

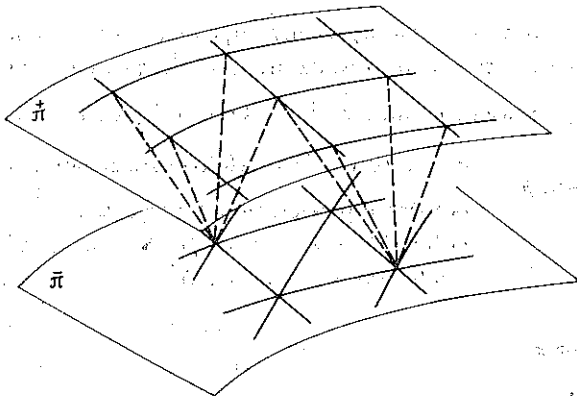
RÓWNANIA LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTYCH POWŁOK STRUKTURALNYCH

JACEK GIERLIŃSKI (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono metodę analizy statycznej przestrzennych ustrojów prętowych o węzłach usytuowanych na dwóch, niewiele odległych powierzchniach. Metodę analizy tych konstrukcji, zwanych powłokami strukturalnymi, opracowano na podstawie modelu ciągłego ustroju, zakładając gęstość i regularność siatek prętowych rozpatrywanych konstrukcji, wyprowadzono podstawowy układ równań pozwalający na wyznaczenie deformacji tych ustrojów. Równania te dotyczą powłok strukturalnych o dowolnych typach siatek prętowych, przy założeniu przegubowego połączenia prętów w węzłach. Następnie podano wzory określające siłę w każdym przecie. Przedstawiono również kilka sposobów uproszczenia podstawowego układu równań. Opracowaną metodę zilustrowano przykładem obliczeń powłoki walcowej typu «Unibat».

1. WSTĘP

Przedmiotem rozważań pracy są przestrzenne konstrukcje prętowe, których pryzmatyczne pręty wykonane są z materiałów jednorodnych, idealnie sprężystych. Cechą charakterystyczną rozpatrywanych konstrukcji jest usytuowanie wszystkich węzłów na dwóch powierzchniach: górnej $\bar{\pi}^+$ i dolnej $\bar{\pi}^-$ (rys. 1). Pręty, zwane łączni-



Rys. 1

kami, łączące węzły leżące na jednej z tych powierzchni tworzą kratownicę powierzchniową. Kratownice te połączone są krzyżulcami. Opisane tutaj konstrukcje prętowe, ze względu na ich powłokowy charakter pracy statycznej, nazywać będziemy powłokami strukturalnymi.

Zagadnienia statyki powłok strukturalnych były rozpatrywane w pracach R. PELY [14], Cz. WOŹNIAKA [18] oraz D. L. DEANA i C. P. UGARTEGO [2]. W pracach [14 i 18] przedstawiono analizę statyczną powłok strukturalnych, których siatki prętowe kratownic zewnętrznych są jednakowe i pokrywają się. Analizę tę przeprowadzono stosując model ciągły konstrukcji siatkowych, którego podstawy teoretyczne opracował Cz. WOŹNIAK [18 i 19]. Obliczenia walcowej powłoki strukturalnej przy zastosowaniu modelu dyskretnego przedstawiono w pracy [2].

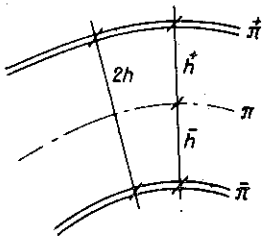
W niniejszej pracy zaproponowano metodę obliczania powłok strukturalnych, stanowiącą rozszerzenie metody przedstawionej w pracy [14], a pozwalającą na analizę statyczną powłok prętowych o nierównoległych siatkach kratownic zewnętrznych. Formułując związki omawianej teorii przyjęto, że siatki prętowe obu kratownic powierzchniowych są gęste i regularne, a obciążenie przyłożone w węzłach ustroju jest łagodnie zmienne w jego obszarze. Na tej podstawie dokonano analizy statycznej powłok strukturalnych, opierając się na modelu ciągłym dźwigarów siatkowych. Wykorzystując analogię powłok strukturalnych do powłok trójwarstwowych, przyjęto zgodnie z liniową teorią deformacji tych konstrukcji, przedstawioną m.in. w monografiach L. F. J. PLANTÉMY [16] i A. S. WOLMIRA [17], że kratownice zewnętrzne przenoszą jedynie napięcia membranowe a krzyżulce jedynie powłokowe siły poprzeczne. W trakcie rozważań założono przegubowe połączenia wszystkich prętów w węzłach. Uzasadnienie tego założenia znaleźć można w monografii W. GUTKOWSKIEGO [6].

Rozpatrywane ustroje traktowane są jako układy liniowo-sprężyste.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA I OZNACZENIA

W pracy stosowana jest konwencja sumacyjna względem powtarzających się wskaźników α, β, μ, ν przebiegających wskaźniki 1, 2. Wielkości odnoszące się do powierzchni π^+ lub π^- oznaczać będziemy odpowiednio znakiem plus lub minus.

W dalszych rozważaniach wprowadzimy pojęcie powierzchni podstawowej π zawartej pomiędzy powierzchniami π^+ i π^- . Odległość pomiędzy powierzchniami



Rys. 2

π^+ i π^- (grubość powłoki) oznaczymy przez $2h$, natomiast położenie powierzchni π względem π^+ i π^- określają wielkości h^+ i h^- (rys. 2). Stosunek h^+/h^- oznaczymy symbolem λ , co wobec $h^+ + h^- = 2h$ daje

$$(2.1) \quad h^+ = \frac{2h}{1+\lambda}, \quad h^- = \lambda \frac{2h}{1+\lambda}.$$

W przypadku ogólnym powierzchnię podstawową π parametryzować będziemy układem współrzędnych krzywoliniowych θ^α , oś θ^3 określa kierunek normalny do tej powierzchni (jeśli jednak siatka jednej z kratownic zewnętrznych jest siatką heksagonalną, to posługiwać się będziemy wyłącznie układem współrzędnych kartezjańskich [11]). Symbolem $(\)_{,\alpha}$ oznaczać będziemy pochodną kowariantną względem współrzędnej θ^α .

Niech powierzchnie π^+ i π^- mają zbliżone kształty. Oznaczając przez $a_{\alpha\beta}^+$, $b_{\alpha\beta}^+$, $a_{\alpha\beta}^-$ i $b_{\alpha\beta}^-$ składowe pierwszego i drugiego tensora podstawowego powierzchni π^+ i π^- zdefiniujemy odpowiednie wielkości średnie w sposób następujący:

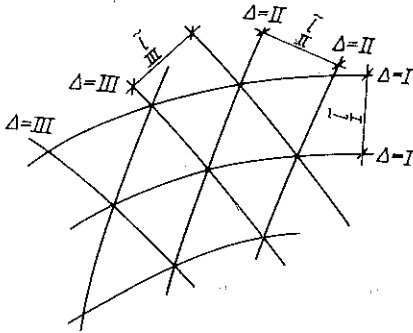
$$(2.2) \quad \begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \frac{1}{1+\lambda} (a_{\alpha\beta}^+ + \lambda a_{\alpha\beta}^-), \\ b_{\alpha\beta} &= \frac{1}{1+\lambda} (b_{\alpha\beta}^+ + \lambda b_{\alpha\beta}^-) \end{aligned}$$

i przyjmijmy, że odnoszą się one do powierzchni π . Wprowadzimy ponadto oznaczenia

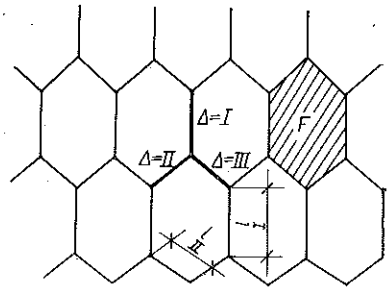
$$(2.3) \quad a = \det a_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} / \sqrt{a},$$

w których $\varepsilon_{\alpha\beta}$ jest symbolem Ricciego. W dalszych rozważaniach wielkości (2.3)₂ spełniać będą rolę dwuwektora Ricciego w odniesieniu do powierzchni podstawowej π .

W pracy rozpatrywać będziemy dwa typy siatek prętowych kratownic zewnętrznych. Typ pierwszy to siatka utworzona z ciągłych rodzin prętów, oznaczonych



Rys. 3



Rys. 4

symbolem Δ ($\Delta=I, II, III$) (rys. 3). Odległość pomiędzy łącznikami należącymi do jednej rodziny wynosi l . Pole przekroju poprzecznego łącznika Δ o długości l jest A . Gęstość rozkładu materiału w siatce tego typu określa funkcja

$$(2.4) \quad \mathcal{A} = \sum_{\Delta} \mathcal{A}_{\Delta} = \sum_{\Delta} \frac{A}{l}.$$

Drugi typ stanowią kratownice o siatce heksagonalnej (rys. 4). Oznaczając pole sześciokąta stanowiącego «oczko» siatki symbolem F mamy

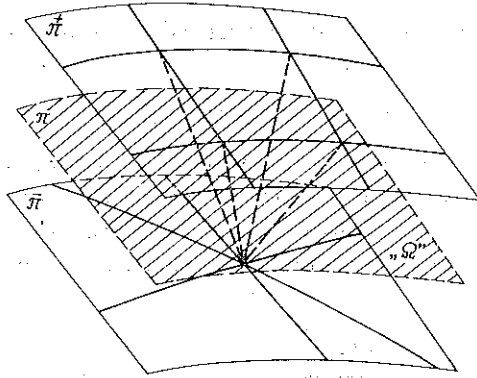
$$(2.5) \quad \mathcal{A} = \sum_{\Delta=I}^{III} \mathcal{A}_{\Delta} = \frac{1}{F} \sum_{\Delta=I}^{III} A l.$$

Podobnie postępujemy w odniesieniu do zespołu krzyżulców. Zbiegające się w jednym węźle kratownicy dolnej lub górnej krzyżulce nazwiemy wiązką. W odniesieniu

do każdej wiązki możemy na powierzchni podstawowej π wyodrębnić pewien obszar o polu powierzchni Ω (rys. 5). Rozkład gęstości materiału w zespole krzyżulców, na powierzchni π wyrazimy za pomocą funkcji

$$(2.6) \quad \mathcal{A} = \sum_A \mathcal{A}_A = \frac{1}{\Omega} \sum_A A l_A$$

przy czym wskaźnik A wyróżnia krzyżulce należące do jednej wiązki.



Rys. 5

Kierunki łączników A określamy za pomocą wielkości T^{α} , a kierunki krzyżulców A za pomocą T^{α} , T^{β} , będących składowymi wektorów kierunkowych.

3. STAN PRZEMIESZCZENIA I ODKSZTAŁCENIA

Wprowadźmy różniczkowalne funkcje

$$(3.1) \quad w_{\alpha}^{+}(\theta^{\alpha}), \quad w_{\alpha}^{-}(\theta^{\alpha}), \quad w_3^{+}(\theta^{\alpha}), \quad w_3^{-}(\theta^{\alpha}),$$

co do których przyjmujemy, że ich wartości w punktach węzłowych równe są przemieszczeniom tych elementów; pomiędzy tymi punktami funkcje te traktujemy jako liniowe. Na podstawie rozważań geometrycznych [18] liniowe odkształcenia jednostkowe łączników A wyrazimy w zależności od składowych (3.1) stanu przemieszczenia w następujący sposób:

$$(3.2) \quad e_A = T^{\alpha} T^{\beta} (w_{\beta|A} - b_{\beta\alpha} w_3).$$

W podobny sposób możemy przedstawić w zależności od funkcji (3.1) liniowe odkształcenia jednostkowe krzyżulców [3]

$$(3.3) \quad e_{AA} = T^{\alpha} T^{\beta} \left(\frac{\lambda w_{3|A} + w_{3|A}}{1 + \lambda} + \frac{w_{\alpha} - w_{\alpha}}{2h} + b_{\alpha}^{\beta} \frac{\lambda w_{\beta} + w_{\beta}}{1 + \lambda} \right).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= w_{\beta|\alpha} - b_{\beta\alpha} w_3, \\ \gamma_\alpha &= \frac{\lambda w_{3|\alpha} + w_{3|\alpha}}{1+\lambda} + \frac{w_\alpha - w_\alpha}{2h} + b_\alpha^\beta \frac{\lambda w_\beta + w_\beta}{1+\lambda}, \end{aligned}$$

związki (3.2) i (3.3) przepiszemy w postaci

$$(3.5) \quad e = \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} T^\alpha \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} T^\beta \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} \gamma_{\alpha\beta}, \quad e = \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} T^\alpha \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} T^\beta \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} \gamma_\alpha.$$

Wielkości $\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ i γ_α nazywać będziemy składowymi stanu odkształcenia.

W dalszych rozważaniach stosować będziemy następujące uśrednione składowe stanu przemieszczenia, odnoszące się do powierzchni π :

$$(3.6) \quad w = \frac{\lambda w_3 + w_3}{1+\lambda}, \quad v_\alpha = \frac{\lambda w_\alpha + w_\alpha}{1+\lambda}, \quad \varphi_\alpha = e_{\alpha\beta}^\beta \frac{w_\beta - w_\beta}{2h}.$$

Wielkości te określają przemieszczenia normalne, przemieszczenia styczne i kąty obrotu punktów powierzchni podstawowej. Stan odkształcenia odpowiadający stanowi przemieszczenia (3.6) definiujemy następująco [18]:

$$(3.7) \quad \gamma_{\alpha\beta} = v_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta} w, \quad \gamma_\alpha = w_{|\alpha} + b_\alpha^\beta v_\beta + e_{\alpha\beta}^\beta \varphi_\beta, \quad \kappa_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^\rho \varphi_{\rho|\alpha}.$$

Wykorzystując wzory (3.6) znajdujemy po przekształceniach zależności pomiędzy składowymi stanu odkształcenia (3.4) i przemieszczenia (3.7):

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= -\frac{2h}{1+\lambda} \kappa_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \lambda \frac{2h}{1+\lambda} \kappa_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Przy ustaleniu tych zależności pominięto wyrażenie $(w_3 - w_3)/2h$ jako w przybliżeniu równe zeru.

4. ZWIĄZKI FIZYCZNE. STAN NAPIĘCIA

Pod wpływem obciążenia konstrukcji w jej prętach pojawią się siły podłużne

$$(4.1) \quad P = E \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} A \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} e, \quad P = E A \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} e.$$

Postępując w sposób przedstawiony w pracach [11, 18 i 19] napiszemy teraz wzory określające potencjał sprężysty σ odpowiadający siłom P , P i P . W tym celu wprowadzimy tensory sztywności sprężystej o składowych

$$(4.2) \quad A^{\alpha\beta\mu\nu} = \sum_{\Delta} \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} T^\alpha \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} T^\beta \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} T^\mu \begin{matrix} +(-) \\ \Delta \end{matrix} T^\nu E \mathcal{A},$$

charakteryzujących własności mechaniczne zewnętrznych kratownic powierzchniowych oraz tensor sztywności sprężystej o składowych

$$(4.3) \quad G^{\alpha\beta} = \sum_A T^{\alpha}_{\Delta} T^3_{\Delta} T^{\beta}_{\Delta} T^3_{\Delta} E_{\Delta} \mathcal{A}_{\Delta},$$

charakteryzujący własności mechaniczne zespołu krzyżulców [3]. Uwzględniając powyższe wielkości, wzór na σ możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(4.4) \quad \sigma = \frac{1}{2} \sum_{\Delta} \frac{1}{I_{\Delta}} P^+ e_{\Delta\Delta} + \frac{1}{2} \sum_{\Delta} \frac{1}{I_{\Delta}} P^- e_{\Delta\Delta} + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\Delta} P e_{\Delta\Delta} l = \\ = \frac{1}{2} A^{+\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta}^+ \gamma_{\mu\nu}^+ + \frac{1}{2} A^{-\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta}^- \gamma_{\mu\nu}^- + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}.$$

Stan napięcia ustroju określać będziemy za pomocą tensorów o składowych $P^{+\alpha\beta}$, $P^{-\alpha\beta}$ i P^{α} wyznaczających odpowiednio napięcia membranowe występujące w kratownicach zewnętrznych i napięcia tnące, normalne do powierzchni π występujące w zespole krzyżulców. Wielkości te obliczamy według wzorów

$$(4.5) \quad P^{+\alpha\beta} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{\alpha\beta}^+} = A^{+\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}^+, \\ P^{\alpha} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{\alpha}} = G^{\alpha\beta} \gamma_{\beta},$$

będących związkami fizycznymi powłoki. Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące zależności:

$$P^{+\alpha\beta} = \sum_{\Delta} T^{\alpha}_{\Delta} T^{\beta}_{\Delta} \frac{P_{\Delta}}{I_{\Delta}^{+(-)}} \quad \text{lub} \quad P^{+\alpha\beta} = \frac{1}{F} \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} T^{\alpha}_{\Delta} T^{\beta}_{\Delta} P_{\Delta} l_{\Delta}^{+(-)}, \\ P^{\alpha} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\Delta} T^{\alpha}_{\Delta} T^3_{\Delta} P_{\Delta} l_{\Delta}.$$

ilustrującą interpretację fizyczną składowych stanu napięcia.

Napięcia (4.5) występujące w kratownicach zewnętrznych i w zespole krzyżulców wywołują w przypadku ogólnym stany zgięciowe i błonowe w powłoce strukturalnej. W celu wyspecjalizowania tych stanów przekształcimy wzór (4.4) podstawiając do niego funkcje (3.8). Po wprowadzeniu nowych oznaczeń tensorowych

$$(4.6) \quad B^{\alpha\beta\mu\nu} = A^{+\alpha\beta\mu\nu} + A^{-\alpha\beta\mu\nu}, \\ C^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{2h}{1+\lambda} (-A^{+\alpha\beta\mu\nu} + \lambda A^{-\alpha\beta\mu\nu}), \\ D^{\alpha\beta\mu\nu} = \left(\frac{2h}{1+\lambda} \right)^2 (A^{+\alpha\beta\mu\nu} + \lambda^2 A^{-\alpha\beta\mu\nu})$$

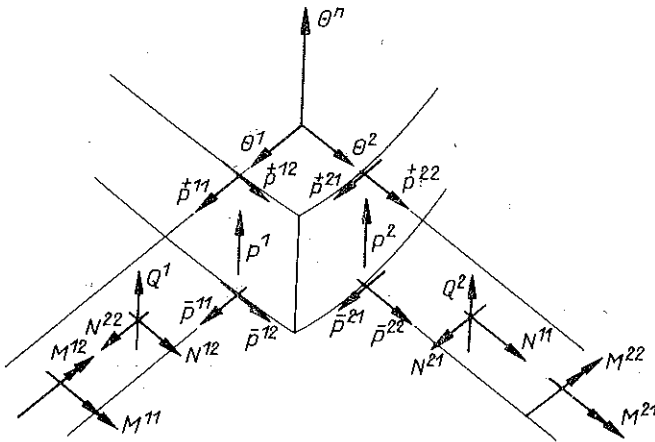
wyrażenie na σ przepisujemy w następującej postaci:

$$(4.7) \quad \sigma = \frac{1}{2} B^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu\nu} + C^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\mu\nu} + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}.$$

Możemy teraz określić powłokowe siły wewnętrzne za pomocą następujących wzorów:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} Q^{\alpha} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{\alpha}} = G^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}, \\ N^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} = B^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + C^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu}, \\ M^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \kappa_{\mu\nu}} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + D^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Zależności powyższe, będące związkami fizycznymi powłok strukturalnych, są uogólnieniem odpowiednich zależności wyprowadzonych w pracy [14]. Związki fizyczne (4.8) określają siły poprzeczne Q^{α} , siły normalne i siły ścinające $N^{\alpha\beta}$ oraz



Rys. 6

momenty zginające i skręcające $M^{\alpha\beta}$ występujące w powłoce strukturalnej (rys. 6). Siły te są analogiczne do występujących w powłoce anizotropowej [5]. Z kolei zależności pomiędzy składowymi stanu napięcia $p^{\alpha\beta}$, $\bar{p}^{\alpha\beta}$ i p^{α} a siłami wewnętrznymi Q^{α} , $N^{\alpha\beta}$ i $M^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} Q^{\alpha} &= p^{\alpha}, \\ N^{\alpha\beta} &= \bar{p}^{\alpha\beta} + p^{\alpha\beta}, \\ M^{\alpha\beta} &= \frac{2h}{1+\lambda} (-\bar{p}^{\alpha\beta} + \lambda p^{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

mają tę samą postać co w przypadku powłok sandwichowych [16].

5. RÓWNANIA RÓWNOWAGI I WARUNKI BRZEGOWE

Jak już wspomniano obciążenie powłoki strukturalnej stanowią siły skupione, przyłożone w węzłach ustroju. Oznaczmy intensywności tych sił przez

$$(5.1) \quad f^\alpha = \frac{1}{2} (f^{\alpha+} + f^{\alpha-}), \quad f^3 = \frac{1}{2} (f^{3+} + f^{3-}), \quad m^\alpha = \frac{2h}{1+h} (-f^{\alpha+} + \lambda f^{\alpha-}).$$

Pod działaniem tych obciążeń oraz sił Q^α , $N^{\alpha\beta}$ i $M^{\alpha\beta}$ powłoka znajduje się w równowadze. Równania równowagi prętowych ustrojów powłokowych, wyprowadzone w pracach [8 i 18], możemy przepisać w postaci

$$(5.2) \quad \begin{aligned} Q^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + f^3 &= 0, \\ N^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\alpha^\beta Q^\alpha + f^\beta &= 0, \\ e_{\alpha\beta} (N^{\alpha\beta} - b_\mu^\alpha M^{\mu\beta}) &= 0, \\ M^{\alpha\beta}|_\alpha - Q^\beta + m^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Powyższe równania mają postać analogiczną do otrzymanych w ramach teorii niepolarniej powłok prętowych [18], a także w ramach klasycznej teorii powłok [5, 17]. Analizę tej analogii przeprowadzono w pracach [12 i 14].

Wykorzystując w równaniach (5.2) związki fizyczne (4.8), otrzymujemy te równania w odkształceniach:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} (G^{\alpha\beta} \gamma_\beta)|_\alpha + b_{\alpha\beta} (B^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + C^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu}) + f^3 &= 0, \\ (B^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + C^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu})|_\alpha - b_\alpha^\beta G^{\alpha\mu} \gamma_\mu + f^\beta &= 0, \\ (C^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + D^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu})|_\alpha - G^{\beta\mu} \gamma_\mu + m^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Przy przekształceniach układu (5.2) pominięto algebraiczne równanie równowagi (5.2)₃ zakładając, że jest ono spełnione z dostateczną dokładnością [18].

Powyższy układ równań równowagi możemy wyrazić w przemieszczeniach wykorzystując związki geometryczne (3.7). Po wykonaniu przekształceń znajdziemy

$$(5.4) \quad \begin{aligned} [G^{\alpha\beta} (w|_\beta + b_\beta^\mu v_\mu + e_\beta^\mu \varphi_\mu)]|_\alpha + b_{\alpha\beta} [B^{\alpha\beta\mu\nu} (v_{\nu|\mu} - b_{\mu\nu} w) + C^{\alpha\beta\mu\nu} e_{\nu}^\rho \varphi_\rho|_\mu] + f^3 &= 0, \\ [B^{\alpha\beta\mu\nu} (v_{\nu|\mu} - b_{\mu\nu} w) + C^{\alpha\beta\mu\nu} e_{\nu}^\rho \varphi_\rho|_\mu]|_\alpha - b_\alpha^\beta G^{\alpha\mu} (w|_\mu + b_\mu^\nu v_\nu + e_\mu^\nu \varphi_\nu) + f^\beta &= 0, \\ [C^{\alpha\beta\mu\nu} (v_{\nu|\mu} - b_{\mu\nu} w) + D^{\alpha\beta\mu\nu} e_{\nu}^\rho \varphi_\rho|_\mu]|_\alpha - G^{\beta\mu} (w|_\mu + b_\mu^\nu v_\nu + e_\mu^\nu \varphi_\nu) + m^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymany układ pięciu równań różniczkowych jest układem dziesiątego rzędu, w którym niewiadomymi są składowe stanu przemieszczenia w , v_α i φ_α . Przystępując do rozwiązania tego układu równań musimy określić pięć warunków brzegowych.

Rozpatrzmy brzeg Γ powłoki strukturalnej, którego położenie określają wektory jednostkowe: normalny i styczny o składowych odpowiednio n_α i t_α .

W przypadku gdy sposób podparcia brzegu określają równości

$$w_3^+ = w_3^- = w_\alpha^+ = w_\alpha^- = 0,$$

na podstawie (3.6) znajdziemy warunki brzegowe dla układu (5.4):

$$(5.5) \quad w = 0, \quad v_\alpha = 0, \quad \varphi_\alpha = 0.$$

Taki sposób podparcia nazywamy sztywnym zamocowaniem brzegu. Natomiast w przypadku brzegu swobodnego powinny być spełnione następujące warunki:

$$p^{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} = {}^+f, \quad p^{\alpha\beta} n_{\alpha} t_{\beta} = {}^+f, \quad p^{\alpha} n_{\alpha} = {}^+f,$$

gdzie ${}^+f$, ${}^-f$, ${}^+f$, ${}^-f$ i ${}^+f$ są odpowiednimi intensywnościami normalnych, stycznych i poprzecznych obciążeń brzegowych. Uwzględniając wzory (4.5) i (3.7) otrzymujemy warunki brzegowe w następującej postaci:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} A^{\alpha\beta\mu\nu} \left(-\frac{2h}{1+\lambda} e_{\nu}^{\rho} \varphi_{\rho|\mu} + v_{\nu|\mu} - b_{\nu\mu} w \right) n_{\alpha} n_{\beta} &= {}^+f, \\ A^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\lambda \frac{2h}{1+\lambda} e_{\nu}^{\rho} \varphi_{\rho|\mu} + v_{\nu|\mu} - b_{\nu\mu} w \right) n_{\alpha} n_{\beta} &= {}^-f, \\ A^{\alpha\beta\mu\nu} \left(-\frac{2h}{1+\lambda} e_{\nu}^{\rho} \varphi_{\rho|\mu} + v_{\nu|\mu} - b_{\nu\mu} w \right) n_{\alpha} t_{\beta} &= {}^+f, \\ A^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\lambda \frac{2h}{1+\lambda} e_{\nu}^{\rho} \varphi_{\rho|\mu} + v_{\nu|\mu} - b_{\nu\mu} w \right) n_{\alpha} t_{\beta} &= {}^-f, \\ G^{\alpha\beta} (w_{|\beta} + b_{\beta}^{\mu} v_{\mu} + e_{\beta}^{\mu} \varphi_{\mu}) n_{\alpha} &= {}^+f. \end{aligned}$$

Kombinacje warunków (5.5) i (5.6) wraz z równaniami równowagi (5.4) formułują zagadnienie brzegowe w odniesieniu do różnych odmian podparcia brzegu powłoki.

6. SIŁY W PRĘTACH

W wyniku rozwiązania zagadnienia brzegowego sformułowanego w punkcie 5 otrzymujemy składowe stanu przemieszczenia w ; v_{α} i φ_{α} . Wstawiając te wielkości do wzorów

$$(6.1) \quad \begin{aligned} P &= EA T^{\alpha} T^{\beta} \left(-\frac{2h}{1+\lambda} e_{\beta}^{\mu} \varphi_{\mu|\alpha} + v_{\beta|\alpha} - b_{\beta\alpha} w \right), \\ P &= EA T^{\alpha} T^{\beta} \left(\lambda \frac{2h}{1+\lambda} e_{\beta}^{\mu} \varphi_{\mu|\alpha} + v_{\beta|\alpha} - b_{\beta\alpha} w \right), \\ P &= A T^{\alpha} T^{\beta} (w_{|\alpha} + b_{\alpha}^{\beta} v_{\beta} + e_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\beta}), \end{aligned}$$

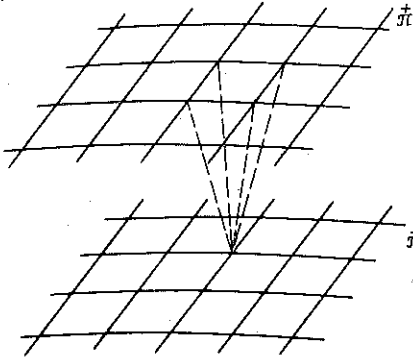
które otrzymano podstawiając do (4.1) wzory (3.5), (3.8) i (3.7), znajdujemy siły podłużne w łącznikach i krzyżulcach powłoki strukturalnej.

7. RÓWNANIA UPROSZCZONE

W dalszym ciągu rozważań przeanalizujemy kilka typów uproszczonych równań statyki powłok strukturalnych, wynikających z układu równań (3.7), (4.8) i (5.2) lub z wyrażonych w przemieszczeniach równań równowagi (5.4). Uproszczenia te mogą być spowodowane rodzajem struktury prętowej powłoki; nie mają wtedy

charakteru przybliżonego. Mogą także wynikać z przybliżonego uproszczenia związków fizycznych (4.8) lub geometrycznych (3.7).

Mianowicie, w przypadku gdy siatki prętowe kratownic zewnętrznych są równoległe (rys. 7), to $\overset{+}{T}^\alpha = \overset{-}{T}^\alpha$, a ponadto gęstości $E\overset{+}{\mathcal{A}}$ i $E\overset{-}{\mathcal{A}}$ są proporcjonalne; wtedy można



Rys. 7

tak dobrać parametr λ , aby spełniona była równość

$$(7.1) \quad \overset{+}{A}^{\alpha\beta\mu\nu} = \lambda \overset{-}{A}^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

W tym przypadku położenie powierzchni podstawowej π , określone równaniami (2.1), powoduje znikanie tensora:

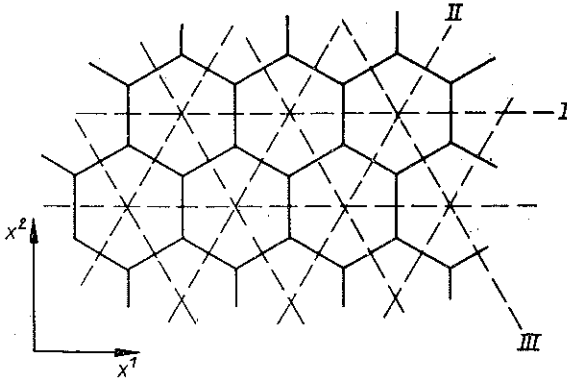
$$(7.2) \quad C^{\alpha\beta\mu\nu} = 0.$$

Dzięki temu związki fizyczne (4.8)_{2,3} upraszczają się do postaci

$$(7.3) \quad N^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}, \quad M^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu}.$$

Odpowiednią postać równań równowagi (5.4) otrzymujemy, pomijając wyrazy występujące razem z wielkościami $C^{\alpha\beta\mu\nu}$.

Postać (7.3) związków fizycznych otrzymamy także zakładając, pomimo niespełnienia równości (7.1), spełnienie z wystarczającą dokładnością równości (7.2). Założenie to możemy stosować, gdy kierunki anizotropii kratownic zewnętrznych



Rys. 8

pokrywają się, mimo różnego typu tych kratownic (ma to miejsce np. w odniesieniu do konstrukcji pokazanej na rys. 8). W tym przypadku parametr λ możemy określać według wzoru

$$(7.4) \quad \lambda = \frac{\sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu}^+ A^{\alpha\beta\mu\nu}}{\sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu}^- A^{\alpha\beta\mu\nu}}.$$

Z kolei wyprowadzimy równania asymptotyczne. Analizując budowę tensorów sztywności sprężystej $G^{\alpha\beta}$, $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ i $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ stwierdzamy, że można w nich wyróżnić pewne małe parametry. W przypadku tensora $G^{\alpha\beta}$ jest to wielkość $r = \sqrt{\Omega}$, a w przypadku tensorów $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ i $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ jest to połowa grubości powłoki h . Wprowadzając oznaczenia

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \hat{G}^{\alpha\beta} &= \sum_A T^{\alpha} T^{\beta} T^{\gamma} T^{\delta} E I A, \\ \hat{C}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{2}{1+\lambda} (-A^{+\alpha\beta\mu\nu} + \lambda A^{-\alpha\beta\mu\nu}), \\ \hat{D}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \left(\frac{2}{1+\lambda} \right)^2 (A^{+\alpha\beta\mu\nu} + \lambda^2 A^{-\alpha\beta\mu\nu}), \end{aligned}$$

po uwzględnieniu (4.3) i (4.6), otrzymamy

$$(7.6) \quad G^{\alpha\beta} = r^{-2} \hat{G}^{\alpha\beta}, \quad C^{\alpha\beta\mu\nu} = h \hat{C}^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad D^{\alpha\beta\mu\nu} = h^2 \hat{D}^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Zgodnie z założeniami dotyczącymi budowy omawianych konstrukcji prętowych, parametry r i h są niewielkie w porównaniu z wymiarami konstrukcji. Aby otrzymać równania asymptotyczne obliczymy odpowiednie granice, gdy małe parametry r lub h dążą do zera.

Gdy w pierwszej kolejności $r \rightarrow 0$, co interpretujemy jako nieskończenie duże zagęszczenie krzyżulców, stwierdzimy po uwzględnieniu (7.6), że $G^{\alpha\beta} \rightarrow \infty$; skąd na podstawie związku fizycznego (4.8)₁ znajdujemy $\gamma_{\alpha} = 0$. Założenie to jest analogiczne do hipotezy Kirchhoffa o prostych normalnych, stosowanej w klasycznej teorii powłok. Związki geometryczne (3.7) możemy przepisać teraz w postaci

$$(7.7) \quad e_{\rho}^{\alpha} (w_{|\alpha} + b_{\alpha}^{\beta} v_{\beta}) = \varphi_{\rho}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = v_{\beta|\alpha} - b_{\beta\alpha} w, \quad \kappa_{\alpha\beta} = (w_{|\beta} + b_{\beta}^{\nu} v_{\nu})_{|\alpha}.$$

W tym przypadku ze związków fizycznych (4.8) odpada pierwszy, natomiast równania równowagi (5.2) pozostają bez zmian. Wykorzystując wzór (7.7)₁ i dokonując przekształceń układu (5.2), otrzymujemy układ równań równowagi w przemieszczeniach:

$$(7.8) \quad \begin{aligned} [C^{\alpha\beta\mu\nu} (v_{v|\mu} - b_{v\mu} w) + D^{\alpha\beta\mu\nu} (w_{|v} + b_v^{\rho} v_{\rho})_{|\mu}]_{|\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} [B^{\alpha\beta\mu\nu} (v_{v|\mu} - b_{v\mu} w) + \\ + C^{\alpha\beta\mu\nu} (w_{|v} + b_v^{\rho} v_{\rho})_{|\mu}] + f^{\beta} = 0, \\ [B^{\alpha\beta\mu\nu} (v_{v|\mu} - b_{v\mu} w) + C^{\alpha\beta\mu\nu} (w_{|v} + b_v^{\rho} v_{\rho})_{|\mu}]_{|\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} [C^{\alpha\pi\mu\nu} (v_{v|\mu} - b_{v\mu} w) + \\ + D^{\alpha\pi\mu\nu} (w_{|v} + b_v^{\rho} v_{\rho})_{|\mu}]_{|\alpha} + f^{\beta} = 0, \end{aligned}$$

przy czym

$$(7.9) \quad Q^{\beta} = M^{\alpha\beta}_{|\alpha} = [C^{\alpha\beta\mu\nu} (v_{v|\mu} - b_{v\mu} w) + D^{\alpha\beta\mu\nu} (w_{|v} + b_v^{\rho} v_{\rho})_{|\mu}]_{|\alpha}.$$

Jest to układ trzech równań różniczkowych cząstkowych ósmego rzędu, w którym niezależnymi niewiadomymi są składowe stanu przemieszczenia w , v_{α} . Przy rozwiązywaniu odpowiedniego zagadnienia brzegowego należy określić cztery warunki brzegowe.

Zakładając następnie $h \rightarrow 0$, co interpretujemy jako zerową grubość powłoki, ze wzorów (7.6) znajdujemy

$$(7.10) \quad C^{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \quad D^{\alpha\beta\mu\nu} = 0.$$

Uwzględniając ponadto równość $T^3 l = 2h = 0$ we wzorze (4.3), znajdziemy

$$(7.11) \quad G^{\alpha\beta} = 0.$$

Podstawiając następnie wyrażenia (7.10) i (7.11) do związków fizycznych (4.8), otrzymujemy

$$(7.12) \quad Q^\alpha = 0, \quad M^{\alpha\beta} = 0, \quad N^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\nu\gamma} \gamma_{\nu\gamma}.$$

Równania równowagi (5.2) redukują się w tym przypadku do postaci

$$(7.13) \quad \begin{aligned} b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + f^3 &= 0, \\ N^{\alpha\beta} |_\alpha + f^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Równania te dotyczą również konstrukcji prętowych zwanych kratownicami powierzchniowymi [15], a także wykazują formalne podobieństwo do równań błonowej teorii powłok.

Przedstawione powyżej metody uproszczenia podstawowego układu równań powłok strukturalnych są wynikiem przyjęcia pewnych założeń odnośnie struktury konstrukcji prętowej. Otrzymane w ten sposób równania mogą być stosowane do analizy statycznej powłoki strukturalnej tylko w dostatecznym oddaleniu od linii zaburzeń stanu naprężenia [5 i 18]. W pobliżu tych linii otrzymane na podstawie równań przybliżonych rozwiązania należy uzupełnić rozwiązaniami wynikającymi z efektu brzegowego. Zagadnienie to w odniesieniu do powłok prętowych zostało omówione w pracy [9].

W wielu praktycznie ważnych przypadkach powłok możemy zastosować inny sposób uproszczenia układu równań równowagi (5.3). Dotyczy on powłok mało wymiosłych i polega na przyjęciu związków geometrycznych w zredukowanej postaci [10]:

$$(7.14) \quad \gamma_{\alpha\beta} = v_{\beta|\alpha}, \quad \gamma_\alpha = w_{|\alpha} + e_{\alpha}^{\beta} \varphi_\beta, \quad \kappa_{\alpha\beta} = e_{\alpha,\beta}^{\rho} \varphi_\rho |_\alpha.$$

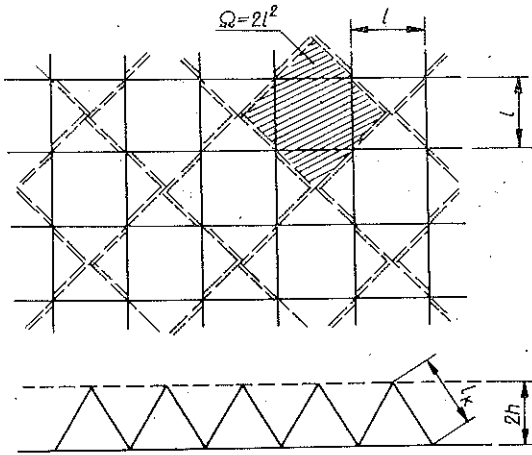
Odpowiednią postać równań równowagi wyrażonych w przemieszczeniach otrzymujemy podstawiając te związki do (5.3). Przyjmując ponadto $b_{\alpha\beta} = 0$, otrzymujemy zależności dotyczące ustrojów płaskich, tj. płyt i tarcz strukturalnych.

Na zakończenie należy zauważyć, że wszystkie równania służące do analizy statycznej powłok strukturalnych ulegają znacznym uproszczeniom, gdy konstrukcje te mają jednakowe własności mechaniczne w całym obszarze. W tym przypadku składowe tensorów sztywności sprężystej $G^{\alpha\beta}$, $B^{\alpha\beta\nu\gamma}$, $C^{\alpha\beta\nu\gamma}$ i $D^{\alpha\beta\nu\gamma}$ mają stałe wartości i mogą być wyłączone przed operację różniczkowania.

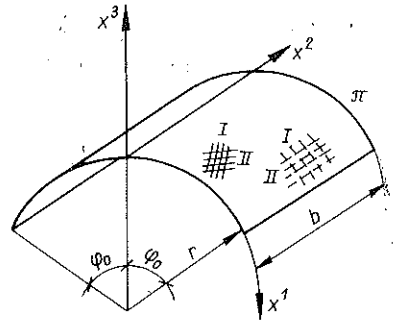
8. WNIOSKI KOŃCOWE. PRZYKŁAD

Przedstawiona w tej pracy analiza statyczna powłok strukturalnych prowadzi w wyniku zastosowania modelu ciągłego do układu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Trudności rachunkowe występujące podczas rozwiązywania tego układu są tego samego stopnia co w klasycznej teorii powłok anizotropowych.

Istotę zaproponowanej metody stanowi sposób obliczania składowych tensorów sztywności sprężystej. W celu ilustracji zastosowania wyprowadzonych w pracy wzorów sformułujemy zagadnienie brzegowe w pewnym przypadku szczególnym powłok strukturalnych. Mianowicie rozpatrzmy powłokę typu «Unibat» (rys. 9)



Rys. 9



Rys. 10

utworzoną z prętów o jednakowych przekrojach $A^+ = A^- = A^+ = A^- = A$ i o długościach $l^+ = l^- = l/\sqrt{2}$ i $l^+ = l^- = l$. Powłoka zamknięta sztywnymi przeponami podparta jest przegubowo wzdłuż wszystkich brzegów. Na powierzchni podstawowej (środkowej) π (rys. 10) tej powłoki wprowadzimy ortogonalny układ współrzędnych x^α . Składowe wektorów kierunkowych $T^{\alpha+}, T^{\alpha-}$ łączników siatek zewnętrznych mają następujące wartości:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} T^1_+ &= -T^2_+ = T^1_- = T^2_- = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ T^1_- &= T^2_- = 1, \quad T^2_+ = T^1_+ = 0, \end{aligned}$$

skąd wobec (4.2) znajdujemy

$$(8.2) \quad \begin{aligned} A^{1111}_+ &= A^{2222}_+ = \frac{E}{2l}, & A^{1111}_- &= A^{2222}_- = \frac{EA}{\sqrt{2}l}, \\ A^{1122}_+ &= A^{2211}_+ = A^{1212}_+ = A^{2121}_+ = A^{1221}_+ = A^{2112}_+ &= \frac{EA}{2l}; \end{aligned}$$

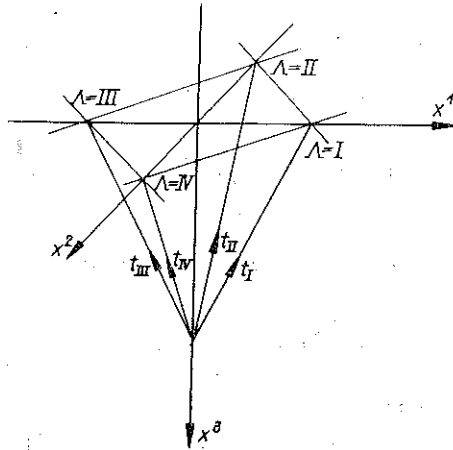
pozostałe składowe są równe zeru. Następnie na podstawie wzorów (4.6) przy $\lambda = 1$ znajdujemy

$$(8.3) \quad \begin{aligned} B^{1111} &= B^{2222} = \hat{B} = \frac{EA}{l} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ B^{1122} &= B^{2211} = B^{1212} = B^{2121} = B^{1221} = B^{2112} = B = \frac{EA}{2l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8,3) \quad & C^{1111} = C^{2222} = \check{C} = h \frac{EA}{l} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\
 & C^{1122} = C^{2211} = C^{1212} = C^{2121} = C^{1221} = C^{2112} = C = -h \frac{EA}{2l}, \\
 & D^{1111} = D^{2222} = \check{D} = h^2 \frac{EA}{l} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\
 & D^{1122} = D^{2211} = D^{1212} = D^{2121} = D^{1221} = D^{2112} = D = h^2 \frac{EA}{2l}.
 \end{aligned}$$

Numerując w sposób pokazany na rys. 11 krzyżulce należące do jednej wiązki, znajdziemy następujące wartości składowych wektorów kierunkowych:

$$\begin{aligned}
 (8.4) \quad & T^1_{\text{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T^2_{\text{I}} = 0, \quad T^3_{\text{I}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 & T^1_{\text{II}} = 0, \quad T^2_{\text{II}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad T^3_{\text{II}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 & T^1_{\text{III}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad T^2_{\text{III}} = 0, \quad T^3_{\text{III}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 & T^1_{\text{IV}} = 0, \quad T^2_{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T^3_{\text{IV}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$



Rys. 11

Podstawiając powyższe wartości do (4.3) i uwzględniając równość $\Omega = 2l^2$, otrzymujemy

$$(8.5) \quad G^{11} = G^{22} = G = \frac{EA}{4l}, \quad G^{12} = G^{21} = 0.$$

W przyjętym układzie współrzędnych składowe drugiego tensora podstawowego powierzchni walcowej wynoszą

$$(8.6) \quad b_{11} = b_1^1 = -r^{-1}, \quad b_{22} = b_2^2 = 0,$$

a składowe dwuwektora Ricciego mają wartości

$$(8.7) \quad e^1_{,2} = -e^2_{,1} = 1, \quad e^1_{,1} = e^2_{,2} = 0.$$

Podstawiając wyrażenia (8.6) i (8.7) do równań równowagi (5.4) i uwzględniając (8.3) i (8.5), znajdujemy po przekształceniach

$$(8.8) \quad \begin{aligned} &G(w_{,11} + w_{,22} - r^{-1}v_{1,1} - \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) + \\ &\quad + r^{-1}[\mathring{B}(v_{1,1} + r^{-1}w) + Bv_{2,2} - \mathring{C}\varphi_{2,1} + C\varphi_{1,2}] + f^3 = 0, \\ &\mathring{B}(v_{1,1} + r^{-1}w)_{,1} + B(v_{1,2} + 2v_{2,1})_{,2} - \mathring{C}\varphi_{2,11} + \\ &\quad + C(2\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})_{,2} + r^{-1}G(w_{,1} - r^{-1}v_1 + \varphi_2) + f^1 = 0, \\ &\mathring{B}v_{2,22} + B(2v_{1,2} + v_{2,1})_{,1} + \mathring{C}\varphi_{1,22} + C(\varphi_{1,1} - 2\varphi_{2,2})_{,1} + f^2 = 0, \\ &\mathring{C}(v_{1,1} + r^{-1}w)_{,1} + C(v_{1,2} + 2v_{2,1})_{,2} - \mathring{D}\varphi_{2,11} + \\ &\quad + D(2\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})_{,2} - G(w_{,1} - r^{-1}v_1 + \varphi_2) + m^1 = 0, \\ &\mathring{C}v_{2,22} + C(2v_{1,2} + v_{2,1})_{,1} + \mathring{D}\varphi_{1,22} + D(\varphi_{1,1} + 2\varphi_{2,2})_{,1} - G(w_{,2} - \varphi_1) + m^2 = 0. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe wynikające ze swobodnego podparcia ustroju mają postać na krawędziach $x^1 = r\varphi_0$ i $x^1 = -r\varphi_0$

$$(8.9) \quad \begin{aligned} &w = 0, \quad v_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \\ &N^{11} = \mathring{B}(v_{1,1} + r^{-1}w) + Bv_{2,2} - \mathring{C}\varphi_{2,1} + C\varphi_{1,2} = 0, \\ &M^{11} = \mathring{C}(v_{1,1} + r^{-1}w) + Cv_{2,2} - \mathring{D}\varphi_{2,1} + D\varphi_{1,2} = 0, \end{aligned}$$

czyli

$$v_{1,1} = 0, \quad \varphi_{2,1} = 0;$$

na krawędziach $x^2 = 0$ i $x^2 = b$

$$(8.10) \quad \begin{aligned} &w = 0, \quad v_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \\ &N^{22} = \mathring{B}v_{2,2} + B(v_{1,1} + e^{-1}w) + \mathring{C}\varphi_{1,2} - C\varphi_{2,1} = 0, \\ &M^{22} = \mathring{C}v_{2,2} + C(v_{1,1} + r^{-1}w) + \mathring{D}\varphi_{1,2} - D\varphi_{2,1} = 0, \end{aligned}$$

czyli

$$v_{2,2} = 0, \quad \varphi_{1,2} = 0.$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia brzegowego można otrzymać przyjmując niewiadome funkcje w , v_α i φ_α w postaci podwójnych szeregów trygonometrycznych

$$(8.11) \quad \begin{aligned} w &= \sum_{m,n} w_{mn} \sin \alpha_m (r\varphi_0 - x^1) \sin \beta_n x^2, \\ v_1 &= \sum_{m,n} A_{mn} \cos \alpha_m (r\varphi_0 - x^1) \sin \beta_n x^2, \\ v_2 &= \sum_{m,n} B_{mn} \sin \alpha_m (r\varphi_0 - x^1) \cos \beta_n x^2, \end{aligned}$$

(8.11)
[cd.]

$$\varphi_1 = \sum_{m,n}^{\infty} C_{mn} \sin \alpha_m (r\varphi_0 - x^1) \cos \beta_n x^2,$$

$$\varphi_2 = \sum_{m,n}^{\infty} D_{mn} \cos \alpha_m (r\varphi_0 - x^1) \sin \beta_n x^2,$$

gdzie

$$\alpha_m = m\pi/2r\varphi_0, \quad \beta_n = n\pi/b.$$

Po wyznaczeniu na podstawie równań (8.8) współczynników rozwinięcia w_{mn} , A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} i D_{mn} i podstawieniu ich do (8.11) otrzymujemy składowe stanu deformacji w , v_α i φ_α . Siły w prętach ustroju znajdziemy wstawiając te wielkości do wzorów (6.1).

Z kolei zajmijmy się powłoką o siatce górnej utworzonej z sześciokątów i siatce dolnej z trójkątów (rys. 8). Obie siatki zewnętrzne powłoki mają charakter izotropowy, skorzystamy zatem z równań uproszczonych wynikających z przyjęcia równości (7.2). W tym przypadku parametr λ określimy według wzoru (7.4). Oznaczmy przez l , l i A , A jednakowe długości l pola przekrojów prętów siatki górnej i dolnej.

Przyjmując układ osi jak na rys. 12, składowe tensorów $A^{+\alpha\beta\mu\nu}$ i $A^{-\alpha\beta\mu\nu}$ mają następujące wartości:

$$A^{+1111} = A^{+2222} = \frac{9}{8} \frac{A l}{F},$$

$$A^{+1122} = A^{+1212} = A^{+2121} = A^{+2211} = A^{+1221} = A^{+2112} = \frac{3}{8} \frac{A l}{F},$$

$$A^{-1111} = A^{-2222} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{9}{8} \frac{A}{l},$$

$$A^{-1122} = A^{-1212} = A^{-2121} = A^{-2211} = A^{-1221} = A^{-2112} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{3}{8} \frac{A}{l},$$

a stąd wobec (7.4) znajdziemy

$$\lambda = \frac{A l}{F} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{A}.$$

Teraz na podstawie wzorów możemy określić wielkości $B^{\alpha\beta\mu\nu}$ i $D^{\alpha\beta\mu\nu}$. Dalszy tok postępowania przy formułowaniu zagadnienia brzegowego jest analogiczny do przedstawionego powyżej.

Przedstawiona w tej pracy metoda posiada wady i zalety podobne do tych, jakie charakteryzują wszystkie metody oparte na stosowaniu modelu ciągłego ustrojów dyskretnych. Między innymi wadą jest jej ograniczony zakres stosowalności do przypadków ustrojów o gęstych i regularnych siatkach. Natomiast do podstawowych zalet tej metody należy zaliczyć możliwość dokonywania analizy sił w prętach powłoki strukturalnej w stosunkowo prosty sposób. Ponadto umożliwia ona analizę jakościową konstrukcji i dzięki temu może być wykorzystywana do optymalizacji powłok strukturalnych [4].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. O. BUTNER, H. STENKER, *Metalleichtbauten*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1971.
2. D. L. DEAN, C. P. UGARTE, *Design formulas for latticed cylindrical shells*, Symp. of Industrialized Spatial and Shell Structures, Kielce 1973.
3. J. GIERLIŃSKI, *Przybliżone obliczanie płaskich prętowych przekryć strukturalnych*, Mech. Teoret. i Stos., **13**, 1, 1975.
4. J. GIERLIŃSKI, *Optimal design of lattice shells for maximum stiffness*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **22**, 12, 1974.
5. A. L. GOLDENWEIZER, *Teoria uprugich tonkich oboloczek*, Gostjechizdat 1953.
6. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
7. J. HOLNICKI-SZULC, *Optymalne zwieranie powierzchniowych ustrojów strukturalnych*, Rozpr. Inż., **22**, 4, 1974.
8. M. KLEIBER, CZ. WOŹNIAK, *On equations of the linear theory of elastic lattice shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 3, 1971.
9. M. KLEIBER, CZ. WOŹNIAK, *The edge effect in the theory of lattice shells*, Bull. Acad. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 4, 1971.
10. M. KLEIBER, CZ. WOŹNIAK, *The equations of shallow lattice shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 4, 1971.
11. P. KLEMM, CZ. WOŹNIAK, *Gęste heksagonalne siatki sprężyste*, Mech. Teoret. i Stos., **8**, 3, 1970.
12. Z. T. KURLANDZKA, *An anisotropic Cosserat surface and linear shell theory*, Arch. Mech. Stos., **25**, 4, 1973.
13. Z. S. MAKOWSKI, *Raumliche Tragwerke aus Stahl*, Verlag Stahleisen, Dusseldorf 1963.
14. R. PELA, *Podstawy obliczeń kratownic powłokowych*, Arch. Inżyn. Łąd., **15**, 1-2, 1969.
15. R. PELA, CZ. WOŹNIAK, *Wstęp do teorii i obliczeń kratownic powierzchniowych*, Arch. Inżyn. Łąd., **12**, 4, 1966.
16. L. F. J. PLANTEMA, *Sandwich construction*, Wiley and Sons, Amsterdam 1966.
17. A. S. WOLMIR, *Gibkije plastinki i oboloczki*, Gostjechjeorizdat, Moskwa 1956.
18. CZ. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
19. CZ. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media*, Arch. Mech. Stos., **17**, 5-6, 1965.

Резюме

URAVNIENIA LINIOWEJ TEORII UPRUGICH STRUKTURNYCH OBOŁOCZEK

В работе представлен метод статического анализа пространственных стержневых систем с узлами помещенными на двух, немного удаленных друг от друга поверхностях. Метод анализа этих конструкций, называемых структурными оболочками, разработан опираясь на сплошную модель системы, предполагая густоту и регулярность стержневых сеток рассматриваемых конструкций. Выведена основная система уравнений, позволяющая определить деформации этих систем. Эти уравнения касаются структурных оболочек с произвольными типами стержневых сеток, при предположении парного соединения стержней в узлах. Затем даются формулы определяющие силу в каждом стержне. Представлено тоже несколько способов упрощения основной системы уравнений. Разработанный метод иллюстрируется примером расчетов цилиндрической оболочки типа «Унибат».

SUMMARY

EQUATIONS OF THE LINEAR THEORY OF ELASTIC STRUCTURAL SHELLS

The paper presents a method of statical analysis of spatial rod systems with nodes located at two surfaces lying close to each other. The method of analysis of those structures, called «structural shells», is based on a continuous model of the system, the rod networks being assumed to be regular and dense enough. The fundamental system of equations describing the state of deformation is derived. The equations apply to rod systems of arbitrary geometry under the assumption of hinge-type joints at the nodes. The formulae determining the forces in individual rods are then given. Several methods of simplification of the fundamental system of equations are outlined. The method is illustrated by an example of a cylindrical, «Unibat»-type shell.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 października 1974 r.
