

SPROWADZENIE UKŁADU CIĄGŁEGO DO UKŁADÓW DYSKRETYCH W PRZYPADKU UDERZENIA MASY W PRĘT O ZMIENNYM PRZEKROJU

WŁADYSŁAW NADOLSKI I AMALIA PIELORZ (WARSZAWA)

W pracy przeprowadzono próbę sprowadzenia układu ciągłego, jakim jest pręt o skończonej długości i zmiennym przekroju uderzany wzdłużnie masą, do układu modeli dyskretnych o jednym i dwóch stopniach swobody. Wyznaczono wartości zastępczych częstości drgań, sztywności i mas układów dyskretnych wykorzystując wzory analityczne przemieszczeń i prędkości pręta. Ponadto, przy wyznaczaniu zastępczych wartości parametrów, wymagano, aby układy dyskretne z pewnym przybliżeniem opisywały przemieszczenia rozpatrywanych przekrojów pręta.

1. WSTĘP

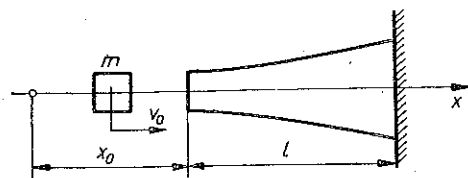
W czasie pracy większości maszyn i urządzeń technicznych występują uderzenia. W wielu przypadkach mogą być one następstwem istnienia luzów w miejscach łączenia elementów, np. w maszynach produkcyjnych obrabiających przedmioty o nieciągłych kształtach. Mogą one być również nieuchronnie połączone z normalną pracą maszyn, np. hutniczych i kuźniczych.

Badania dynamiczne elementów tak pracujących maszyn obejmują problemy falowe i badania za pomocą układów dyskretnych, np. oscylacyjności ruchu, stateczności ruchu, wyznaczania reakcji itp. Podstawowym zagadnieniem, nadal bardzo mało zbadanym, jest wyznaczanie parametrów charakteryzujących układy dyskretne, które z pewnym przybliżeniem opisywałyby np. przemieszczenia układów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. W literaturze technicznej istnieją prace, w których układ ciągły jest sprowadzany do układu dyskretnego o jednym stopniu swobody (na przykładzie pręta o stałym przekroju) w ten sposób, że masa pręta jest sprowadzana do punktu, tj. do końca pręta uderzanego wzdłużnie masą [1]. Brak natomiast prac dotyczących sprowadzania układu ciągłego do układu dyskretnego dla dowolnego przekroju pręta.

W tej pracy podejmujemy próbę, na przykładzie sprężystego pręta, sprowadzania układu ciągłego, o skończonej długości i zmiennym przekroju, uderzanego wzdłużnie masą, do układu modeli dyskretnych o jednym i dwóch stopniach swobody w ten sposób, aby modele dyskretne z pewnym przybliżeniem opisywały przemieszczenia dowolnego przekroju pręta. Funkcje przemieszczeń przekroju pręta wprowadzamy w następnym punkcie pracy.

2. ROZPRZESTRZENIANIE SIĘ FAL SPRĘŻYSTYCH W PRĘCIE O ZMIENNYM PRZEKROJU

Rozpatrzmy rozprzestrzenianie się fal sprężystych w jednorodnym pręcie o długości l i monotonicznie rosnącym przekroju $S(x)$, uderzanym wzdłużnie masą m z prędkością v_0 . Pręt jest zamocowany sztywno jednym końcem, jak to pokazano na rys. 1.



Rys. 1

Niech oś symetrii pręta będzie osią x o początku odległym o x_0 od swobodnego końca pręta. Przyjmujemy, że monotonicznie wolnozmienny przekrój pręta opisany jest funkcją

$$(2.1) \quad S(x) = S_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2,$$

gdzie $S_0 = S(x_0)$ jest przekrojem końca swobodnego.

Równanie ruchu rozważanego pręta ma postać [2]

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = 0,$$

gdzie $u(x, t)$ jest osiowym przemieszczeniem poprzecznego przekroju pręta, a jest prędkością propagacji sprężystej fali podłużnej.

Warunki początkowe i brzegowe są następujące:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 & \quad \text{dla } t=0, \quad x_0 < x < x_0 + l, \\ u(x, t) = 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v_0 & \quad \text{dla } t=0, \quad x = x_0; \\ u(x, t) = 0 & \quad \text{dla } x = x_0 + l, \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \kappa \frac{a^2}{l} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 & \quad \text{dla } x = x_0, \end{aligned}$$

gdzie $\kappa = \rho S_0 l / m$, ρ jest gęstością materiału pręta.

Rozwiązania równania (2.2) przy warunkach (2.3) szukamy za pomocą transformacji Laplace'a względem czasu. Dla transformaty $\bar{u}(x; s)$ otrzymujemy następujące równania:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}(x; s)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\bar{u}(x; s)}{dx} - \left(\frac{s}{a} \right)^2 \bar{u}(x; s) = 0 & \quad \text{dla } x_0 < x < x_0 + l, \\ \bar{u}(x; s) = 0 & \quad \text{dla } x = x_0 + l, \\ \left(\frac{s}{a} \right)^2 \bar{u}(x; s) - \frac{\kappa}{l} \frac{d\bar{u}(x; s)}{dx} - \frac{v_0}{a^2} = 0 & \quad \text{dla } x = x_0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (2.4)₁:

$$(2.5) \quad \bar{u}(x; s) = \frac{1}{x} [C(s)e^{-\frac{s}{a}x} + D(s)e^{\frac{s}{a}x}],$$

po wyznaczeniu $C(s)$ i $D(s)$ z (2.4)_{2,3} ma postać

$$(2.6) \quad \bar{u}(x; s) = \frac{1}{x} \frac{v_0 x_0}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \frac{\left[\left(\frac{s}{a} \right)^2 - \frac{\kappa}{l} \frac{s}{a} + \frac{\kappa}{lx_0} \right]^n}{\left[\left(\frac{s}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{l} \frac{s}{a} + \frac{\kappa}{lx_0} \right]^{n+1}} e^{-\frac{s}{a}x_{nk}},$$

gdzie $x_{nk} = (-1)^k (x - x_0) + 2l(n+k)$. W przypadku gdy

$$(2.7) \quad B^2 = \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{l^2} - \frac{\kappa}{x_0 l} > 0,$$

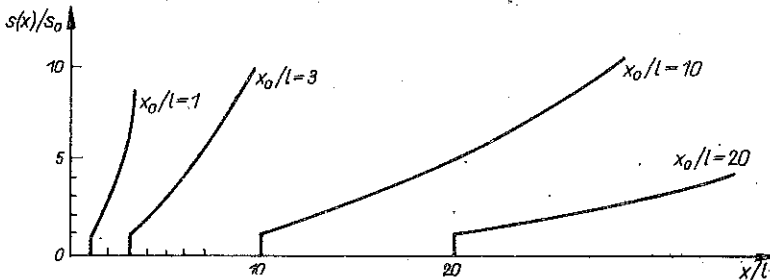
tj. dla prętów o wolnozmiennym przekroju, funkcja (2.6) jest następująca:

$$(2.8) \quad \bar{u}(x; s) = \frac{1}{x} \frac{v_0 x_0}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \frac{\left(\frac{s}{a} - A + B \right)^n}{\left(\frac{s}{a} + A - B \right)^{n+1}} \frac{\left(\frac{s}{a} - A - B \right)^n}{\left(\frac{s}{a} + A + B \right)^{n+1}} e^{-\frac{s}{a}x_{nk}}$$

gdzie

$$A = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{l}.$$

Na rys. 2 przykładowo przedstawiono krzywe $S(x)/S_0$ jako funkcje x/l dla $x_0/l = 1, 3, 10, 20$. Przekroje pręta zmieniają się tym wolniej, im większa jest wartość x_0 . A zatem można dobrać takie x_0 , aby spełniony był warunek (2.7).



Rys. 2

Po dokonaniu na funkcji (2.8) odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymujemy

$$(2.9) \quad u(x, t) = \frac{1}{x} v_0 x_0 \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^1 (-1)^k H(at - x_{nk}) \int_{x_{nk}/a}^t e^{-(A+B)\theta + (A-B)x_{nk} + 2aB\theta} \times L_n(2(A-B)(a\theta - x_{nk})) L_n(2(A+B)(at - a\theta)) d\theta,$$

gdzie $L_n(x)$ jest wielomianem Laguerre'a.

Wzór (2.9) można przedstawić w postaci

$$(2.10) \quad u(x, t) = \frac{1}{x} [f(at - x + x_0) - f(at + x - x_0 - 2l)].$$

Funkcja $f(z)$ w kolejnych przedziałach zmienności argumentu z jest następująca:

a) $0 < z < 2l$

$$(2.11) \quad f_1(z) = \frac{v_0 x_0}{aB} e^{-Az} \operatorname{sh} Bz;$$

b) $2l < z < 4l$

$$(2.12) \quad f_2(z) = f_1(z) + \frac{v_0 x_0}{aB} e^{-A(z-2l)} \left\{ \left[1 - 2 \frac{A^2}{B^2} - 2A(z-2l) \right] \operatorname{sh} B(z-2l) + 2 \frac{A^2}{B} (z-2l) \operatorname{ch} B(z-2l) \right\};$$

c) $4l < z < 6l$

$$(2.13) \quad f_3(z) = f_2(z) + \frac{v_0 x_0}{aB} e^{-A(z-4l)} \left\{ 2A^2 \frac{A^2 + B^2}{B^2} (z-4l)^2 \operatorname{sh} B(z-4l) - 4 \frac{A^3}{B} (z-4l)^2 \operatorname{ch} B(z-4l) + 4A \frac{A^2 - B^2}{B^2} (z-4l) \operatorname{sh} B(z-4l) + 6A^2 \frac{B^2 - A^2}{B^3} (z-4l) \operatorname{ch} B(z-4l) + \left(6 \frac{A^4}{B^4} - 6 \frac{A^2}{B^2} + 1 \right) \operatorname{sh} B(z-4l) \right\};$$

d) $6l < z < 8l$

$$(2.14) \quad f_4(z) = f_3(z) + \frac{v_0 x_0}{aB} e^{-A(z-6l)} \left\{ \left(\frac{4}{3} \frac{A^6}{B^3} + 4 \frac{A^4}{B} \right) (z-6l)^3 \operatorname{ch} B(z-6l) - \left(4 \frac{A^5}{B^2} + \frac{4}{3} A^3 \right) (z-6l)^3 \operatorname{sh} B(z-6l) + \left(12 \frac{A^5}{B^3} - 16 \frac{A^3}{B} \right) (z-6l)^2 \operatorname{ch} B(z-6l) - \left(8 \frac{A^6}{B^4} - 6 \frac{A^4}{B^2} - 6A^2 \right) (z-6l)^2 \operatorname{sh} B(z-6l) + \left(20 \frac{A^6}{B^5} - 30 \frac{A^4}{B^3} + 12 \frac{A^2}{B} \right) \times (z-6l) \operatorname{ch} B(z-6l) - \left(12 \frac{A^5}{B^4} - 16 \frac{A^3}{B^2} + 6A \right) (z-6l) \operatorname{sh} B(z-6l) + \left(1 - 20 \frac{A^6}{B^6} + 30 \frac{A^4}{B^4} - 12 \frac{A^2}{B^2} \right) \operatorname{sh} B(z-6l) \right\}.$$

Wzory (2.11)–(2.14) dla $A=B$, tj. gdy $x_0 \rightarrow \infty$, są zgodne z odpowiednimi wzorami dla pręta o stałym przekroju poprzecznym podanymi w pracy [3].

Przemieszczenia, prędkości i odkształcenia dowolnego przekroju rozważanego pręta, po wykorzystaniu wzorów (2.11)–(2.14) w kolejnych przedziałach, są postaci następującej:

a) $at < x - x_0$

$$(2.15) \quad u(x, t) = v(x, t) = \varepsilon(x, t) = 0;$$

b) $x - x_0 < at < 2l - x + x_0$

$$(2.16) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{x} f_1(at - x + x_0), \\ v(x, t) &= \frac{a}{x} f_1'(at - x + x_0), \\ \varepsilon(x, t) &= -\frac{1}{x^2} [f_1(at - x + x_0) + x f_1'(at - x + x_0)]; \end{aligned}$$

c) $2l - x + x_0 < at < 2l + x - x_0$

$$(2.17) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{x} [f_1(at - x + x_0) - f_1(at + x - x_0 - 2l)], \\ v(x, t) &= \frac{a}{x} [f_1'(at - x + x_0) - f_1'(at + x - x_0 - 2l)], \\ \varepsilon(x, t) &= -\frac{1}{x^2} [f_1(at - x + x_0) - f_1(at + x - x_0 - 2l) + \\ &\quad + x f_1'(at - x + x_0) + x f_1'(at + x - x_0 - 2l)]; \end{aligned}$$

d) $2l + x - x_0 < at < 4l - x + x_0$

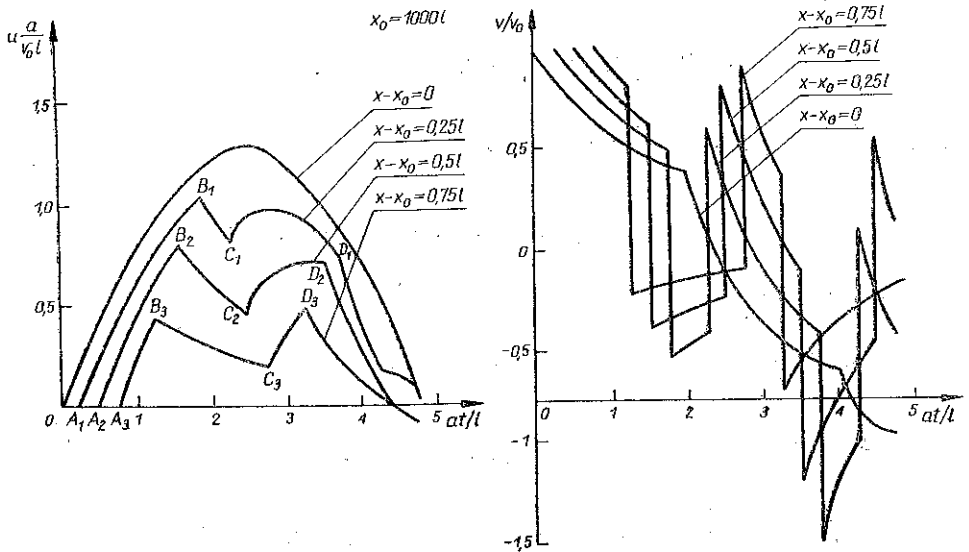
$$(2.18) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{x} [f_2(at - x + x_0) - f_1(at + x - x_0 - 2l)], \\ v(x, t) &= \frac{a}{x} [f_2'(at - x + x_0) + f_1'(at + x - x_0 - 2l)], \\ \varepsilon(x, t) &= -\frac{1}{x^2} [f_2(at - x + x_0) - f_1(at + x - x_0 - 2l) + \\ &\quad + x f_2'(at - x + x_0) + x f_1'(at + x - x_0 - 2l)]; \end{aligned}$$

e) $4l - x + x_0 < at < 4l + x - x_0$

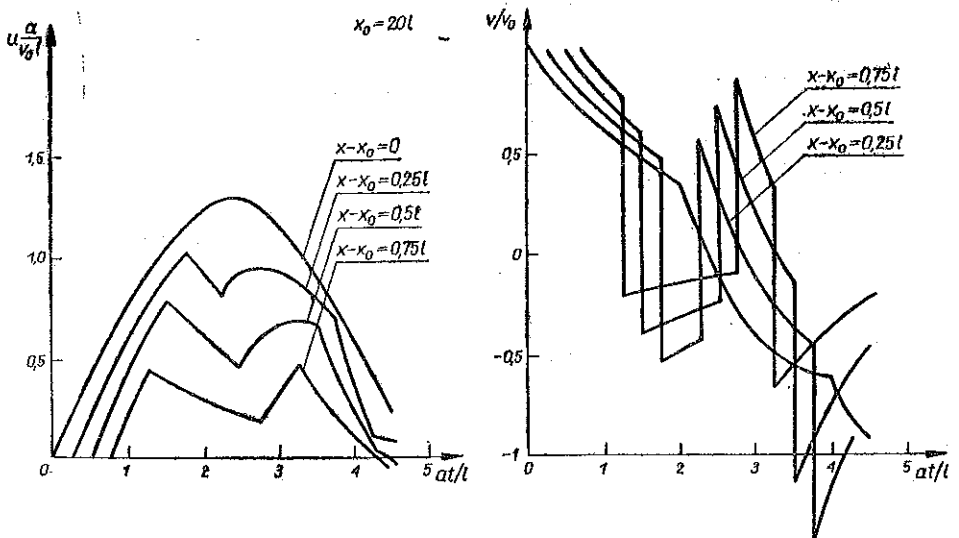
$$(2.19) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{x} [f_2(at - x + x_0) - f_2(at + x - x_0 - 2l)], \\ v(x, t) &= \frac{a}{x} [f_2'(at - x + x_0) - f_2'(at + x - x_0 - 2l)], \\ \varepsilon(x, t) &= -\frac{1}{x^2} [f_2(at - x + x_0) - f_2(at + x - x_0 - 2l) + \\ &\quad + x f_2'(at - x + x_0) + x f_2'(at + x - x_0 - 2l)] \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Wykresy przemieszczeń i prędkości we współrzędnych bezwymiarowych dla $x_0=20l$, $1000l$ oraz $x-x_0=0, 0,25l, 0,75l, 0,5l$ i $\kappa=1/2$ podane są na rys. 3 i 4.

W celu ułatwienia dalszych rozważań oznaczamy na rys. 3 punkty nieciągłości prędkości przekrojów pręta $A_i, B_i, C_i, D_i, i=1, 2, 3$.



Rys. 3



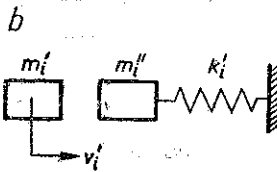
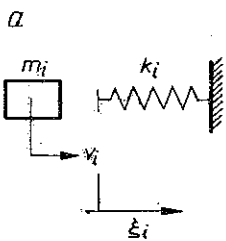
Rys. 4

3. SPROWADZANIE UKŁADU CIĄGŁEGO DO UKŁADÓW DYSKRETNYCH

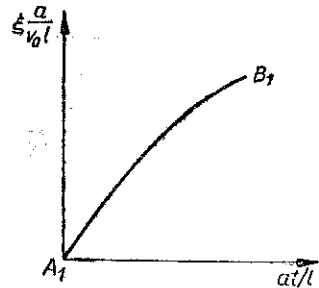
Sprowadzenia układu ciągłego pręta uderzanego masą do układów dyskretnych dokonujemy za pomocą modeli dyskretnych o jednym i dwóch stopniach swobody. Podstawą wyznaczania częstości drgań własnych są przemieszczenia przekrojów pręta, a sztywności zastępczych — energia odkształcenia pręta.

Wymagamy, aby modele dyskretnie opisywały przemieszczenia nieznacznie różniące się od przemieszczeń przekrojów pręta, których wykresy są krzywymi o kilku punktach nieciągłości pochodnych. Dla każdej krzywej, zawartej między dwoma kolejnymi punktami nieciągłości pochodnych, dobieramy odpowiednie parametry modeli dyskretnych. Wobec tego dla każdej krzywej przemieszczeń przekroju pręta otrzymujemy model dyskretny o jednym lub dwóch stopniach swobody, o odcinkowo stałych sztywnościach i masach.

Układy dyskretnie o jednym stopniu swobody przedstawione są na rys. 5. Za pomocą modelu dyskretnego (rys. 5a) uwzględniamy uderzenie z prędkością v_i masy m_i w sprężynę o sztywności k_i , gdzie $i+1$ jest liczbą punktów nieciągłości prędkości danego przekroju pręta w procesie zderzenia. W modelu dyskretnym (rys. 5b) rozpatrujemy dwa przypadki uderzenia masy m'_i w masę m''_i . Pierwszy dotyczy uderzenia plastycznego, tj. $R=0$, drugi uderzenia sprężystego, $R=1$.



Rys. 5



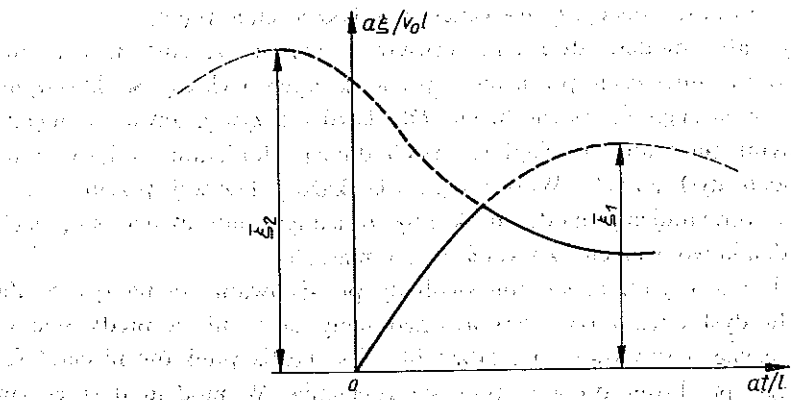
Rys. 6

Rozważmy model dyskretny przedstawiony na rys. 5a. Przemieszczenia masy m_i w układzie współrzędnych ξ_i, t opisuje funkcja

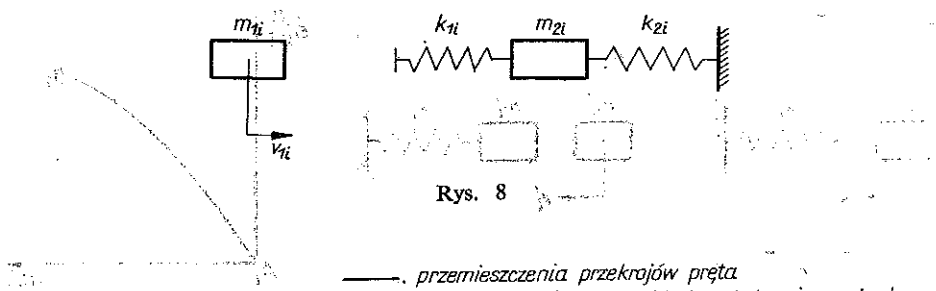
$$(3.1) \quad \xi_i(t) = C_{1i} \cos \omega_i(t - t_{0i}) + C_{2i} \sin \omega_i(t - t_{0i}) + C_{3i}.$$

Funkcje $a\xi_i(t)/v_0 l$ porównujemy z funkcjami przemieszczeń przekrojów pręta zawartymi między punktami nieciągłości prędkości przekrojów pręta (rys. 3 i 4). Dla ułatwienia dalszych rozważań rozpatrujemy na wstępie krzywą przemieszczeń dla $x - x_0 = 0,25l$, $x_0 = 1000 l$, zawartą między punktami A_1, B_1 , jak to pokazano na rys. 6. Stałe C_{1i} i C_{2i} wyznaczamy z warunków początkowych, którymi są przemieszczenia i prędkości dane w punkcie A_1 . Częstość ω_i otrzymujemy z warunku dodatkowego, tj. przy założeniu, że punkt B_1 spełnia równanie (3.1). Należy nadmienić, że przy znacznych różnicach przemieszczeń przekrojów pręta i przemieszczeń wyznaczonych według wzoru (3.1) można osłabić warunki początkowe i dodatkowe tak, aby różnice te były mniejsze od pewnej, danej wartości. W rozpatry-

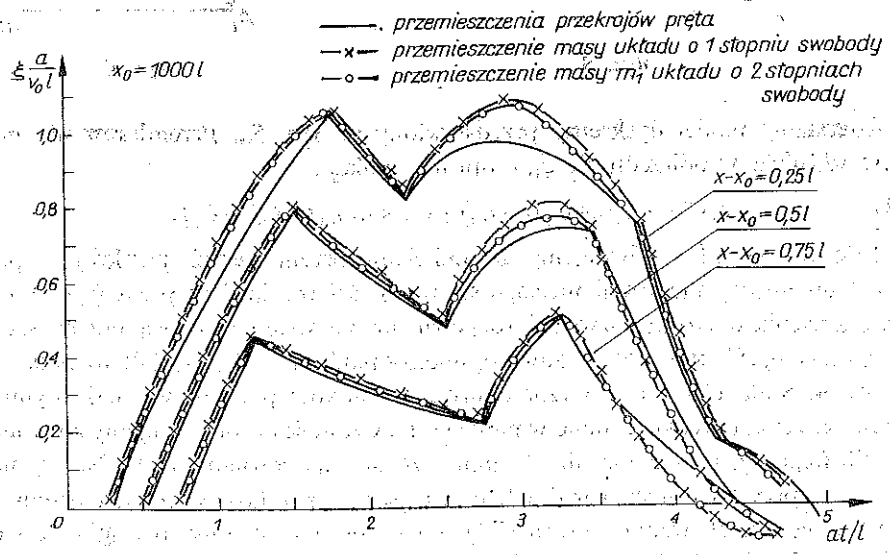
wanym przypadku oś sinusoidy została tak obrona, że pokrywa się z osią z at/l ($t_{01}=0$, $C_{31}=0$). W wielu przypadkach może być ona przesunięta równolegle do osi at/l i nie przechodzić przez żaden punkt nieciągłości prędkości rozważanego przekroju pręta.



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Podobnie postępujemy przy wyznaczaniu stałych C_{1i} , C_{2i} i częstości ω_i ($i=2, 3, 4$) występujących w (3.1) w przypadku krzywych zawartych między punktami B_1-C_1 , C_1-D_1 , D_1-E_1 oraz przy rozważaniu pozostałych przekrojów pręta.

Z równości energii potencjalnej pręta i układu dyskretnego, przedstawionego na rys. 5a, wyznaczamy zastępcze sztywności k_{zi} sprężyny według wzoru

$$(3.2) \quad k_{zi} = \frac{S_0 a^2 \rho}{l} \frac{u_0^2}{\xi_{i \max}^2},$$

gdzie u_0 jest maksymalnym przemieszczeniem końca pręta, a $\xi_{i \max}$ jest maksymalnym przemieszczeniem sprężyny. Na rys. 7 zaznaczono przykładowo wielkości $\xi_i = a \xi_{i \max} / v_0 l$, $i=1, 2$, dla krzywych $A_1 B_1$ i $B_1 C_1$.

Przy sprowadzaniu układu ciągłego do układu dyskretnego, przedstawionego na rys. 8, postępujemy podobnie jak w przypadku układu o jednym stopniu swobody.

Funkcje opisujące drgania układu o dwóch stopniach swobody mają postać

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \xi_{1i}(t) &= a_{1i} \sin[\omega_{1i}(t-t_{0i}) + \eta_{1i}] + a_{2i} \sin[\omega_{2i}(t-t_{0i}) + \eta_{2i}] + C_{1i}, \\ \xi_{2i}(t) &= a_{1i} \mu_{1i} \sin[\omega_{1i}(t-t_{0i}) + \eta_{1i}] + a_{2i} \mu_{2i} \sin[\omega_{2i}(t-t_{0i}) + \eta_{2i}] + C_{2i}. \end{aligned}$$

Z funkcjami przemieszczeń przekrojów pręta porównujemy funkcje $\xi_{1i}(t)$, funkcje $\xi_{2i}(t)$ i ich pochodne zmieniają się w sposób ciągły począwszy od wartości zerowej.

Sztywności zastępcze k_{z1i} , k_{z2i} układu o dwóch stopniach swobody obliczamy wg następującego wzoru:

$$(3.4) \quad k_{z1i} = \frac{S_0 a^2 \rho}{l} \frac{u_0^2}{\max\{[\xi_{1i}(t) - \xi_{2i}(t)]^2 + n \xi_{2i}^2(t)\}},$$

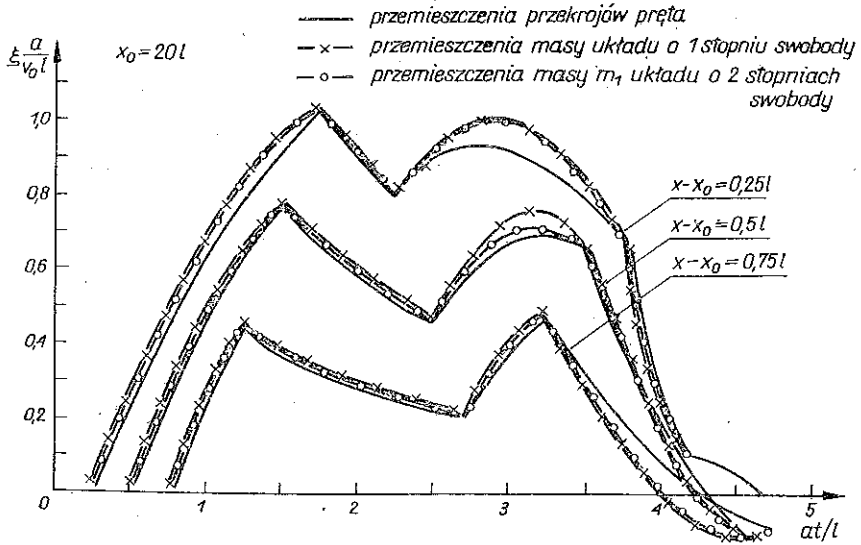
gdzie $n = k_{z1i} / k_{z2i}$.

Na rysunkach 9 i 10 naniesiono wykresy przemieszczeń opisanych wzorami (3.1) i (3.3)₁, które porównano z przemieszczeniami przekrojów pręta odpowiednio dla $x_0 = 20 l$, $1000 l$ oraz $x - x_0 = 0,25 l$; $0,5 l$; $0,75 l$. Wartości przemieszczeń masy układu o jednym stopniu swobody zaznaczono gwiazdkami, masy m_1 układu o dwóch stopniach swobody kółeczkami, a przekrojów pręta linią ciągłą. Na rys. 11 podano przykładowo wykresy prędkości $\dot{\xi}_i(t)/v_0$, $\dot{\xi}_{1i}(t)/v_0$ oraz wykresy prędkości przekrojów pręta dla $x = x_0 = 0,25 l$ i $x_0 = 1000 l$. Obliczenia wykonano przy $a = 5000$ m/s, $v_0 = 1$ m/s, $l = 1$ m. W przypadku układu o dwóch stopniach swobody przyjęto $m_{z1i} = m_{z2i} = m'_{zi}$ i $k_{z1i} = k_{z2i} = k'_{zi}$.

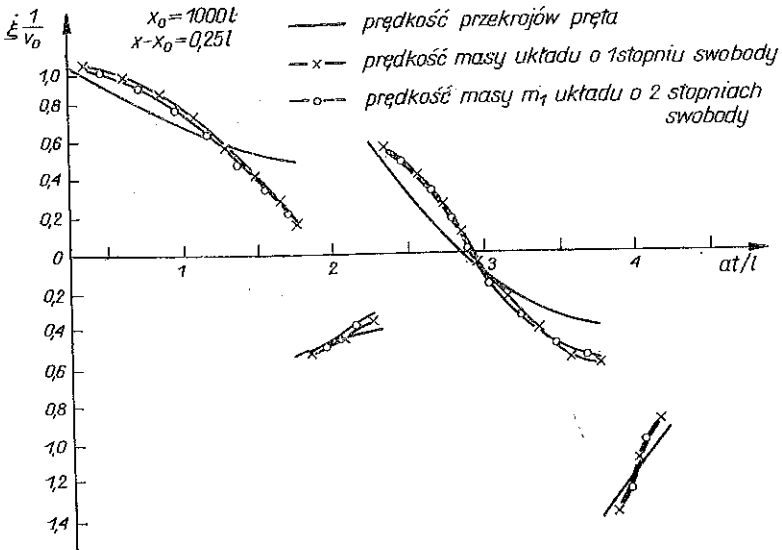
Z wykresu krzywych na rysunkach 9 i 10 wynika, że maksymalna różnica między przemieszczeniami przekrojów pręta a przemieszczeniami obliczonymi wg wzorów (3.1) dla at/l z przedziału (2,25; 3,5) wynosi 10,8% dla $x - x_0 = 0,25 l$; 8,8% dla $x - x_0 = 0,5 l$; 4,3% dla $x - x_0 = 0,75 l$. Maksymalne różnice między przemieszczeniami przekrojów pręta a przemieszczeniami $\xi_{1i}(t)$, wzór (3.3)₁, wynoszą w tym samym przedziale 10,8% dla $x - x_0 = 0,25 l$; 4,24% dla $x - x_0 = 0,5 l$ oraz 4,3% dla $x - x_0 = 0,75 l$.

Z rys. 11 wynika, że maksymalne różnice między modułami prędkości przemieszczeń przekrojów pręta dla $x_0=1000$ l i $x-x_0=0,25$ l a $\xi_t(t)$ i $\xi_{1t}(t)$ wynoszą odpowiednio 12,8% dla at/l w przedziale (0; 1,25), 65% i 50% w przedziale (1,25; 1,75), 14,2% w przedziale (1,75; 2,25) oraz 43% i 35,8% w przedziale (2,25; 4,25).

Na rys. 12 pokazano wykresy funkcji $a_{\xi_{2t}}(t)/v_0 l$, wzór (3.3)₁, dla $x-x_0=0,25$ l; $x-x_0=0,5$ l; $x-x_0=0,75$ l i $x_0=1000$ l. W tablicy nr 1 podano we współrzędnych



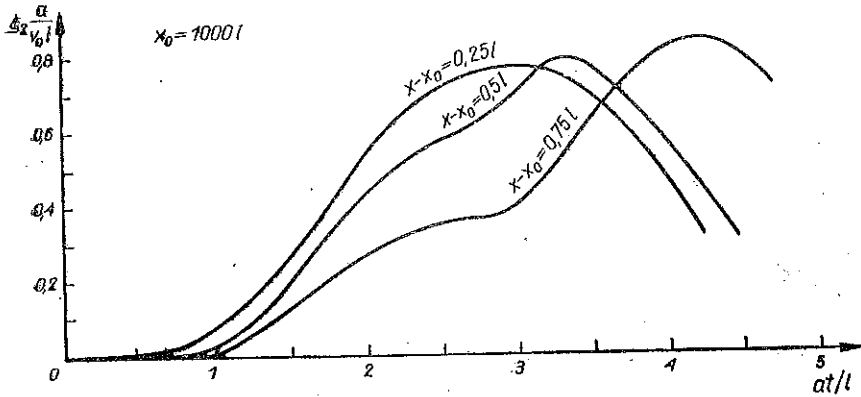
Rys. 10



Rys. 11

bezwymiarowych wartości początkowe $\bar{\xi}_0 = a\xi_1/v_0$ i $\bar{v}_0 = \dot{\xi}_0/v_0$, dla układu o jednym stopniu swobody wartości zastępcze $\bar{\omega}_z = l\omega_z/a$, $\bar{k}_z = lk_z/S_0 a^2 \rho$, $\bar{m}_z = m_z/\rho S_0 l$ oraz dla układu o dwóch stopniach swobody wartości zastępcze

$$\bar{\omega}_{z1} = \frac{l}{a} \omega_{z1}, \quad \bar{\omega}_{z2} = \frac{l}{a} \omega_{z2}, \quad \bar{k}'_z = \frac{l}{S_0 a^2 \rho} k'_z, \quad \bar{m}'_z = \frac{1}{\rho S_0 l} m'_z.$$

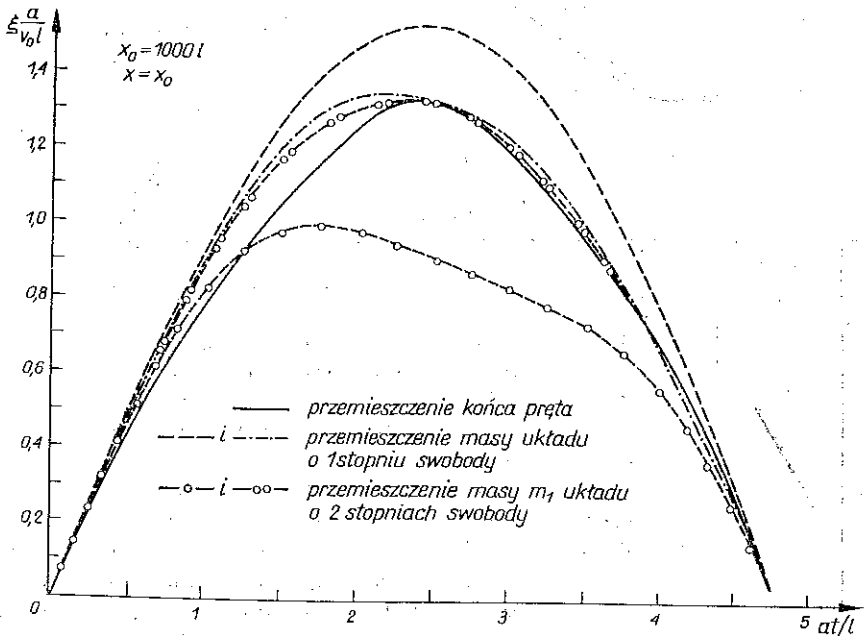


Rys. 12

Tablica 1

$\frac{x_0}{l}$	$\frac{x-x_0}{l}$	i	$\bar{\xi}_0$	\bar{v}_0	$\bar{\omega}_z$	\bar{k}_z	\bar{m}_z	$\bar{\omega}_{z1}$	$\bar{\omega}_{z2}$	\bar{k}'_z	\bar{m}'_z
20	0,25	1	0,000	0,987	0,945	1,549	1,735	0,620	1,624	1,799	1,787
		2	1,033	-0,538	1,614	0,905	0,347	0,688	1,801	0,988	0,797
		3	0,792	0,558	1,857	1,420	0,411	1,859	4,867	2,558	0,283
		4	0,680	-1,438	2,221	0,959	0,194	1,656	4,335	1,297	0,143
	0,5	1	0,000	0,976	1,179	2,466	1,774	0,758	1,985	2,687	0,260
		2	0,765	-0,393	1,117	1,355	1,086	0,462	1,210	0,944	1,689
		3	0,449	0,726	2,369	2,961	0,527	2,164	5,667	2,822	0,230
		4	0,662	-1,137	1,503	0,839	0,372	1,236	3,236	1,085	0,271
	0,75	1	0,000	0,964	1,699	5,249	1,818	1,070	2,803	5,505	1,836
		2	0,426	-0,216	0,893	3,788	5,086	0,359	0,941	1,831	5,428
		3	0,191	0,854	3,106	7,784	0,807	2,124	5,561	4,350	0,471
		4	0,466	-0,677	1,174	1,554	1,128	0,565	1,480	0,937	1,121
1000	0,25	1	0,000	0,999	0,934	1,546	1,772	0,612	1,602	1,791	1,826
		2	1,055	-0,528	1,691	0,946	0,331	0,716	1,876	1,048	0,781
		3	0,821	0,588	1,938	1,341	0,357	1,918	5,022	2,575	0,267
		4	0,749	-1,430	2,220	0,911	0,185	1,721	4,506	1,365	0,174
	0,5	1	0,000	0,999	1,170	2,426	1,772	0,751	1,967	2,628	1,779
		2	0,786	-0,393	1,169	1,404	1,028	0,481	1,261	0,999	1,649
		3	0,477	0,761	2,326	2,735	0,505	2,065	5,406	2,831	0,253
		4	0,714	-1,145	1,505	0,813	0,359	1,202	3,147	1,054	0,278
	0,75	1	0,000	0,999	1,693	5,080	1,772	1,066	2,791	5,320	1,788
		2	0,442	-0,221	0,933	3,838	4,409	0,374	0,981	1,897	5,181
		3	0,208	0,895	3,085	7,129	0,749	2,080	5,446	4,337	0,382
		4	0,498	-0,692	1,176	1,498	1,084	0,560	1,466	0,945	1,151

Powyższe rozważania zostały przeprowadzone przy założeniu, że masa uderza bezpośrednio w sprężynę. W przypadku sprowadzenia układu ciągłego pręta uderzanego wzdłużnie masą do układu dyskretnego o jednym stopniu swobody można również wykorzystać model przedstawiony na rys. 5b, w którym masa m_1' uderza masę m_1'' przy współczynniku restytucji $R=0$ lub $R=1$. Częstotliwości drgań własnych, sztywności zastępcze i zastępcze masy skupione wyznaczamy jak powyżej. Różnica polega jedynie na tym, że przy $R=0$ prędkość początkowa masy m_1 wynosi $v_1' = v_1(1 + m_1''/m_1')$ oraz istnieje pewna dowolność w doborze wartości masy m_1'' , natomiast przy $R=1$ masy m_1' i m_1'' muszą być równe, a prędkość początkowa $v_1' = v_1$. Np. parametry modelu dyskretnego (rys. 5b) dla końca pręta $x=x_0$ są następujące: dla $R=0$ i $\bar{m}=0,33$; $\bar{k}=0,77$; $\bar{m}'=1,45$; $\bar{v}'=1,23$; dla $R=1$ $\bar{k}=0,77$; $\bar{m}'=\bar{m}''=1,78$; $\bar{v}'=1$.



Rys. 13

W zakończeniu podano na rys. 13 wykres przemieszczeń końca pręta $x-x_0$ dla $x_0=1000 l$ (linia ciągła) oraz układów dyskretnych o jednym (linia — — —) i dwóch stopniach swobody (linia — — o — —), które otrzymano przy spełnieniu warunków początkowych oraz przemieszczeń końcowych. Maksymalne różnice przemieszczeń wynoszą odpowiednio 15,2% i 31%. Na rysunku tym nanięsono również wykresy przemieszczeń dla układów o jednym stopniu swobody (linia — — —) i dwóch stopniach swobody (linia — — o o — —), które spełniają maksymalne przemieszczenia końca pręta. W tym przypadku maksymalne różnice przemieszczeń wynoszą odpowiednio 13,8% i 10,5%.

4. WNIOSKI

Z przeprowadzonych rozważań wynikają następujące praktyczne wnioski:

1. Rozpatrywany układ o parametrach rozłożonych w sposób ciągły można sprowadzić do układu modeli dyskretnych o jednym i wielu stopniach swobody tak, aby modele dyskretnie z pewnym przybliżeniem opisywały przemieszczenia dowolnego przekroju pręta.

2. Z porównania krzywych przemieszczeń wynika, że układ o parametrach rozłożonych w sposób ciągły wystarczy sprowadzić do układu modeli dyskretnych o jednym stopniu swobody.

3. Różnice przemieszczeń, opisanych modelami o jednym i dwóch stopniach swobody, w wielu przypadkach są bardzo małe.

4. Różnice między przemieszczeniami przekrojów pręta i układu o dwóch stopniach swobody, poza przypadkiem przekroju $x=x_0$, są mniejsze od różnic między przemieszczeniami przekrojów pręta i układu o jednym stopniu swobody.

5. Przy znacznych różnicach między przemieszczeniami układu ciągłego i układów dyskretnych można zwiększyć liczbę modeli dyskretnych, jak przykładowo pokazano dla przekroju $x=x_0$.

6. Ruch układu ciągłego uderzanego masą można badać za pomocą modeli dyskretnych o odcinkowo stałych parametrach. Takie modele dyskretnie ułatwią przeprowadzenie badań oscylacyjności i stabilności ruchu pręta.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман и др., *Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*, Москва 1952.
2. E. WŁODARCZYK, *Rozprzestrzenianie się i odbicie jedno- i dwuwymiarowych fal naprężenia w ośrodkach plastycznych*, Dodatek do Biuletynu WAT, nr 2 (198), 1969.
3. W. GOLDSMITH, *Impact. The theory and physical behaviour of colliding solids*, London 1960.
4. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.

Резюме

СВЕДЕНИЕ СПЛОШНОЙ СИСТЕМЫ К ДИСКРЕТНЫМ СИСТЕМАМ В СЛУЧАЕ УДАРА МАССЫ В СТЕРЖЕНЬ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В работе проведена попытка сведения сплошной системы, какой является стержень конечной длины и переменного сечения продольно ударенный массой, к системе дискретных моделей с одной и двумя степенями свободы. Определены значения эквивалентных частот колебаний, жесткости и масс дискретных систем, используя аналитические формулы перемещений и скорости стержня. Кроме этого, при определении эквивалентных значений параметров, требуется, чтобы дискретные системы с некоторым приближением описывали перемещения рассматриваемых сечений стержня.

SUMMARY

REDUCING OF THE CONTINUOUS SYSTEM TO THE DISCRETE SYSTEMS IN A CASE OF IMPACT OF MASS ON THE ROD OF VARIABLE CROSS-SECTION

An attempt was made to reduce the continuous system, represented by a finite rod of variable cross-section struck longitudinally by a mass, to the discrete models with one or two degrees of freedom. The values of the auxiliary frequency of vibrations, rigidities and masses of discrete systems are evaluated by means of analytical formulae for rod displacements and velocities. Moreover, in determining of the auxiliary values of the parameters it was required that the discrete systems could described the displacements of the considered cross-sections of the rod with a required order of approximation.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 września 1975 r.
