

## NUMERYCZNA ANALIZA ZGINANIA ZŁOŻONEJ PŁYTY O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

EDWARD WALICKI, ANDRZEJ TOPOLIŃSKI (BYDGOSZCZ)

W pracy przedstawiono numeryczną analizę zginania płyty o zmiennej sztywności złożonej z elementów prostokątnych. Do rozwiązań numerycznych użyto prostych schematów różnicowych. Otrzymane równania różnicowe rozwiązano przy użyciu metody iteracyjnej. Rozważono płyty o brzegach swobodnie podpartych, utwierdzonych oraz płyty o mieszanych warunkach brzegowych. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów ugięć płyty i wykresów momentów.

### WSTĘP

Ścisłe rozwiązania analityczne płyt o złożonych kształtach na gruncie teorii sprężystości jest bardzo trudne, szczególnie jeśli chodzi o rozkład naprężeń i odkształceń w całym obszarze płyty [9 i 10].

Dobre wyniki w takich przypadkach daje zastosowanie metody różnic skończonych [1–5]. Zalety tej nieskomplikowanej w praktyce inżynierskiej metody rosną przy zastosowaniu elektronicznej techniki obliczeniowej [7 i 8]. Dokładności rozwiązań uwarunkowane są jednakże pojemnością pamięci zastosowanych komputerów. W przypadku płyt o symetrycznych kształtach, można prowadzić obliczenia jedynie dla części płyty wydzielonej osiami symetrii. Ma to niebagatelne znaczenie, ponieważ możliwe jest zastosowanie maszyn cyfrowych z niewielkimi pojemnościami pamięci, nie umniejszające przy tym dokładności obliczeń [6].

W niniejszej pracy dokonano próby numerycznego przebadania prostokątnej płyty o zmiennej sztywności przy różnych warunkach brzegowych.

### 1. RÓWNANIA PODSTAWOWE. WARUNKI BRZEGOWE

Rozpatrujemy płyty pokazane na rys. 1. Tak obrany ich kształt jest uogólnieniem pewnego kształtu symetrycznych względem dwóch centralnych osi płyt złożonych z prostokątów.

Równanie równowagi dla cienkich płyt o zmiennej sztywności ma postać

$$(1.1) \quad \nabla^2 (D \nabla^2 w) + (1-\nu) \left( 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = p_0,$$

gdzie  $D$  oznacza sztywność płytową,  $w$  ugięcie oraz  $p_0 = p_0(x, y)$  obciążenie zewnętrzne.

Równanie (1.1) można przedstawić w postaci równoważnej (dogodniejszej do obliczeń numerycznych) dwóch równań drugiego rzędu:

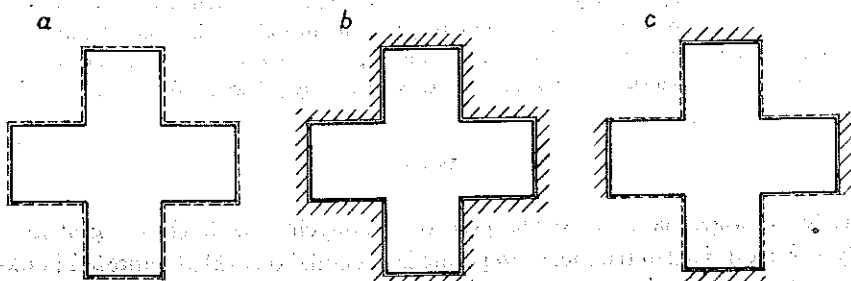
$$(1.2) \quad \nabla^2 M = (1-\nu) \left( 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - p_0$$

oraz

$$(1.3) \quad \nabla^2 w = -\frac{M}{D},$$

gdzie

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}.$$



Rys. 1

Geometryczne warunki brzegowe dla rozpatrywanych tutaj płyt są następujące:

dla brzegów swobodnie podpartych

$$(1.4) \quad w = 0, \quad M = 0;$$

dla brzegów utwierdzonych

$$(1.5) \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

## 2. RÓWNIANIA RÓŻNICOWE POWIERZCHNI UGIĘCIA

Podzielmy obszar płyt prostymi równoległymi do osi współrzędnych, przy czym odległość między równoległymi w obu kierunkach jest stała i wynosi  $h$  (rys. 2).

Współrzędne  $x$ ,  $y$  dadzą się wobec tego przedstawić w postaci

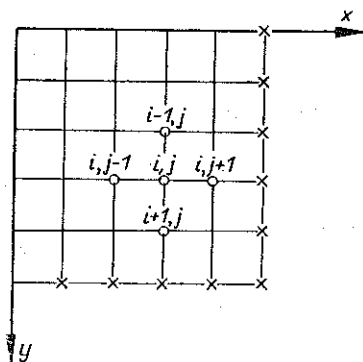
$$x = x_0 + (j-1)h,$$

$$y = y_0 + (i-1)h, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots$$

Punkty przecięcia się prostych będziemy nazywać węzłami. Krok siatki  $h$  dobierzemy tak, aby węzły znalazły się na brzegach płyty. Węzły takie nazywać będziemy brzegowymi.

Zastępując pochodne z układu (1.2) ilorazami różnicowymi

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{h^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} &= \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i,j+1} - w_{i+1,j} + w_{i,j}}{h^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{M_{i,j+1} - 2M_{i,j} + M_{i,j-1}}{h^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{M_{i+1,j} - 2M_{i,j} + M_{i-1,j}}{h^2}, \end{aligned}$$



Rys. 2

otrzymujemy następujący układ równań różnicowych:

$$(2.1) \quad w_{i,j} = \frac{1}{4} \left( w_{i,j+1} + w_{i,j-1} + w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + \frac{M_{i,j} h^2}{D_{i,j}} \right),$$

$$(2.2) \quad M_{i,j} = \frac{1}{4} \left\{ p_0 \cdot h^2 + M_{i,j+1} + M_{i,j-1} + M_{i+1,j} + M_{i-1,j} - (1-\nu) \times \right. \\ \left. \times [2Aw_{i+1,j+1} - (2A+C)w_{i,j+1} - (2A+B)w_{i+1,j} + \right. \\ \left. + 2(A+B+C)w_{i,j} - Bw_{i-1,j} - Cw_{i,j-1}] \right\},$$

gdzie

$$A = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\right)_{i,j}, \quad B = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)_{i,j}, \quad C = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)_{i,j}.$$

### 3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

Równania różnicowe (2.1) i (2.2) rozwiążemy tzw. jawną metodą iteracyjną, polegającą na obliczeniu poszukiwanych wartości  $w$  oraz  $M$  z węzła na węzeł przy użyciu wartości kolejno wyliczanych. W pierwszej iteracji wykorzystano założone wartości możliwie bliskie przewidywanych.

W przypadku płyty o brzegach swobodnych funkcje  $w$  i  $M$  są stałe na brzegach i nie wymagają poprawienia. Inaczej wygląda ten problem dla płyty o brzegach utwierdzonych. W tym przypadku ugięcie jest stałe (1.5), lecz w trakcie procesu iteracyjnego  $M$  musi być przybliżone. Dokonano tego za pomocą przedstawionego niżej postępowania.

Rozważmy wartości  $M$  w otoczeniu punktu  $O$  leżącego na brzegu rozpatrywanego obszaru (rys. 3). Rozwijając  $M$  w szereg Taylora względem zmiennej  $y$  w otoczeniu punktu  $O$  dostajemy

$$(3.1) \quad w_2 = w_0 + h \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right)_0 + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3}\right)_0, \dots$$

Z równania (1.3) otrzymujemy

$$(3.2) \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right)_0 = - \left( \frac{M}{D} \right)_0 - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)_0.$$

Różniczkując kolejno (3.2) znajdziemy

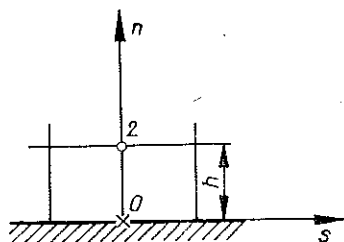
$$(3.3) \quad \begin{aligned} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} \right)_0 &= - \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 - \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right]_0, \\ \left( \frac{\partial^4 w}{\partial n^4} \right)_0 &= - \left[ \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 - \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right) \right]_0 = \\ &= \left( \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right)_0 - \left[ \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 + \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0. \end{aligned}$$

Uwzględniając (3.3) oraz  $\left( \frac{\partial^k w}{\partial s^k} \right)_0 = 0$ , szereg (3.1) możemy napisać w postaci

$$(3.4) \quad w_2 = - \frac{h^2}{2} \left( \frac{M}{D} \right)_0 - \frac{h^3}{6} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 + \\ + \frac{h^4}{24} \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 - \left[ \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 \right\} + o(h^5).$$

Rozwijając  $M/D$  w szereg Taylora względem zmiennej  $n$  w otoczeniu punktu  $O$ :

$$(3.5) \quad \left( \frac{M}{D} \right)_2 = \left( \frac{M}{D} \right)_0 + h \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 + o(h^3)$$



Rys. 3

i wyznaczając stąd  $\left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0$  dostajemy

$$(3.6) \quad \frac{h^3}{6} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 = \frac{h^2}{6} \left[ \left( \frac{M}{D} \right)_2 - \left( \frac{M}{D} \right)_0 \right] - \frac{h^4}{12} \left[ \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0.$$

Równanie (3.4) z uwzględnieniem (3.6) można napisać w postaci

$$(3.7) \quad w_2 = - \frac{h^2}{3} \left( \frac{M}{D} \right)_0 - \frac{h^2}{6} \left( \frac{M}{D} \right)_2 + \frac{h^4}{24} \left[ \nabla^2 \left( \frac{M}{D} \right) \right]_0 + o(h^5).$$

Biorąc pod uwagę, że  $\left(\frac{\partial^k w}{\partial s^k}\right)_0 = \left(\frac{\partial^k w}{\partial s^r \partial n^{k-r}}\right) = 0$  i pomijając małe wyższego rzędu względem kroku siatki, można przyjąć, że

$$(3.8) \quad \left[\nabla^2 \left(\frac{M}{D}\right)\right]_0 = \frac{1}{D_0} [\nabla^2 M]_0.$$

Równanie (1.2) na brzegu w punkcie  $O$  (rys. 3) przybierze postać:

$$(3.9) \quad [\nabla^2 M]_0 = (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial s^2} \left(\frac{M}{D}\right)\right]_0 - p_0.$$

Uwzględniając (3.9) oraz (3.8) w (3.7) otrzymujemy

$$(3.10) \quad w_2 = -\frac{h^2}{3} \left(\frac{M}{D}\right)_0 - \frac{h^2}{6} \left(\frac{M}{D}\right)_2 + \frac{h^4}{24D_0} \left\{ (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial s^2} \left(\frac{M}{D}\right)\right]_0 - p_0 \right\} + o(h^5).$$

Z powyższego dostajemy

$$(3.11) \quad \left(\frac{M}{D}\right)_0 = \frac{\frac{h^2 p_0}{D_0} + 4 \left(\frac{M}{D}\right)_2 + \frac{24w_2}{h^2}}{\frac{h^2 K_0 (1-\nu)}{D_0} - 8},$$

gdzie

$$K_0 = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial s^2}\right)_0.$$

W celu uniknięcia nieustalonych oscylacji funkcji  $M$ , nie stosujemy w obliczeniach bezpośrednio wzoru (3.11), lecz kombinację liniową z wartością wyznaczoną w poprzednim cyklu

$$(3.12) \quad \left(\frac{M}{D}\right)_0 = \left(\frac{M}{D}\right)_0^{(n-1)} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{M}{D}\right)_0^{(n)} - \left(\frac{M}{D}\right)_0^{(n-1)} \right],$$

gdzie  $(M/D)_0^{(n-1)}$  oznacza poprzednią wartość brzegową,  $(M/D)_0^{(n)}$  nową wartość brzegową (3.11) oraz  $(M/D)_0$  wartość brzegową wprowadzoną do nowego cyklu iteracyjnego.

Wzór (3.12) dla  $n$ -tej iteracji cyklu iteracyjnego przyjmie postać

$$(3.13) \quad M_0 = \frac{1}{2} \left\{ M_0^{(n-1)} - \frac{D_0 \left[ \frac{h^2 p_0}{D_0} + 4 \left(\frac{M}{D}\right)_0^{(n)} + \frac{24w_2^{(n)}}{h^2} \right]}{\frac{h^2 K_0 (1-\nu)}{D_0} - 8} \right\}.$$

## 4. PRZYKŁAD LICZBOWY

Do obliczeń przyjęto płytę przedstawioną na rys. 4. Grubość płyt zmienia się wg wzoru

$$H = H_0 - \frac{2(x^2 + y^2)}{c_1},$$

obciążenie zewnętrzne

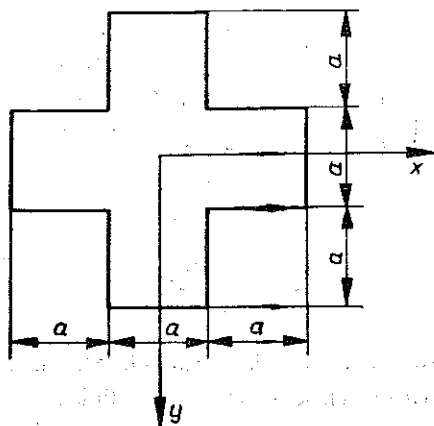
$$p = p_0 + \frac{x^2 + y^2}{c_2}.$$

Przyjęto następujące wartości liczbowe:

$$a = 2 [m], \quad p_0 = 2 [T/m^2], \quad H_0 = 0,1 [m], \quad \nu = 0,3,$$

$$E = 2,1 \cdot 10^7 [T/m^2], \quad h = 0,1 [m], \quad c_1 = 1000 [m], \quad c_2 = 1000 [m^4/T].$$

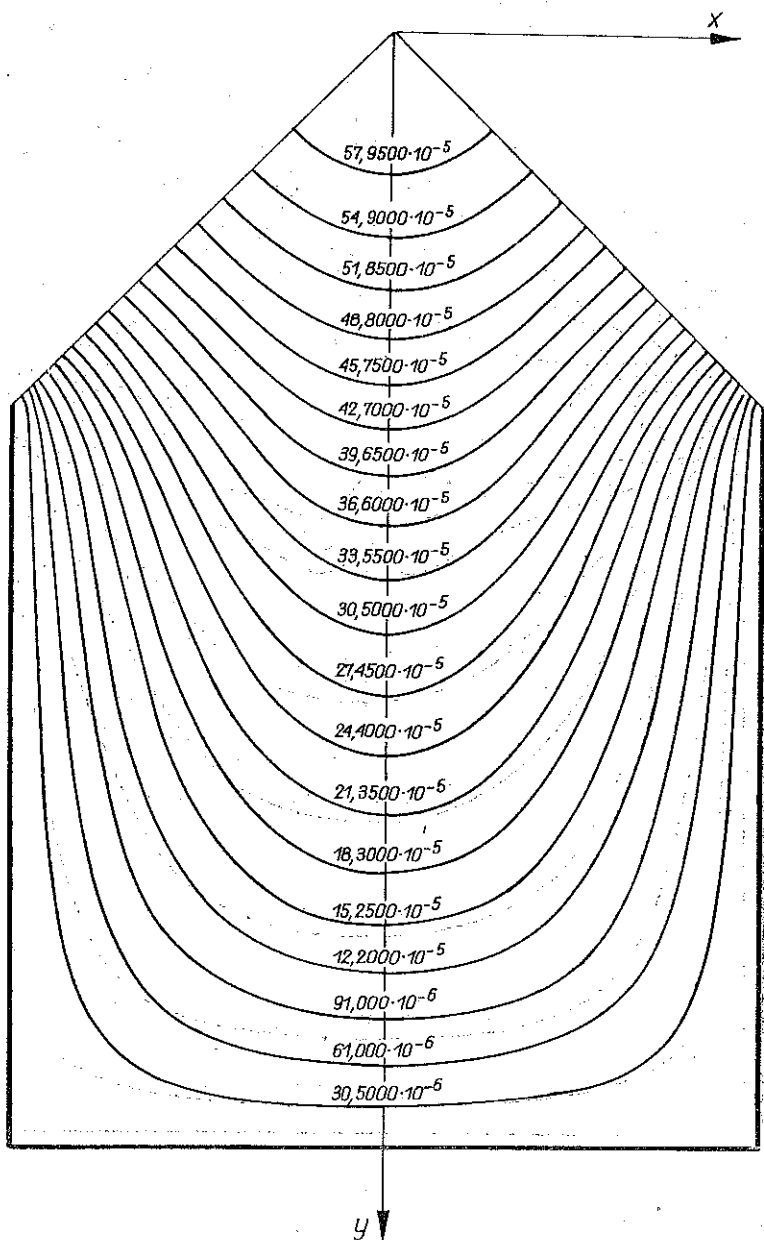
Wykresy linii ugięcia  $w = \text{const}$ , momentów gnących  $M_x = \text{const}$ ,  $M_y = \text{const}$ , oraz momentów skręcających  $M_{xy} = \text{const}$  przedstawione na rys. 5, ..., 16. Z uwagi na symetrię płyt wykresy sporządzono dla 1/4 ich powierzchni.



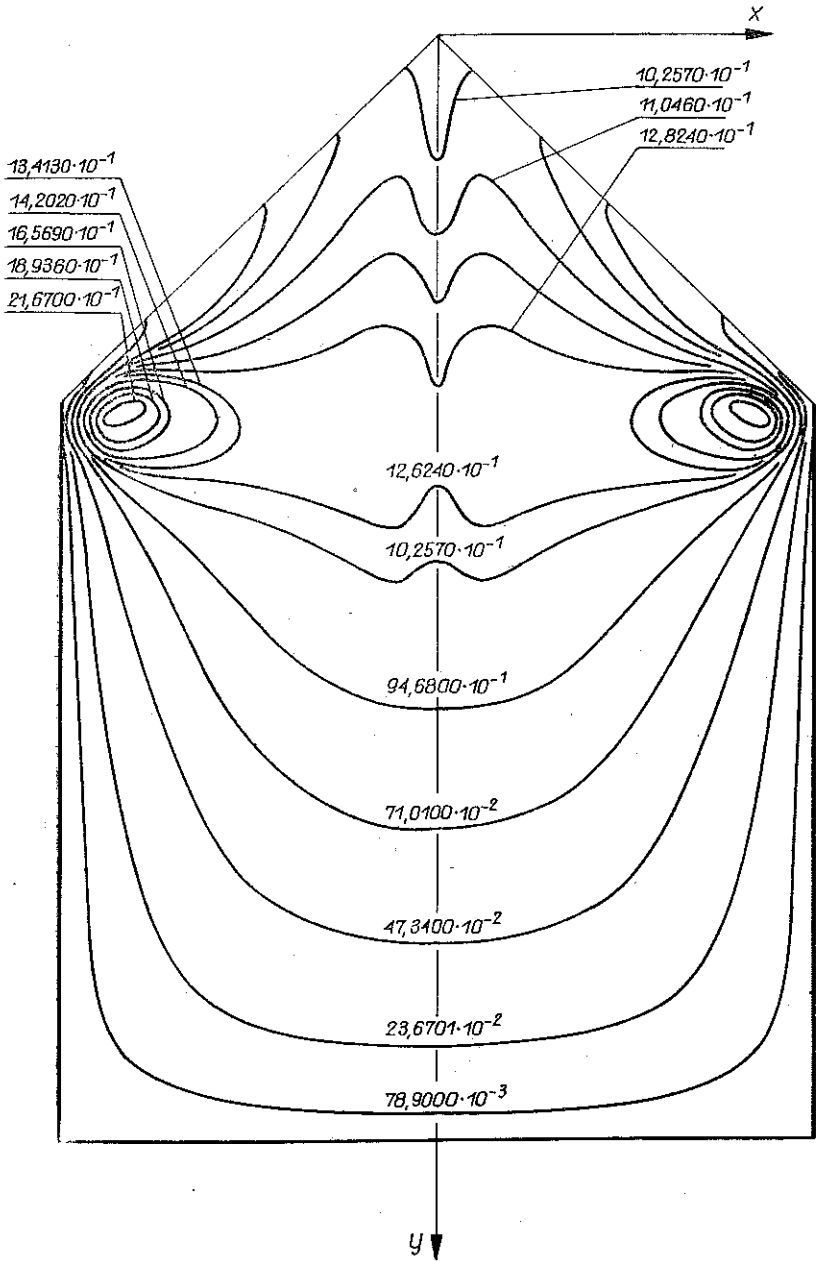
Rys. 4

## 5. UWAGI KOŃCOWE

Z przeprowadzonych rozważań wynika zasadniczy wniosek ogólny dotyczący przydatności metod różnicowych do obliczeń płyt o skomplikowanych kształtach. Rozbicie pola obliczeń na dwa pola prowadzi do układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, co ma dość istotny wpływ na dokładność prowadzonych obliczeń i pozwala na użycie prostych schematów różnicowych, charakteryzujących się dobrą zbieżnością i stabilnością [4]. Wprowadzenie dwóch pól obliczeń powoduje konieczność — w przypadku utwierdzonych brzegów — poprawienia wartości brzegowych zastępczego momentu. Wyprowadzony w pracy wzór (3.11) pozwala na dość dokładne przybliżenie tych wartości momentu zastępczego.

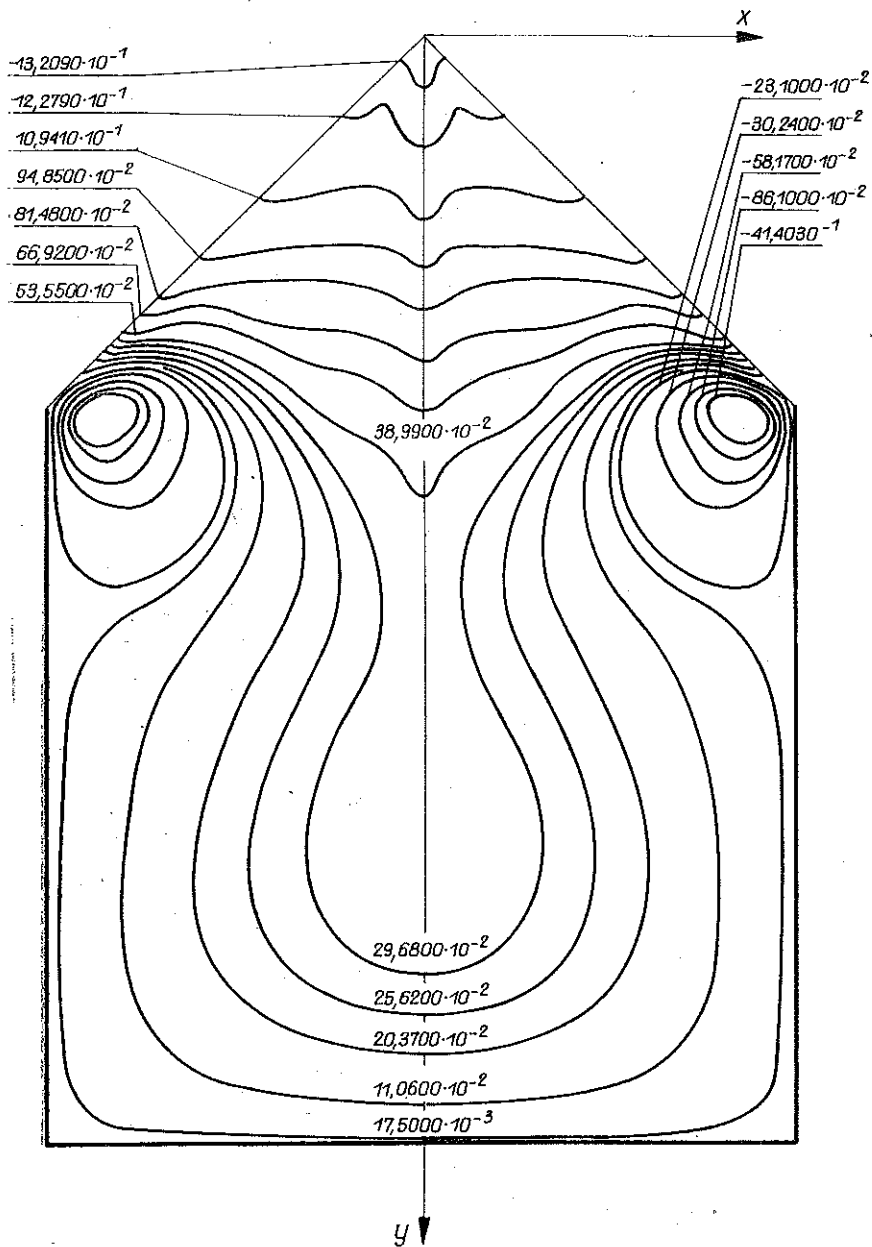


Rys. 5. Płyta o brzegach swobodnie podpartych. Wykres ugięć  $w$  [m]

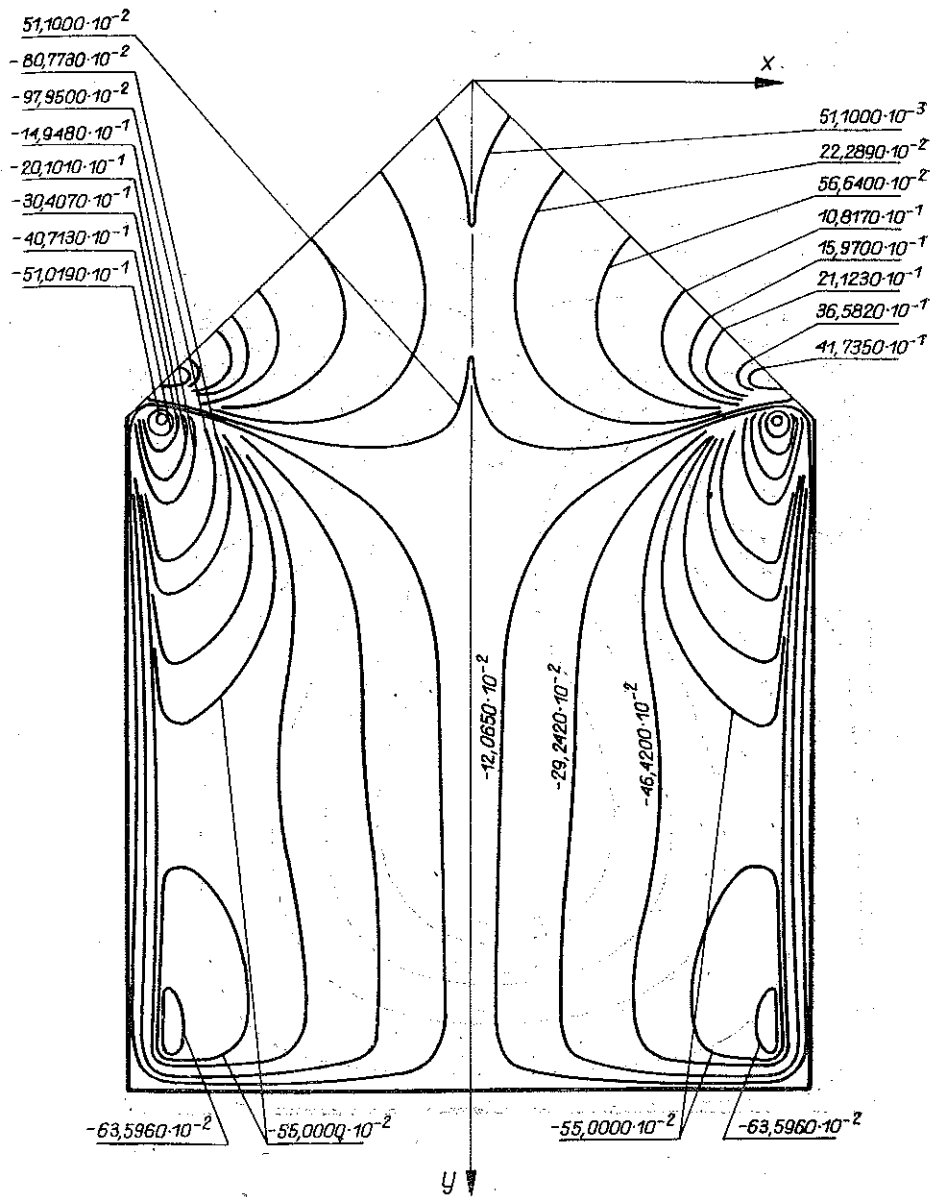


Rys. 6. Płyta o brzegach swobodnie podpartych. Wykres momentów gnących  $M_x$  [Tm/m]

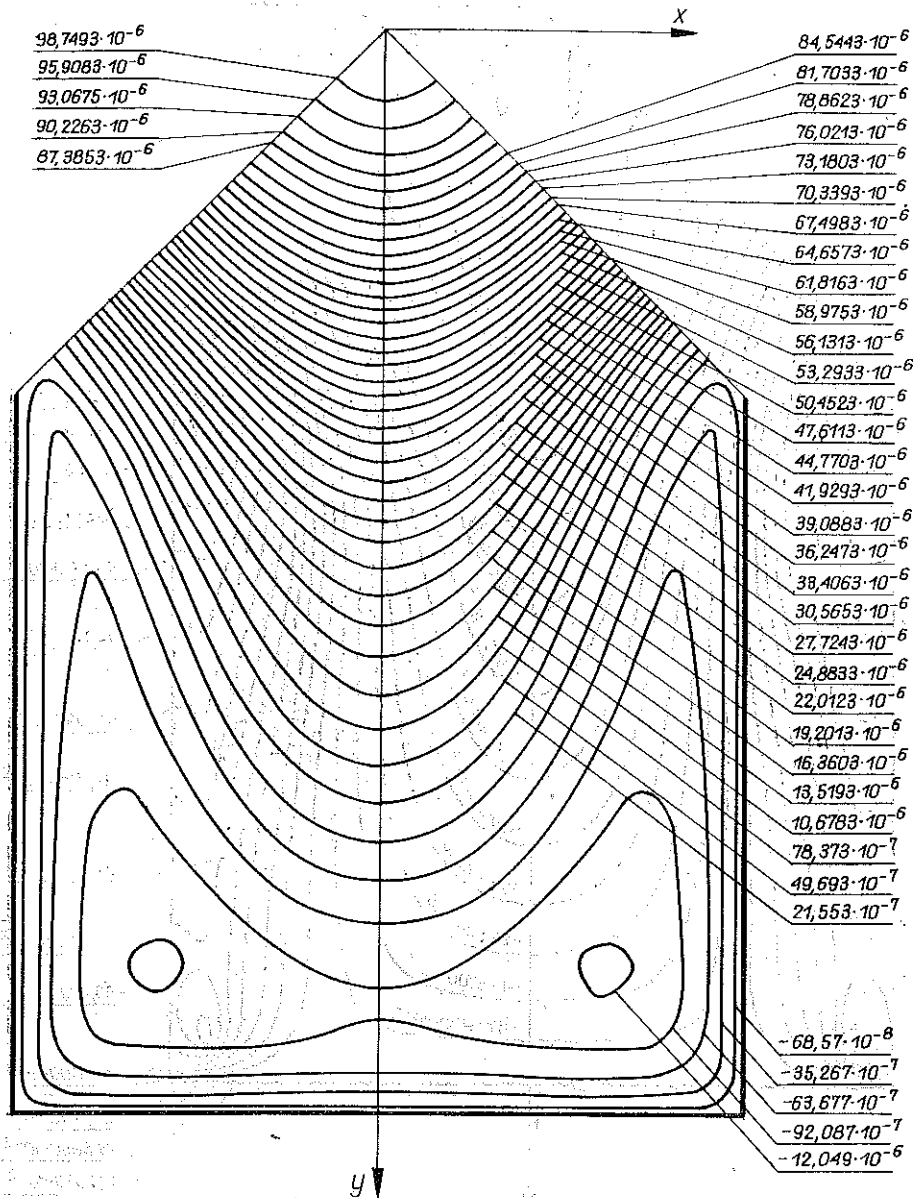




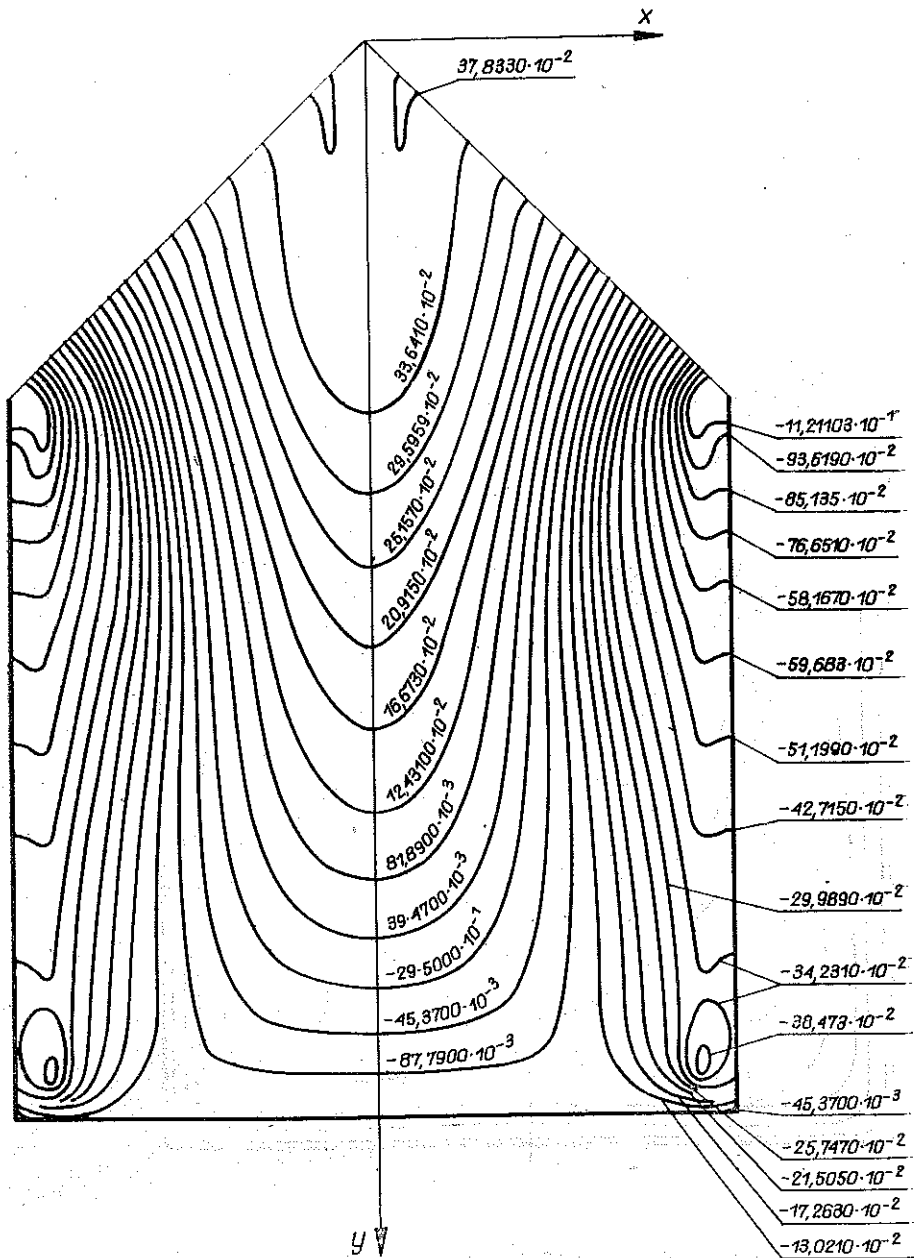
Rys. 7. Płyta o brzegach swobodnie podpartych. Wykres momentów gnących  $M$ , [ $\text{Tm/m}$ ]



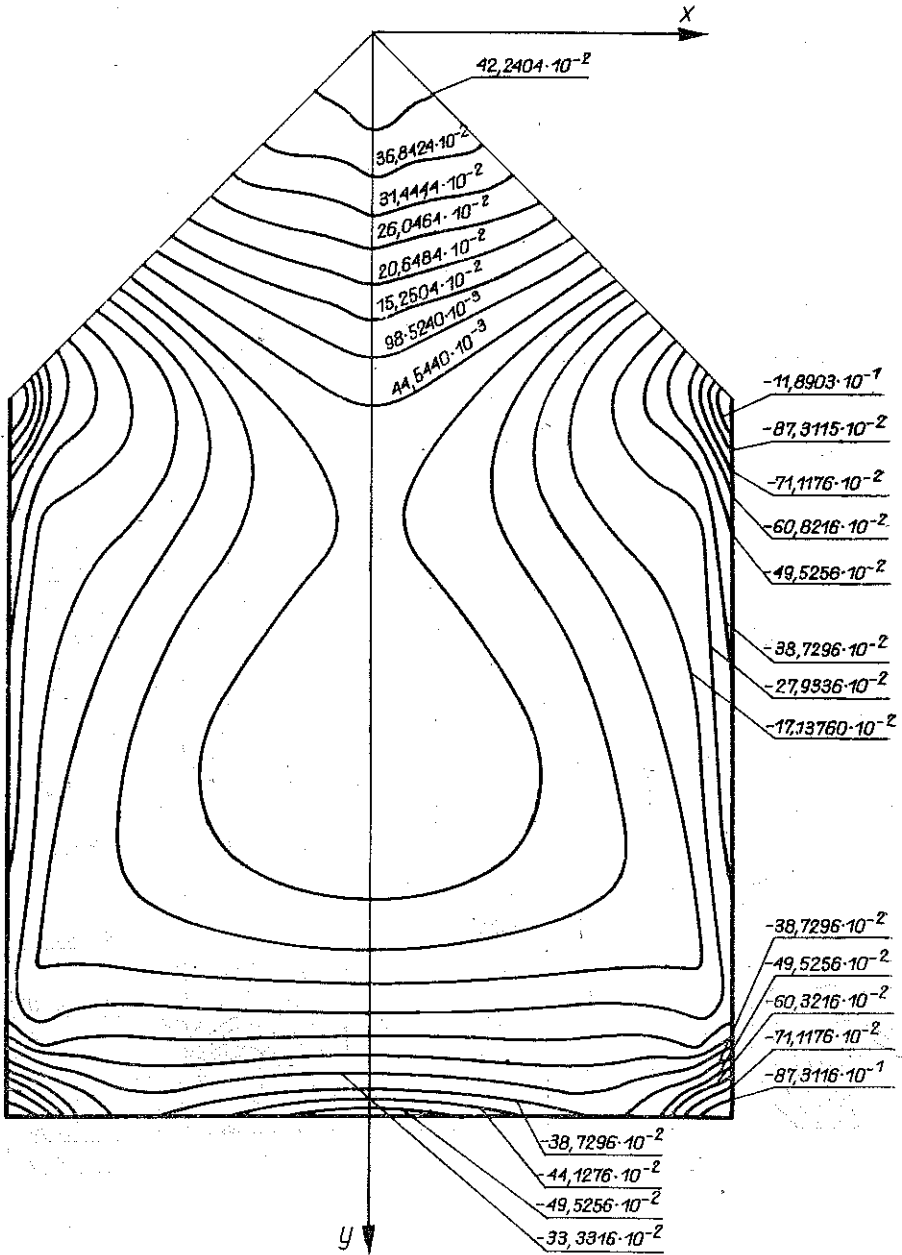
Rys. 8. Płyta o brzegach swobodnie podpartych. Wykres momentów skręcających  $M_{xy}$  [Tm/m]



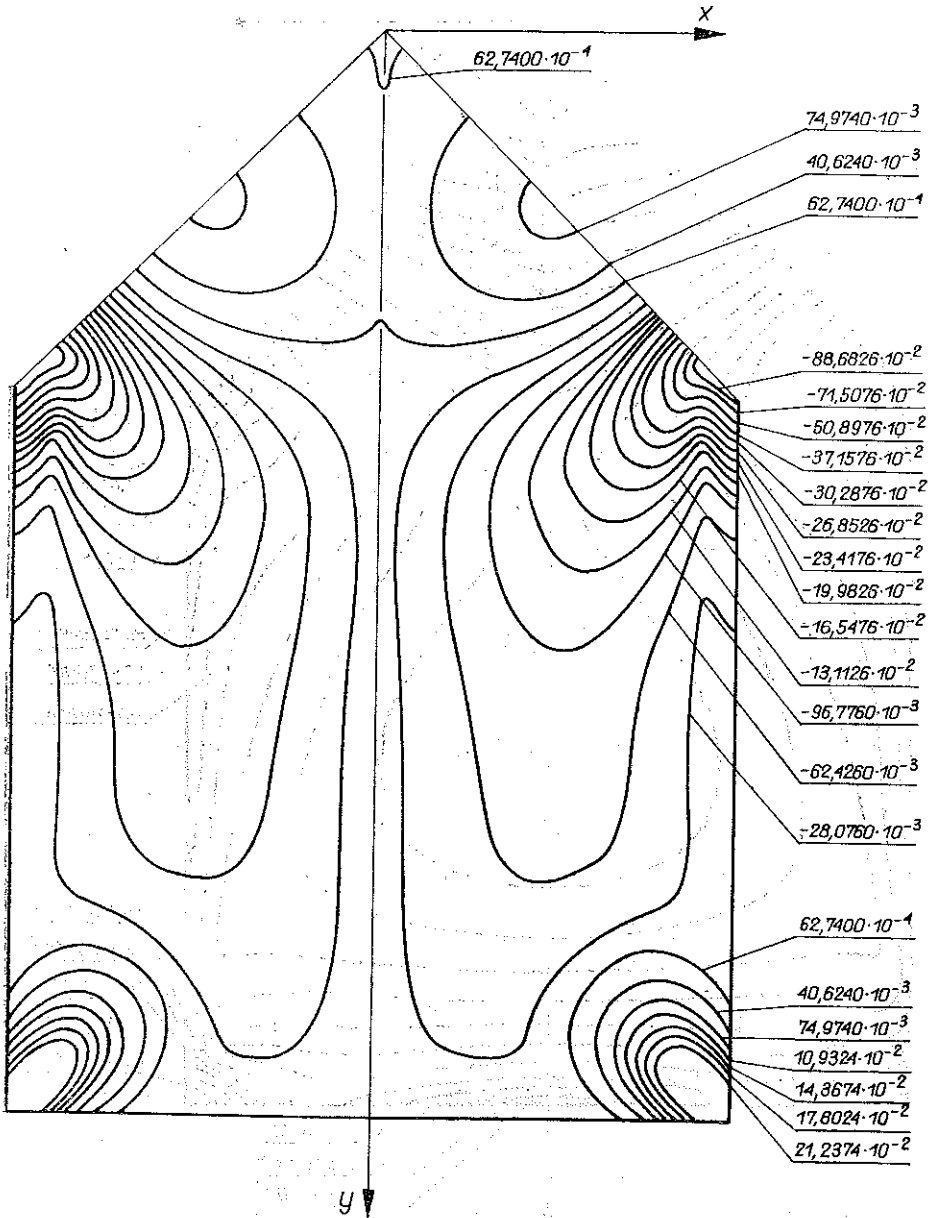
Rys. 9. Płyta o brzegach utwierdzonych. Wykres ugięć  $w$  [m]



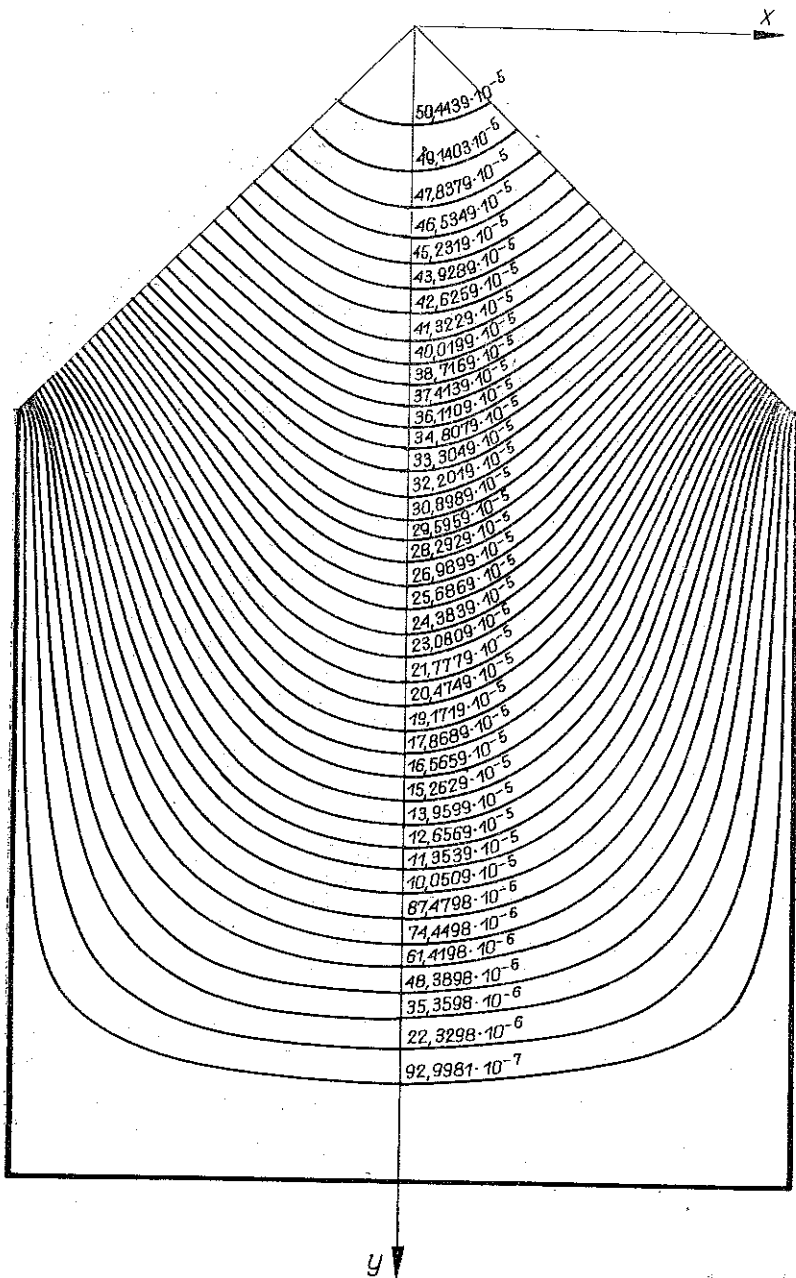
Rys. 10. Płyta o brzegach utwierdzonych. Wykres momentów gięcych  $M_x$  [ $\text{Tm/m}$ ]



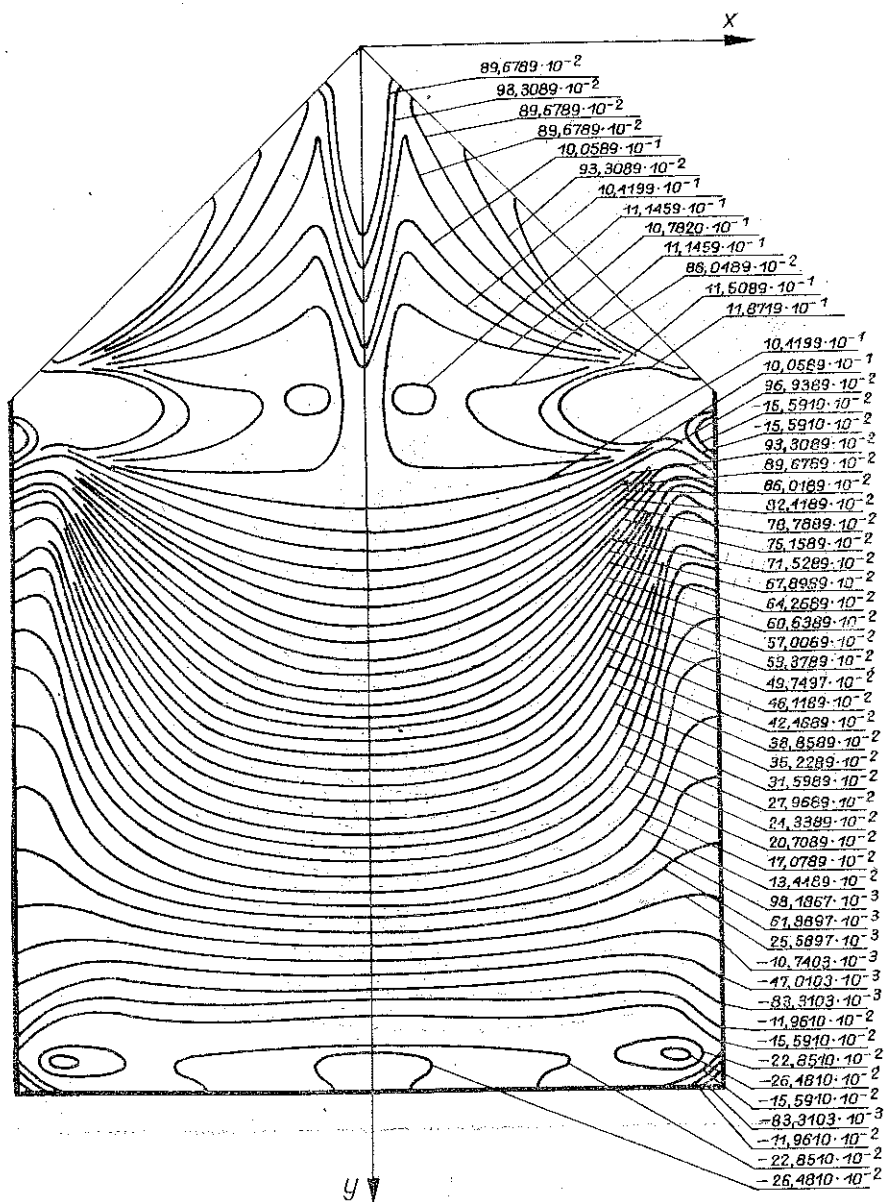
Rys. 11. Płyta o brzegach utwierdzonych. Wykres momentów gnących  $M_x$ , [Tm/m]



Rys. 12. Płyta o brzegach utwardzonych. Wykres momentów skręcających  $M_{xy}$  [Tm/m]

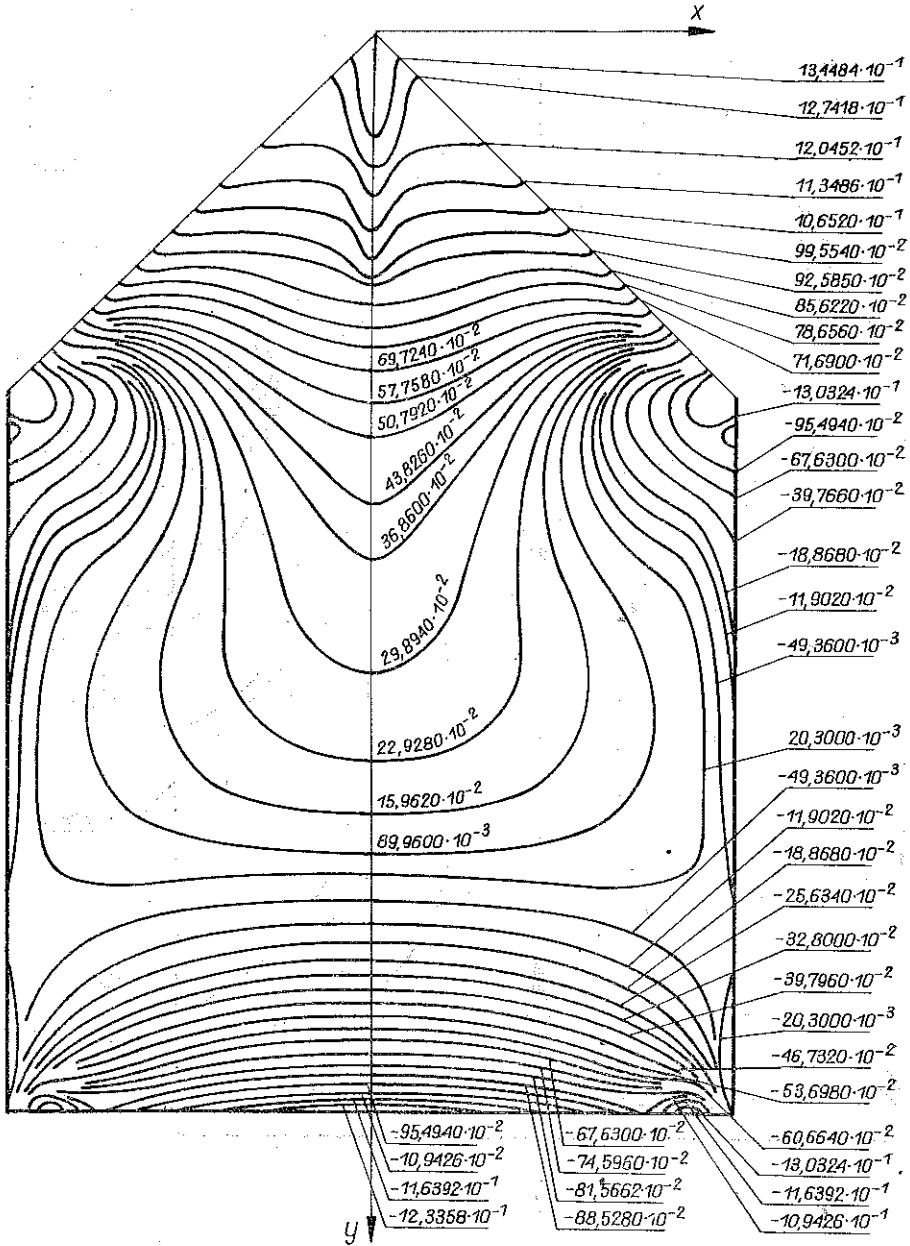


Rys. 13. Płyta z mieszanymi warunkami brzegowymi. Wykres ugięć  $w$  [m]

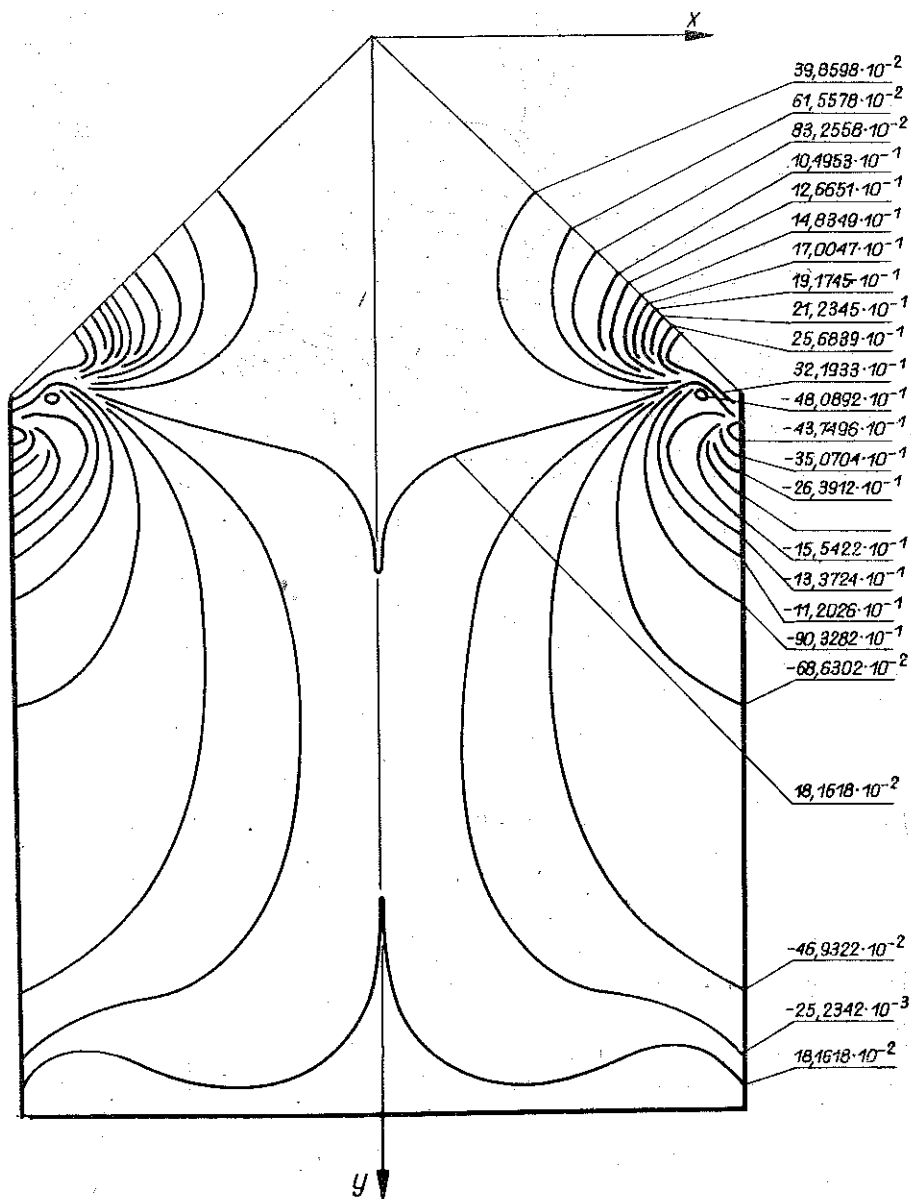


Rys. 14. Płyta z mieszanymi warunkami brzegowymi. Wykres momentów gnących  $M_x$  [Tm/m]





Rys. 15. Płyta z mieszanymi warunkami brzegowymi. Wykres momentów giących  $M$ , [Tm/m]



Rys. 16. Płyta z mieszanymi warunkami brzegowymi. Wykres momentów skręcających  $M_{xy}$  [Tm/m]

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
2. S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1963.
3. Z. KAČZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
4. A. THOM, C. J. APELT, G. F. J. TEMPLE, *Field computations in engineering and physics*, Van Nostrand Inc., New York, 1961.
5. А. Г. УГОБЧИКОВ, Н. И. ДЛУГАЧ, А. Е. СТЕПАНОВ, *Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах*, Изд. Высшая школа, Москва, 1973.
6. A. F. SMIRNOW, A. W. ALEKSANDROW, N. N. SZAPOSNIKOW, B. J. ŁASZCZENIAKOW, *Obliczenie konstrukcji za pomocą maszyn cyfrowych*, Arkady, Warszawa 1970.
7. L. PRÁSEK, *Berechnung der Spannungen in rotierenden Schiebern beim Kriechen*, ABM, 2, 1969.
8. L. PRÁSEK, *Die Berechnung von biegespannungen in den rotierenden Schiebern*, ABM, 1, 1972.
9. J. STUPNICKI, W. SZYSZKOWSKI, *Analiza wytrzymałościowa płyty kwadratowej z otworami podpartej w narożach*, ABM, 2, 1972.
10. G. JEMIELITA, *Zginanie płyty kwadratowej z centralnie położonym otworem kwadratowym*, Mech. Teor. i Stos., 2, 1974.

## Резюме

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ИЗГИБА СЛОЖНОЙ ПЛАСТИНЫ О ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

В работе представлен численный анализ изгиба пластины, о переменной жесткости, состоящей из прямоугольных элементов. Численные расчеты выполнены путем применения простых конечно-разностных формул. Полученные конечно-разностные уравнения решены благодаря применению метода явной постепенной итерации. Рассмотрены пластины с шарнирно закрепленными и жестко заделыми краями, а также пластины с смешанных закреплениях края. Результаты вычислений проведены в форме графиков поперечных отклонений и графиков моментов.

## SUMMARY

## NUMERICAL ANALYSIS OF BENDING OF COMPOSITE PLATES OF VARIABLE RIGIDITY

The paper presents the numerical analysis of a plate of variable rigidity composed of rectangular elements. Simple difference schemes are used. The difference equations obtained are solved by iterative methods. Plates with simply supported edges, clamped or subject to mixed boundary conditions are considered. The results are presented in the form of graphs of plate deflections and bending moments.

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 listopada 1975 r.