

KOŁOWY ELIMINATOR DRGAŃ W RUCHU PŁASKIM

CZESŁAW CEMPEL I FRANCISZEK SORDYL (POZNAŃ)

Praca poświęcona jest eliminacji drgań korpusów maszyn wirnikowych. Zakładając, że w pierwszym przybliżeniu ruch korpusu można zmodelować jako ruch płaski bryły, zaproponowano minimalizację jego oscylacji za pomocą tzw. kołowego eliminatora drgań. Jak wynika z rozważań analitycznych, umiejscowienie nastrojonego eliminatora w osi wirowania siły wymuszającej likwiduje całkowicie ruch translacyjny bryły i zapewnia ograniczoną jej ruch wahadłowego. Okazuje się dalej, że ten ruch resztkowy można minimalizować drogą doboru charakterystyk masowo-geometrycznych bryły i odległości osi wirowania od jej środka ciężkości.

1. WSTĘP

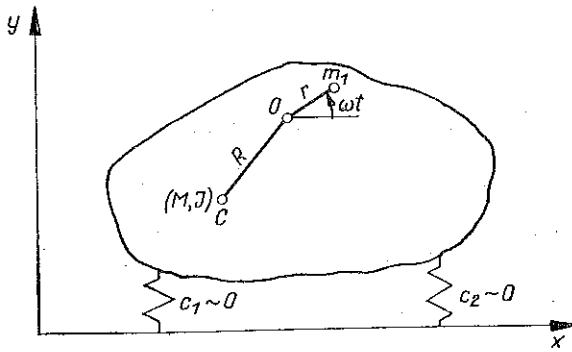
Jak wiadomo, pełne wyważenie maszyn wirnikowych jest w praktyce nieosiągalne. Stąd też w każdym przypadku mamy do czynienia z przekazywaniem wymuszeń dynamicznych z wirnika przez jego łożyska na korpus maszyny. Wymuszenia te w najprostszym przypadku mają postać wirującego wektora przy niewyważeniu statycznym lub wirującej pary sił przy niewyważeniu dynamicznym. Tak więc siły wymuszające przyłożone do korpusu maszyny leżą zawsze w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu wirnika. Jeśli ograniczymy się do niewyważenia statycznego i pominiemy na chwilę reakcje dynamiczne podpór korpusu maszyny, to jego ruch będzie zgodny z charakterem wymuszeń. Stąd też można wnioskować, że ruch każdego przekroju korpusu będzie płaski.

Konieczność eliminacji drgań korpusów maszyn jest oczywista, jednak ich charakter ruchu następczą trudności w doborze typu eliminatora. Możliwe do zastosowania w tym przypadku eliminatory dynamiczne cechują się jednokierunkowością działania, co czyni je nieprzydatnymi w ruchu płaskim. Z kolei eliminatory wahadłowe [1 i 2] wymagają układów rozruchowych i mogą pracować statecznie dopiero powyżej pewnej amplitudy drgań. Nasuwa się więc myśl takiej modyfikacji eliminatora dynamicznego — jednokierunkowego, aby jego sztywność dla odkształceń leżących w jednej płaszczyźnie była jednakowa. Badanie efektywności takiego eliminatora, nazwanego kołowym, oraz jego optymalna lokalizacja w stosunku do osi wirnika i środka ciężkości układu wirnik-korpus jest przedmiotem niniejszej pracy.

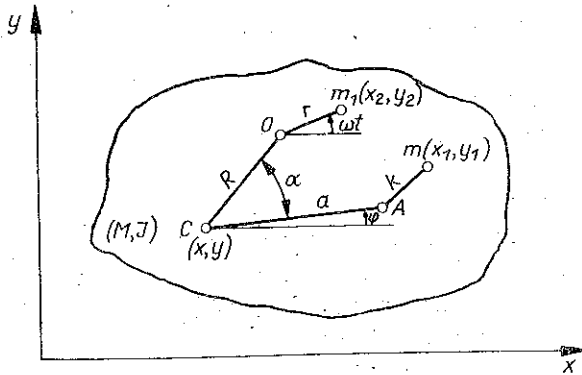
2. RÓWNANIA RUCHU MODELU

Opisany wyżej przypadek niewyważonej maszyny wirnikowej można w pierwszym przybliżeniu zmodelować w postaci bryły o masie M i momencie bezwładności J względem jej środka ciężkości C . Bryła ta, podparta sprężynami o małej sztyw-

ności c_1 ; ($c_2 \approx 0$), poddana jest wymuszeniu bezwładnościowemu od wirującej wokół osi obrotu O masy m_1 . Niech przy tym częstość wirowania wynosi $\omega = \text{const}$, promień niewyważenia r , odległość zaś osi obrotu O od środka ciężkości C jest równa R tak jak na rys. 1.



Rys. 1



Rys. 2

Jak już powiedziano sztywność sprężyn podporowych jest mała, w związku z tym częstość drgań własnych w ruchu płaskim będzie również mała. Przyjmując założenie $\omega \geq 3\omega_0$, gdzie ω_0 jest najwyższą częstością drgań własnych, możemy w dalszym ciągu zaniedbać reakcje dynamiczne sprężyn podporowych i traktować ruch rozpatrywanego układu jako swobodny bez działania sił zewnętrznych. W efekcie tych założeń upraszczających ruch układu jako modelu maszyny w dowolnym jej przekroju będzie płaski.

Przejdźmy obecnie do eliminacji drgań układu i załóżmy, że w odległości a od środka ciężkości zamontowano eliminator dynamiczny o kołowej charakterystyce sprężystej o współczynniku k i masie eliminatora m . Oznaczmy chwilowe położenie interesujących nas elementów układu następująco: φ — kąt obrotu bryły wokół środka ciężkości C , x, y — współrzędne środka ciężkości; x_1, y_1 — współrzędne masy eliminatora m ; x_2, y_2 — współrzędne masy niewyważonej m_1 . Rozpatrywaną sytuację przedstawia poglądowo rys. 2.

Łatwo sprawdzić, że energia kinetyczna i potencjalna układu wyrazi się następująco:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_1(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + J\dot{\varphi}^2], \\ V &= \frac{k}{2} [(x_1 - x - a \cos \varphi)^2 + (y_1 - y - a \sin \varphi)^2], \\ (\dot{\quad}) &= \frac{d}{dt} (\quad). \end{aligned}$$

Z kolei współrzędne masy wirującej m_1 można wyrazić jako funkcję pozostałych współrzędnych:

$$(2.2) \quad x_2 = x + R \cos(\alpha + \varphi) + r \cos \omega t, \quad y_2 = y + R \sin(\alpha + \varphi) + r \sin \omega t.$$

Wykorzystując powyższe wzory w wyrażeniach na energię i stosując równania Lagrange'a, po przekształceniach uzyskamy równania ruchu układu:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (M + m_1)\ddot{x} - m_1 R\ddot{\varphi} \sin(\alpha + \varphi) - m_1 R\dot{\varphi}^2 \cos(\alpha + \varphi) + \\ + k(x + a \cos \varphi - x_1) &= m_1 r \omega^2 \cos \omega t, \\ (M + m_1)\ddot{y} + m_1 R\ddot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi) - m_1 R\dot{\varphi}^2 \sin(\alpha + \varphi) + \\ + k(y + a \sin \varphi - y_1) &= m_1 r \omega^2 \sin \omega t, \\ m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x - a \cos \varphi) &= 0, \quad m\ddot{y}_1 + k(y_1 - y - a \sin \varphi) = 0, \\ (J + m_1 R^2)\ddot{\varphi} + m_1 R\ddot{x} \sin(\alpha + \varphi) + m_1 R\ddot{y} \cos(\alpha + \varphi) + ka[(x_1 - x) \sin \varphi - \\ - (y_1 - y) \cos \varphi] + m_1 R r \omega^2 [\sin(\alpha + \varphi) \cos \omega t - \cos(\alpha + \varphi) \sin \omega t] &= 0. \end{aligned}$$

Jak widać, uzyskaliśmy nieliniowy układ równań o zmiennych współczynnikach. Celem jego uproszczenia wprowadźmy pewne założenia wynikające z własności geometrycznych mas układu, mianowicie $m_1 \ll M$, $m_1 R^2 \ll J$, co daje nierówności

$$(2.4) \quad \frac{m_1}{M} \ll 1, \quad \frac{m_1 R^2}{J} \ll 1.$$

Po wykorzystaniu tych nierówności z układu (2.3) można otrzymać

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{M}(x + a \cos \varphi - x_1) &= \frac{F}{M} \cos \omega t, \quad \ddot{y} + \frac{k}{M}(y + a \sin \varphi - y_1) = \frac{F}{M} \sin \omega t, \\ \ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x - a \cos \varphi) &= 0, \quad \ddot{y}_1 + \frac{k}{m}(y_1 - y - a \sin \varphi) = 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{ka}{J}(x_1 - x) \sin \varphi - \frac{ka}{J}(y_1 - y) \cos \varphi &= \\ &= \frac{FR}{J} [\cos(\alpha + \varphi) \sin \omega t - \sin(\alpha + \varphi) \cos \omega t], \end{aligned}$$

gdzie $F = m_1 r \omega^2$ jest amplitudą bezwładnościowej siły wymuszającej.

Jak widać, uzyskaliśmy istotne uproszczenie równań ruchu, jednak w dalszym ciągu nieliniowości pozostały związane z ruchem wahadłowym całej bryły. Łatwo pokazać, że prawe strony równań ruchu w świetle przyjętych założeń są małe; w związku z tym możemy przyjąć, że ruch wahadłowy będzie miał tak małą amplitudę, że linearyzacja zerowego rzędu

$$(2.6) \quad \cos \varphi \approx 1, \quad \sin \varphi \approx \varphi$$

będzie usprawiedliwiona.

W świetle powyższych uproszczeń otrzymamy ostateczną postać równań ruchu

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{M} (x + a - x_1) &= \frac{F}{M} \cos \omega t, & \ddot{y} + \frac{k}{M} (y + a\varphi - y_1) &= \frac{F}{M} \sin \omega t, \\ \ddot{x}_1 + \frac{k_1}{m} (x_1 - x - a) &= 0, & \ddot{y}_1 + \frac{k}{m} (y_1 - y - a\varphi) &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{ka}{J} (x_1 - x) \varphi - \frac{ka}{J} (y_1 - y) + \varphi \frac{FR}{J} (\sin \alpha \sin \omega t + \cos \alpha \cos \omega t) &= \\ &= \frac{FR}{J} (\cos \alpha \sin \omega t - \sin \alpha \cos \omega t). \end{aligned}$$

Jak wynika z powyższego, pozostały jedynie do uwzględnienia i interpretacji proste nieliniowości geometryczne, konsekwencją zaś przyjętego układu współrzędnych i uproszczeń jest niezależność poziomego ruchu układu x, x_1 od ruchu obrotowego bryły. Tę pożądaną własność uwzględnimy przy rozwiązywaniu równań ruchu (2.7).

3. ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE ZAGADNIENIA

Korzystając z faktu niezależności ruchu wahadłowego od ruchu poziomego układu, można równania ruchu (2.7) rozbić na dwa prawie niezależne układy równań postaci:

$$(3.1) \quad \ddot{x} + \frac{k}{M} (x + a - x_1) = \frac{F}{M} \cos \omega t, \quad \ddot{x}_1 + \frac{k}{m} (x_1 - x - a) = 0;$$

$$(3.2) \quad \ddot{y} + \frac{k}{M} (y + a\varphi - y_1) = \frac{F}{M} \sin \omega t, \quad \ddot{y}_1 + \frac{k}{m} (y_1 - y - a\varphi) = 0,$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{ka}{J} (x_1 - x) \varphi - \frac{ka}{J} (y_1 - y) + \frac{FR}{J} \varphi (\sin \alpha + \sin \omega t + \cos \alpha \cos \omega t) &= \\ &= \frac{FR}{J} (\cos \alpha \sin \omega t - \sin \alpha \cos \omega t). \end{aligned}$$

Rozwiązując pierwszy układ równań (3.1) przy założeniu ruchu ustalonego znajdziemy

$$(3.3) \quad x = \frac{F \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) \cos \omega t}{M \omega^2 \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k}{M} \right)}, \quad x_1 - x = a + \frac{F \cos \omega t}{M \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k}{M} \right)}$$

Po podstawieniu ostatniego wyrażenia (3.3) do układu (3.2) uzyskamy niezależny układ równań, którego rozwiązanie znajdziemy metodą Galerkinia. Niewiadomych y, y_1, φ poszukujemy w postaci ogólnej

$$(3.4) \quad q_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_k(t), \quad i=1, 2, 3, \dots,$$

gdzie $\varphi_k(t)$ są znanymi funkcjami ortogonalnymi, a a_{ik} poszukiwanymi współczynnikami rozkładu.

Oznaczmy przez $R_{ik}(t)$ resztę każdego równania (3.2) wynikającą z podstawienia przewidywanych rozwiązań (3.4). Jak wiadomo, w metodzie Galerkinia żądamy, aby każda reszta była ortogonalna do wszystkich funkcji $\varphi_k(t)$. Stąd też mamy układ równań

$$(3.5) \quad \int_0^{2\pi/\omega} R_{ik}(t) \varphi_k(t) dt = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad i=1, 2, 3, \dots$$

Przyjmując przybliżone rozwiązania (3.4) w postaci

$$(3.6) \quad y = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t, \quad y_1 = b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t, \quad \varphi = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

i wykorzystując warunki ortogonalności (3.5) uzyskamy następujący układ na wyznaczenie niewiadomych współczynników rozkładu:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \left(\frac{k}{M} - \omega^2 \right) a_1 - \frac{k}{M} b_1 + \frac{ka}{M} c_1 &= 0, & -\frac{k}{m} a_1 + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) b_1 - \frac{ka}{m} c_1 &= 0, \\ \frac{ka}{J} a_1 - \frac{ka}{J} b_1 + \left(\frac{ka^2}{J} - \omega^2 \right) c_1 &= -\frac{FR}{J} \sin \alpha, \\ \left(\frac{k}{M} - \omega^2 \right) a_2 - \frac{k}{M} b_2 + \frac{ka}{M} c_2 &= \frac{F}{M}, & -\frac{k}{m} a_2 + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) b_2 - \frac{ka}{m} c_2 &= 0, \\ \frac{ka}{J} a_2 - \frac{ka}{J} b_2 + \left(\frac{ka^2}{J} - \omega^2 \right) c_2 &= \frac{FR \cos \alpha}{J}. \end{aligned}$$

Poszukując ruchu bezwzględnego bryły, a więc współczynników $a_i, c_i, i=1, 2$, po przekształceniach znajdziemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{FRka \sin \alpha}{JM\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k}{M} - \frac{ka^2}{J} \right)}, & a_2 &= -\frac{F \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{ka^2}{J} + \frac{kR \cos \alpha}{J} \right)}{M\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{k}{M} - \frac{k}{m} - \frac{ka^2}{J} \right)}, \\ c_1 &= \frac{FR \sin \alpha \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k}{M} \right)}{J\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k}{M} - \frac{ka^2}{J} \right)}, & c_2 &= \frac{FR \cos \alpha \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k}{M} \right)}{J\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \frac{k}{M} - \frac{ka^2}{J} \right)}. \end{aligned}$$

Analizując uzyskane rezultaty (3.3), (3.6) i (3.8) pod kątem widzenia minimalizacji drgań bryły korpusu, łatwo stwierdzić, że przy dostrojeniu eliminatora kołowego do częstości wymuszenia, tzn. jeżeli

$$(3.9) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

to

$$(3.10) \quad \begin{aligned} x &\equiv 0, \\ y &= \frac{Fa(R \cos \alpha - a) \sin \omega t - FRa \sin \alpha \cos \omega t}{\omega^2 (J + Ma^2)}, \\ \varphi &= \frac{FR(\sin \alpha \cos \omega t - \cos \alpha \sin \omega t)}{\omega^2 (J + Ma^2)}. \end{aligned}$$

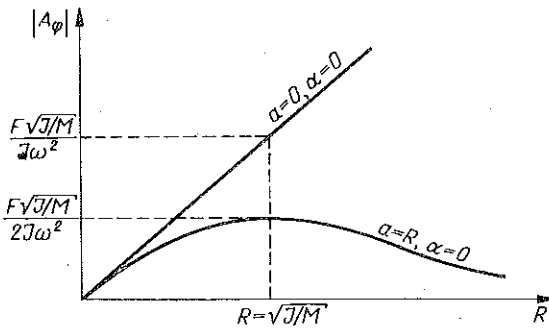
Jak widać z uzyskanych wyników, amplituda ruchu pionowego i wahadłowego bryły zależy w głównej mierze od parametrów lokalizacji eliminatora (a, α, R). Zmieniając te parametry można znaleźć dwa przypadki zerowania się ruchu pionowego:

$$y \equiv 0, \text{ jeżeli } \begin{cases} a=0, \alpha=0 & (\text{eliminators w } \text{środku cię\text{ż}kości } C), \\ a=R, \alpha=0 & (\text{eliminators w osi obrotu } O). \end{cases}$$

Jednak w każdym z powyższych przypadków amplituda ruchu wahadłowego bryły jest różna od zera. Wyniki powyższe można podsumować w następującej postaci: jeżeli $\omega = \sqrt{k/m}$, to

$$(3.11) \quad \begin{aligned} x &\equiv 0, \quad y \equiv 0, \quad \varphi = A_\varphi \sin \omega t, \\ A_\varphi &= \begin{cases} -\frac{FR}{J\omega^2}, & a=0, \alpha=0, \\ -\frac{FR}{\omega^2 (J + MR^2)}, & a=R, \alpha=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Drogą prostych rozważań algebraicznych można pokazać, że amplituda ruchu wahadłowego bryły z eliminatorem w osi obrotu masy niewyważonej jest zawsze mniejsza od amplitudy ruchu wahadłowego bryły z eliminatorem w jej środku masy. Jakościową ilustrację tej zależności przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3

Jak widać z rysunku, maksymalnie możliwa amplituda drgań wahadłowych wynosi ($\alpha=R, \alpha=0$)

$$(3.12) \quad A = \frac{1}{2} \frac{F\sqrt{J/M}}{J\omega^2} = \frac{m_1 r}{2\sqrt{JM}}$$

i można ją otrzymać, jeśli odległość środka ciężkości C od osi obrotu O wynosi $R = \sqrt{J/M}$. Dla wszystkich innych wartości R amplituda ta jest zawsze mniejsza od wartości (3.12).

4. WNIOSKI

Przeprowadzone rozważania ogólne i ich wyniki upoważniają do sformułowania następujących wniosków:

1. Ruch płaski bryły spowodowany działaniem siły wirującej może być eliminowany za pomocą tzw. kołowego dynamicznego eliminatora drgań.
2. Umieszczenie nastrojonego eliminatora w osi wirowania siły wymuszającej likwiduje całkowicie ruch translacyjny bryły i zapewnia ograniczoność ruchu wahadłowego wokół środka ciężkości.
3. Amplitudę ruchu wahadłowego można uczynić dowolnie małą drogą doboru charakterystyk masowo-geometrycznych bryły (J, M) i odległości osi wirowania od środka ciężkości.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. WAPIENNIK, *Analiza i synteza pewnych układów mechanicznych z tłumieniem dynamicznym*, Praca doktorska, Kraków 1975.
2. И. И. Блехман, *Синхронизация динамических систем*, Наука, 625-658, Москва 1971.

Резюме

КРУГОВОЙ ЭЛИМИНАТОР КОЛЕБАНИЙ В ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Работа посвящена элиминации колебаний корпусов роторных машин. Предполагая, что в первом приближении движение корпуса можно моделировать как плоское движение тела, предложена минимализация его осцилляций при помощи т. наз. кругового элиминатора колебаний. Как следует из аналитических рассуждений, размещение настроенного элиминатора в оси вращения вынуждающей силы полностью ликвидирует трансляционное движение тела и обеспечивает ограниченность его маятникового движения. Оказывается дальше, что это остаточное движение можно минимизировать путем подбора массо-геометрических характеристик тела и расстояния оси вращения от его центра тяжести.

SUMMARY

CIRCULAR ELIMINATOR OF VIBRATIONS IN A PLANE MOTION

The paper deals with the elimination of vibrations in the frame of whirling machines. Assuming that in a first approximation the motion of the body may be modeled by a plane motion of a body, a minimization of its oscillations by means of the so called circular eliminators of vibrations is proposed. As it results from the analytical considerations, the placing of the tuned eliminator in the axis of whirling force liquidates entirely the translation motion of the frame and ensures the limitation of its oscillatory motion. It also appears that this remainder of motion may be minimized by a proper choice of the geometrical characteristics of the lump and a distance of whirling axis from its gravity center.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 maja 1975 r.