^2}}$ $V_2 = \frac{P \cdot c}{2\sqrt{v_B^2 + c^2}}$ $H_2 = \frac{P \cdot v_B}{2\sqrt{v_B^2 + c^2}}$	0	0	
			-0,1	1,542355 $a_1$	
			-0,5	3,493867 $a_1$	
			-1	3,657867 $a_1$	
			-2	3,264568 $a_1$	
			-5	1,165890 $a_1$	
			-10	0,636044 $a_1$	
			$-\infty$	0,429896 $a_1$	

Tablica 3

Kol.	Rodzaj obciążenia	Składowe obciążenia zewnętrznego	Odległość bieguna $c$ [m]	Sily krytyczne $P_{kr}$ [kG]	Postacie wybożenia dźwigarów wybranych
Wiersz	a	b	c	d	e
1	<p>VII</p>	$V = \frac{P \cdot c}{\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $H = \frac{P \cdot v_B}{\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $Z = \frac{P \cdot (b^2/2)}{\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$	<p>0</p> <p>0,1</p> <p>1</p> <p>5</p> <p><math>\infty</math></p>	<p>0</p> <p><math>0,033498 a_1</math></p> <p><math>0,102078 a_1</math></p> <p><math>0,257222 a_1</math></p> <p><math>0,424986 a_1</math></p>	
2	<p>VIII</p>	$V = \frac{P \cdot c}{\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $H = \frac{P \cdot v_A}{\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $Z = \frac{P \cdot (b/2)}{\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$	<p>0</p> <p>0,1</p> <p>1</p> <p>5</p> <p><math>\infty</math></p>	<p>0</p> <p><math>0,033555 a_1</math></p> <p><math>0,102002 a_1</math></p> <p><math>0,257450 a_1</math></p> <p><math>0,480889 a_1</math></p>	
3	<p>IX</p>	$V_1 = \frac{P \cdot c}{2 \sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $H_1 = \frac{P \cdot v_A}{2 \sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $Z_1 = \frac{P \cdot (b/2)}{2 \sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $V_2 = \frac{P \cdot c}{2 \sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $H_2 = \frac{P \cdot v_B}{2 \sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $Z_2 = \frac{P \cdot (b/2)}{2 \sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$	<p>0</p> <p>0,1</p> <p>1</p> <p>5</p> <p><math>\infty</math></p>	<p>0</p> <p><math>0,0338525 a_1</math></p> <p><math>0,089839 a_1</math></p> <p><math>0,259696 a_1</math></p> <p><math>0,429896 a_1</math></p>	

Tablica 4

Kol. Wiersz	Rodzaj obciążenia	Składowe obciążenia zewnętrzne	Odległość bieguna c [m]	Sily krytyczne P <sub>kr</sub> [kG]	Postacie wybożenia wybranych dźwigarów
	a	b	c	d	e
1		$V = \frac{P \cdot c}{\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $H = \frac{P \cdot v_B}{\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $Z = \frac{P \cdot (b/2)}{\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$	0	0	
			-0,1	1,363235 a <sub>1</sub>	
			-0,5	2,904385 a <sub>1</sub>	
			-1	3,136934 a <sub>1</sub>	
			-2	2,825443 a <sub>1</sub>	
			-5	1,140804 a <sub>1</sub>	
			-10	0,627701 a <sub>1</sub>	
-∞	0,424986 a <sub>1</sub>				
2		$V = \frac{P \cdot c}{\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $H = \frac{P \cdot v_A}{\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $Z = \frac{P \cdot (b/2)}{\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$	0	0	
			-0,1	1,136758 a <sub>1</sub>	
			-0,5	2,635542 a <sub>1</sub>	
			-1	2,872132 a <sub>1</sub>	
			-2	2,602543 a <sub>1</sub>	
			-5	1,155226 a <sub>1</sub>	
			-10	0,635636 a <sub>1</sub>	
-∞	0,480889 a <sub>1</sub>				
3		$V_1 = \frac{P \cdot c}{2\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $H_1 = \frac{P \cdot v_A}{2\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $Z_1 = \frac{P \cdot (b/2)}{2\sqrt{v_A^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $V_2 = \frac{P \cdot c}{2\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $H_2 = \frac{P \cdot v_B}{2\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$ $Z_2 = \frac{P \cdot (b/2)}{2\sqrt{v_B^2 + c^2 + (b^2/4)}}$	0	0	
			-0,1	2,236452 a <sub>1</sub>	
			-0,5	3,584306 a <sub>1</sub>	
			-1	3,769373 a <sub>1</sub>	
			-2	3,384365 a <sub>1</sub>	
			-5	1,166984 a <sub>1</sub>	
			-10	0,509862 a <sub>1</sub>	
-∞	0,429896 a <sub>1</sub>				



Rys. 3

ne przeprowadzono dla prętów o przekrojach osiowosymetrycznych o wymiarach gabarytowych dźwigara  $h=4a=4m$ ,  $b=0,5$  m. Zamieszczone w kolumnie d najmniejsze wartości sił krytycznych odpowiadają różnym sposobom obciążenia i układom krzyżulców oraz kolejnym odległościom biegunów, do których skierowane jest obciążenie zewnętrzne. Funkcje te przedstawiono na wykresie  $P/a_1=f\left(\frac{c}{a}\right)$  (rys. 3). W tabelicy 1 zamieszczono wartości sił krytycznych dla przypadków obciążenia I–III (dodatknie wartości odległości  $c$ ). Jak widać z wykresu na rys. 3 wartości te rosną od zera przy  $c/a=0$  do wartości skończonych odpowiadających obciążeniom siłami konserwatywnymi (przy  $c/a=\infty$ ). Obciążenie krytyczne odpowiadające biegunom znajdującym się poniżej punktu przyłożenia obciążeń, dla przypadków IV–VI (ujemne wartości  $c$ , tablica 2) rośnie od wartości odpowiadających siłom konserwatywnym (przy  $c/a=-\infty$ ) do wartości odpowiadających  $c/a=-1$  (maksimum), a następnie maleje do zera (przy  $c/a=0$ ).

Z porównania sposobów obciążenia dźwigara (zestawionych w tablicach 1 i 2) wynika, że obciążenie odpowiadające II i V przypadkowi jest korzystniejsze od pozostałych. Natomiast obciążenie rozłożone równomiernie do obu węzłów (przypadek III i VI) daje wyniki pośrednie pomiędzy wymienionymi uprzednio (II i V), a I i IV przypadkiem obciążenia.

Jak widać z wykresu siły krytyczne odpowiadające VII, VIII i IX przypadkowi obciążenia (tablica 3) mają przebieg analogiczny do przypadków I, II i III. Wartości sił krytycznych zestawione w tabelicy 4 dla X, XI i XII przypadku obciążenia również mają przebieg analogiczny do przypadków IV, V i VI.

Analizując rozwiązania stateczności dźwigarów dla biegunów znajdujących się na prostej leżącej pomiędzy jego pasami (przypadki VII–XII) należy stwierdzić, że obciążenie rozłożone równomiernie do obu węzłów (przypadek IX i XII) jest korzystniejsze od pozostałych.

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że eulerowskie kryterium stateczności daje jednoznaczne rozwiązania w otoczeniu punktu  $c/a=0$ . W cytowanej pracy [7] rozwiązania stateczności w otoczeniu punktu zerowego (przy  $c/b=0$ ) dawały niejednoznaczne rozwiązania. Spowodowane to było przyjęciem uproszczenia co do składowych obciążenia zewnętrznego, a tym samym równania stateczności stały się liniowe.

Wszystkim obliczonym najmniejszym wartościom sił krytycznych odpowiadają postacie wyboczenia dźwigarów. Przykładowo, w kolumnie e (tablice 1–4) przedstawiono postacie wyboczenia wybranych dźwigarów.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, *Stateczność regularnych konstrukcji prętowych*, Arch. Inż. Łąd., 19, 1, 1973.
2. G. BURGEMEISTER, H. STEUP, *Stabilitätstheorie I*, Akad. Verlag, Berlin 1957.
3. D. DMITRIJUK, *Siła krytyczna ramienia dźwigu przy wyboczeniu z płaszczyzny zawieszenia*, Rozpr. Inż., 15, 1, 1967.

4. В. И. Феодосиев, *Изобретные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*, Изд. Наука, Москва 1967.
5. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech. Stos., 23, 4, 1971.
6. H. FRĄCKIEWICZ, J. MISIAK, *Analiza stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych*, Rozpr. Inż., 23, 1, 1975.
7. H. FRĄCKIEWICZ, J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dwupasowych dźwigarów kratowych przy działaniu siły skierowanej do bieguna*, Rozpr. Inż., 23, 2, 1975.
8. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Mech. Teoret. i Stos., 8, 2, 1970.
9. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Rozpr. Inż., 17, 2, 1969.
10. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal design of elastic columns subject to the general conservative behaviour of loading*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 806-818, 1970.
11. И. Я. Коган, *Устойчивость поворотных колонн башенных кранов*, Расчет пространственных конструкций, 4, 57-71, Москва 1958.
12. H. LEIPHOLZ, *Über den Einfluss der Dämpfung bei nichtkonservativen Stabilitätsproblemen elastischer Stäbe*, Ingenieur Archiv, 1964.
13. J. LEWIŃSKI, *Stateczność rusztów siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
14. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej formy zginania dźwigarów siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
15. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów siatkowych o pasmach równoległych*, Rozpr. Inż., 21, 1, 1973.
16. J. MISIAK, *Analiza stateczności dźwigarów kratowych poddanych działaniu sił zachowawczych*, Rozpr. Inż., 23, 1, 1975.
17. J. MISIAK, J. DREWNIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów ramowych dwupasowych, prostokątnych*, VI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Org. PTMTiS i Inst. Mech. Stos. PW (pełny tekst referatu), 19-20.09.1974, Warszawa.
18. Я. Г. Пановко, И. И. Губанова, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Москва 1967.
19. R. ROSMAN, *Knickuntersuchung des elastisch Eingesparnten Kragträgers mit veränderlichem Tragheitsmoment unter dem Einfluss Poltreur Belastung*, Österr. Ing. — Zeit 5, 3, 173-174, 1960.
20. S. TIMOSHENKO, I. M. GERE, *Theory of elastic stability*, McGraw Hill, 1961, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
21. *Handbook of structural stability*, Ed. by Column Research Committee of Japan Corona Publishing Company, LTD, Tokyo 1971.

#### Резюме

### УСТОЙЧИВОСТЬ ФЕРМ ПОДВЕРГНУТЫХ ДЕЙСТВИЮ СИЛ НАПРАВЛЕННЫХ К ПОЛЮСУ

Предметом работы является вопрос устойчивости ферм, подвергнутых действию сил направленных к полюсу, в свете критерия устойчивости по Эйлеру. Получена однородная система шести разностных нелинейных уравнений с постоянными коэффициентами, из которых вычислены критические значения внешних нагрузок и типы продольного изгиба несущих балок. Исследован ряд случаев нагрузок в целом интервале изменения расстояния полюса от точки приложения нагрузки.

## SUMMARY

STABILITY OF LATTICE GIRDERS SUBJECTED TO THE ACTION  
OF FORCES DIRECTED TO THE POLE

The subject of this paper is the analysis of the stability of the lattice girders subjected to the action of the forces directed to the pole in a light of the eulerian criterion of stability. The system of six homogeneous nonlinear difference equations with constant coefficients is obtained and the critical values of the external loads and buckling modes of the girders are evaluated. A series of the loading conditions in the whole range of the distance of the pole from the point of load application are examined.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 maja 1975 r.*

---