

ANALIZA I SYNTEZA DYSKRETNO-CIĄGŁEGO UKŁADU MECHANICZNEGO

MARIAN S A R N A (BIELSKO-BIAŁA)

W pracy przedstawiono rozważania dotyczące dyskretno-ciągłego układu mechanicznego, składającego się z pręta z dołączonym szeregiem oscylatorów harmonicznyc. Własności materiału pręta opisane są liniowym modelem Hooke'a, sprężyny oscylatorów mają charakterystyki liniowe. Przyjęto hipotezę płaskich przekrojów poprzecznych pręta. Rozpatrzono współdziałanie pręta z oscylatorami harmonicznymi podczas propagacji płaskiej sprężystej fali naprężeń, wywołanej osiowym uderzeniem w pręt. Dla uzyskania przejrzystego obrazu zachodzących zjawisk (pominięcie nakładania się fal odbitych z falą padającą) wprowadzono ograniczenie co do czasu działania wymuszenia. Problem ilościowej syntezy optymalizacyjnej postawiono jako dobór parametrów geometrycznych układu, zapewniający maksymalne wartości siły oddziaływania pręta na masę skupioną. Badany układ mechaniczny reprezentuje w pierwszym przybliżeniu własności układu elektrod zbiorczych elektrofiltru.

1. WSTĘP

W urządzeniach służących do ochrony naturalnego środowiska człowieka, zwanych elektrofiltrami, jednym z istotnych elementów wyposażenia, służącym do gromadzenia wytrąconych zanieczyszczeń, są elektrody zbiorcze [1, 2]. Stanowią one układ profilowanych prętów zawieszonych wahadłowo, w dolnej zaś części połączonych przegubowo z poziomo usytuowanym prętem, w który uderza osiowo młotek przerzutowy [3].

Podstawowym problemem technicznym elektrod zbiorczych jest należyte ich oczyszczanie, co osiągnąć jest drogą wzbudzenia drgań mechanicznych. Uzyskanie optymalnych przyśpieszeń elektrod jest niezbędne dla osiągnięcia wysokiej skuteczności odpylania elektrofiltrów. Wypływa stąd konieczność prowadzenia badań nad układem mechanicznym, jaki stanowią elektrody zbiorcze.

W badaniu wzbudzenia drgań tegoż układu przyjmiemy model złożony z półnieskończonego jednorodnego pręta o własnościach materiału, opisanych modelem Hooke'a, z dołączonymi oscylatorami harmonicznymi [4] (rys. 1). Poszczególne masy skupione połączone są sztywno z przekrojami pręta $x=l_1, l_2, l_3 \dots$

Rozpatrzmy oddziaływanie na pręt z oscylatorami harmonicznymi podczas propagacji płaskiej sprężystej fali naprężeń, rozchodzącej się w dodatnim kierunku osi Ox . W przypadku pręta o skończonej długości należałoby uwzględnić falę naprężeń, odbitą od przeciwległego końca pręta [5]. Przyjmujemy hipotezę płaskich przekrojów poprzecznych pręta, co związane jest z ograniczeniem czasu działania impulsu wymuszającego na końcu pręta. Ze szczegółowych badań wynika [6 i 7], że w prętach o przekroju kołowym czy prostokątnym przekrój poprzeczny w ogólnos-

ci ulega deplanacji. Przyjęcie płaskich przekrojów poprzecznych pręta jest dopuszczalne, gdy czas działania wymuszenia jest taki, że długość odcinka pręta objętego zaburzeniem $l = at$ ($a = \sqrt{E/\rho}$ oznacza prędkość propagacji fali) nie jest mniejsza niż 3 do 4 średnice pręta [8].

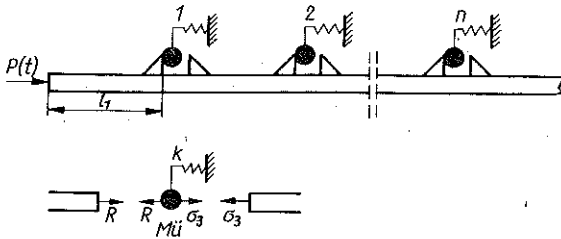
2. WSPÓLDZIAŁANIE PRĘTA Z PIERWSZYM OSCYLATOREM HARMONICZNYM

Przyjmijmy, że na końcu pręta (rys. 1) została przyłożona osiowa siła:

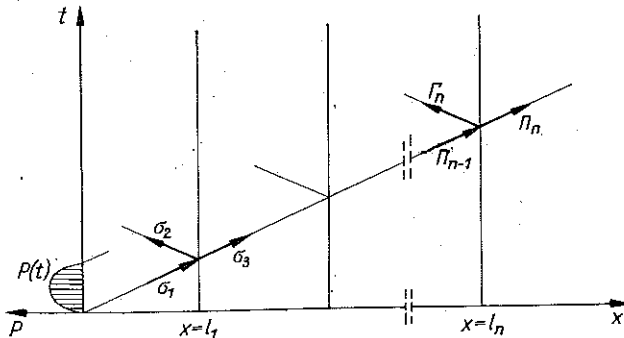
$$P(t) \neq 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$P(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t > \tau.$$

Siła ta wywołuje płaską, sprężystą falę naprężeń. Przyjmijmy również w pierwszym etapie analizy (dla uzyskania przejrzystego obrazu zachodzących zjawisk), że $2l_1 \geq at$ oraz $2(l_n - l_{n-1}) \geq at$. Warunek ten ogranicza rozpatrywane zjawiska do fali rozcho-



Rys. 1. Dyskretno-ciągły układ mechaniczny



Rys. 2. Płaszczyzna fazowa badanego układu

dzącej się w dodatnim kierunku osi OX (rys. 2). Pomija się, jak już wspomnieliśmy superpozycję tej fali z falami odbitymi wskutek współdziałania pręta z oscylatorami. Rozpatrzmy bliżej oddziaływanie pręta na pierwszy oscylator harmoniczny. Aby wyznaczyć siłę, jaka działa ze strony pręta na pierwszy oscylator, rozważmy warunek równowagi sił w przekroju $x = l_1$ (rys. 1). Z warunku tego wynika

$$(2.1) \quad S[\sigma_1(t) + \sigma_2(t)] = R(t) + \sigma_3(t)S,$$

gdzie S oznacza pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta [m^2], $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ naprężenia (ciśnienia) normalne w przecie [N/m^2] oraz R siłę reakcji oscylatora [N].

Do płaskiej sprężystej fali naprężeń w przecie odnoszą się następujące zależności [5, 8 i 9]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_1(t) &= \rho a v_1(t) && \text{dla fali padającej,} \\ \sigma_2(t) &= -\rho a v_2(t) && \text{dla fali odbitej,} \\ \sigma_3(t) &= \rho a v_3(t) && \text{dla fali przechodzącej,} \end{aligned}$$

gdzie ρ oznacza gęstość materiału [kg/m^3], a prędkość propagacji płaskiej sprężystej fali naprężeń [m/s], v_1, v_2, v_3 prędkość odpowiednio na froncie fali padającej, odbitej i przechodzącej [m/s].

Wykorzystując wzory (2.1) i (2.2) znajdujemy

$$(2.3) \quad -\rho a [v_1(t) + v_2(t)] + 2\rho a v_1(t) = \frac{R(t)}{S} + \rho a v_3(t).$$

Z warunku ciągłości prędkości w przekroju $x=l_1$ wynika

$$(2.4) \quad v_1(t) + v_2(t) = v_M(t) = v_3(t),$$

gdzie $v_M(t) = \dot{u}(t)$ oznacza prędkość masy M .

Uwzględniając równania (2.3) i (2.4) możemy napisać

$$(2.5) \quad -\rho a \dot{u}(t) + 2\sigma_1(t) = \frac{R(t)}{S} + \rho a \dot{u}(t).$$

Zauważmy, że siła reakcji oscylatora jest równa

$$(2.6) \quad R(t) = M\ddot{u}(t) + k u(t),$$

gdzie k oznacza sztywność sprężyny [N/m] oraz M masę oscylatora [kg].

Podstawiając wyrażenie (2.6) do (2.5) po prostych przekształceniach otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu masy M :

$$(2.7) \quad \ddot{u}(t) + 2h\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 2\frac{S}{M}\sigma_1(t),$$

gdzie

$$h = \rho a \frac{S}{M}, \quad \omega^2 = \frac{k}{M}.$$

Łatwo zauważyć, że równanie to ma postać podobną do niejednorodnego równania ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem wiskotycznym.

Rozwiązanie tego równania przy zerowym warunku początkowym ma postać

$$(2.8) \quad u(t) = \frac{2}{M} \int_0^t W(t-s) P(s) ds,$$

gdzie $P(s) = \sigma_1(s) S$ oraz $W(t-s)$ oznacza impulsową funkcję przejścia układu.

Impulsową funkcję przejścia układu określają następujące wzory [10]:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} W(t) &= \frac{1}{\lambda} e^{-ht} \sin \lambda t && \text{dla } \lambda^2 > 0, \\ W(t) &= te^{-ht} && \text{dla } \lambda^2 = 0, \\ W(t) &= \frac{1}{\lambda_1} e^{-ht} \operatorname{sh}(\lambda, t) && \text{dla } \lambda^2 < 0, \end{aligned}$$

gdzie $\lambda^2 = \omega^2 - h^2$, $\lambda_1^2 = h^2 - \omega^2$.

Aby wyznaczyć siłę oddziaływania pręta na masę M obliczmy wpieryw jej prędkość $\dot{u}(t)$. Różniczkując (2.8) otrzymujemy

$$(2.10) \quad \dot{u}(t) = \frac{2}{M} \int_0^t \frac{dW(t-s)}{dt} P(s) ds.$$

Podstawiając wyrażenie (2.10) do (2.5) otrzymujemy wzór na siłę oddziaływania pręta na masę M :

$$(2.11) \quad R(t) = 2P(t) - 4h \int_0^t \frac{dW(t-s)}{ds} P(s) ds.$$

Zajmijmy się z kolei wyznaczeniem ciśnienia w przecie dla $x=l_1$ na froncie fali naprężeń przechodzącej ($\sigma_3(t)$) i odbitej ($\sigma_2(t)$) (rys. 2). Biorąc pod uwagę wzory (2.2), (2.4) i (2.5), łatwo stwierdzimy, że ciśnienie na froncie fali przechodzącej jest dane zależnością:

$$(2.12) \quad \Pi(t) = \rho a S \dot{u}(t),$$

gdzie $\Pi(t) = \sigma_3(t) S$.

Podstawiając wyrażenie (2.10) do (2.12) mamy

$$(2.13) \quad \Pi(t) = 2h \int_0^t \frac{dW(t-s)}{dt} P(s) ds.$$

Ciśnienie na froncie fali odbitej $\Gamma(t)$ wyznaczamy z warunku (2.1), który po prostych przekształceniach przyjmuje postać

$$(2.14) \quad \Gamma(t) = R(t) + \Pi(t) - P(t),$$

gdzie $\Gamma(t) = \sigma_2(t) S$.

Podstawiając do wzoru (2.14) wyrażenia (2.11) i (2.12) otrzymujemy

$$(2.15) \quad \Gamma(t) = P(t) - 2h \int_0^t \frac{dW(t-s)}{dt} P(s) ds.$$

3. WSPÓLDZIAŁANIE PRĘTA Z n -TYM OSCYLATOREM HARMONICZNYM

Płaska sprężysta fala naprężeń rozprzestrzeniająca się w pręcie ulega przed dotarciem do przekroju $x=l_n$ ($n-1$)-krotnemu odbiciu (rys. 2).

Założyliśmy na wstępie, że fala odbita od masy o numerze ($n-1$) nie współdziała z falą dochodzącą do masy o numerze ($n-2$), co wymaga, aby czas działania siły wymuszającej spełniał nierówność $(l_n - l_{n-1}) \leq \tau/2$. Pominięcie tego uproszczenia wymaga, aby przy propagacji fali w dodatnim kierunku osi OX uwzględniono superpozycję fali padającej i odbitej.

Rozważmy zatem oddziaływanie fali naprężeń rozprzestrzeniającej się w dodatnim kierunku osi OX , dochodzącej do przekroju $x=l_n$, gdy fale odbite od ($n-1$) mas nie dotarły do $x=l_n$. Dla n -tej masy można przeprowadzić rozważania identyczne z przeprowadzonymi dla pierwszej, zastępując ciśnienie na froncie fali dochodzącej $P(t)$ ciśnieniem odpowiednio skorygowanym $\Pi_{n-1}(t)$ (rys. 2).

Przemieszczenie n -tej masy wyznaczamy ze wzoru (2.8) podstawiając w miejsce $P(t)$ ciśnienie $\Pi_{n-1}(t)$ (rys. 2):

$$(3.1) \quad u_n(t) = \frac{2}{M} \int_0^t W(t-s) \Pi_{n-1}(s) ds.$$

Analogicznie siła oddziaływania pręta na n -tą masę $R_n(t)$, ciśnienie na froncie fali przechodzącej $\Pi_n(t)$ i odbitej $\Gamma_n(t)$, zgodnie z (2.11), (2.13) i (2.15), wyrażają się za pomocą odpowiednich wzorów:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} R_n(t) &= 2\Pi_{n-1}(t) - 4h \int_0^t \frac{dW(t-s)}{dt} \Pi_{n-1}(s) ds, \\ \Pi_n(t) &= 2h \int_0^t \frac{dW(t-s)}{dt} \Pi_{n-1}(s) ds, \\ \Gamma_n(t) &= \Pi_{n-1}(t) - 2h \int_0^t \frac{dW(t-s)}{dt} \Pi_{n-1}(s) ds. \end{aligned}$$

Ze wzorów (3.2) łatwo dostrzec, że pomiędzy siłą $R_n(t)$ i ciśnieniami $\Pi_n(t)$ i $\Gamma_n(t)$ zachodzą zależności:

$$(3.3) \quad R_n(t) = 2[\Pi_{n-1}(t) - \Pi_n(t)], \quad \Gamma_n(t) = \Pi_{n-1}(t) - \Pi_n(t) = \frac{1}{2} R_n(t).$$

Uzyskane wyżej wzory rekurencyjne na siłę oddziaływania pręta na dowolną masę M , ciśnienie na froncie fali padającej i odbitej pozwalają w sposób efektywny dokonać obliczeń pod warunkiem, że znany jest w zależności od czasu przebieg siły wywołanej uderzeniem w koniec pręta $P(t)$.

Wyznaczenie $P(t)$ jest sprawą stosunkowo prostą [4]. Odnośnie do funkcji $P(t)$ wymagana jest jej całkowalność w sensie Lebesgue'a. Każdą siłę uderzenia

$P(t)$ można aproksymować szeregiem impulsów prostokątnych lub jednym równoważnym impulsem prostokątnym [10 i 11]. Aproksymacja taka nie zmniejsza ogólności rozważań. Dalsze rozważania będziemy prowadzili zastępując siłę uderzenia $P(t)$ równoważnym impulsem prostokątnym:

$$P(t) = P_0 = \text{const}, \quad \text{jeżeli } 0 \leq t \leq \tau, \quad P(t) = 0, \quad \text{jeżeli } t > \tau.$$

4. KINETYCZNA SYNTEZA OPTIMALIZACYJNA UKŁADU

Rozpatrzmy zagadnienia syntezy badanego układu jako dobór geometrycznych parametrów konstrukcyjnych, zapewniający optymalne oddziaływanie pręta na oscylatory harmoniczne. Jako kryterium optymalnego oddziaływania przyjmujemy uzyskanie maksymalnej wartości siły oddziaływania pręta na poszczególne masy dyskretne badanego układu. Kryterium to wiąże się ze wzbudzeniem drgań elektrod elektrofiltrów, gdzie optymalizacja oczyszczania elektrod związana jest z optymalizacją wymuszenia drgań [4]. Badanie jako funkcji czasu siły oddziaływania pręta na n -tą masę zależną od parametrów układu — można przeprowadzić korzystając ze wzorów (3.3)₁, (3.2)₁ i (2.9) i stosując elektroniczne maszyny cyfrowe [13]. W naszych rozważaniach rozpatrzmy ten przypadek syntezy układu, gdy wzór (3.3) na siłę $R_n(t)$ dla dowolnego n uzyskano w postaci zamkniętej. Rozpatrzmy mianowicie przypadek, gdy $\lambda^2 < 0$, tj. gdy parametry geometryczne układu spełniają nierówność: $k < \rho^2 a^2 (S^2/M)$. Biorąc odpowiednią funkcję przejścia (2.9), po jej różniczkowaniu i podstawieniu do (3.2)₂, otrzymujemy

$$(4.1) \quad \Pi_n(t) = \frac{h}{\lambda_1} \left\{ (\lambda_1 - h) \int_0^t \Pi_{n-1}(s) e^{(t-s)(\lambda_1 - h)} ds + (\lambda_1 + h) \int_0^t \Pi_{n-1}(s) e^{-(t-s)(\lambda_1 + h)} ds \right\}.$$

Podstawiając do rekurencyjnego wzoru (4.1) $\Pi_0(s) = P_0 = \text{const}$ możemy po wykonaniu całkowania wyznaczyć $\Pi_1(t)$:

$$\Pi_1(t) = P_0 \frac{h}{\lambda_1} \{ e^{t(\lambda_1 - h)} - e^{-t(\lambda_1 + h)} \}.$$

Z kolei podstawiając $\Pi_1(t)$ do (4.1) wyznaczamy $\Pi_2(t)$:

$$\begin{aligned} \Pi_2(t) = P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^2 (\lambda_1 - h) \left\{ e^{t(\lambda_1 - h)} \left[t - \frac{1}{2\lambda_1} \right] + e^{-t(\lambda_1 + h)} \frac{1}{2\lambda_1} \right\} + \\ + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^2 (\lambda_1 + h) \left\{ e^{t(\lambda_1 - h)} \frac{1}{2\lambda_1} + e^{-t(\lambda_1 + h)} \left[-t - \frac{1}{2\lambda_1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

W podobny sposób możemy wyznaczyć $\Pi_3(t)$, $\Pi_4(t)$, itd. Ogólny wzór na ciśnienie $\Pi_n(t)$ ma postać ($n > 1$)

$$(4.2) \quad \Pi_n(t) = P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1 - h)^{n-1} (\lambda_1 + h)^0 \left\{ e^{t(\lambda_1 - h)} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1+i} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-1-i}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & + e^{-t(\lambda_1+h)} (-1)^n \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-1} \Big\} + \dots + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1-h)^{n-k} (\lambda_1+h)^l \times \\
 & \times \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+i} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \binom{n-1-i}{l} \right\} + \\
 & + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-1}{n-k} \sum_{i=n-k}^n (-1)^{n+i} \frac{t^{n-1-i}}{(2\lambda_1)^i (n-1-i)!} \binom{i}{n-k} \Big\} + \dots + \\
 & + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1-h)^{n-k} (\lambda_1+h)^l \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-1}{l} \times \right. \\
 & \times \sum_{i=l}^{n-1} (-1)^{n-k+i} \frac{t^{n-1-i}}{(2\lambda_1)^i (n-1-i)!} \binom{i}{l} + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-1}{l} \times \\
 & \times \sum_{i=0}^l (-1)^{n+l} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \binom{n-1-i}{n-k} \Big\} + \dots + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1-h)^0 \times \\
 & \times (\lambda_1+h)^{n-1} \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-1} + e^{-t(\lambda_1+h)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie wskaźniki r i l przyjmują równoległe następujące wartości: $r=1, 2, \dots, n$; $l=0, 1, \dots, n-1$. Opierając się na wzorach (3.3)₁ i (4.2) możemy prosto znaleźć wzór na siłę $R_n(t)$:

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad & \frac{1}{2} R_n(t) = P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^{n-1} (\lambda_1-h)^{n-2} \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-2+i} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-2-i}} + \right. \\
 & + e^{-t(\lambda_1+h)} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-1} \Big\} + \dots + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^{n-1} (\lambda_1-h)^{n-1-k} \times \\
 & \times (\lambda_1+h)^l \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-2}{n-1-k} \sum_{i=0}^{n-1-k} (-1)^{n-1-k+i} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-2-i}} \binom{n-2-i}{l} \right\} + \\
 & + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-2}{n-k} \sum_{i=n-1-k}^{n-2} (-1)^{n-1+i} \frac{t^{n-2-i}}{(2\lambda_1)^i (n-2-i)!} \binom{i}{n-1-k} \Big\} + \dots + \\
 & + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^{n-2} (\lambda_1-h)^{n-1-k} (\lambda_1+h)^l \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-2}{l} \times \right. \\
 & \times \sum_{i=l}^{n-2} (-1)^{n-1-k+i} \frac{t^{n-2-i}}{(2\lambda_1)^i (n-2-i)!} \binom{i}{l} + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-2}{l} \times \\
 & \times \sum_{i=0}^l (-1)^{n-1+i} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-2-i}} \binom{n-2-i}{n-k} \Big\} + \dots + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^{n-1} (\lambda_1+h)^{n-2} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad & \times \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-2} + e^{-t(\lambda_1+h)} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{-t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-2-i}} \right\} - P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1-h)^{n-1} \times \\
 & \times \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1+i} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-1-i}} + e^{-t(\lambda_1+h)} (-1)^n \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-1} \right\} + \dots - \\
 & - P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1-h)^{n-k} (\lambda_1+h)^k \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+i} \times \right. \\
 & \quad \times \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \binom{n-1-i}{l} + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-1}{n-k} \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{n+i} \times \\
 & \quad \times \frac{t^{n-1-i}}{(2\lambda_1)^i (n-1-i)} \binom{i}{n-k} \left. \right\} + \dots - P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1-h)^{n-k} (\lambda_1+h)^k \times \\
 & \times \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-1}{l} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-k+i} \frac{t^{n-1-i}}{(2\lambda_1)^i (n-1-i)!} \binom{i}{l} + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-1}{l} \times \right. \\
 & \quad \times \sum_{i=0}^l (-1)^{n+i} \frac{t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \binom{n-1-i}{n-k} \left. \right\} + \dots - P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1+h)^{n-1} \times \\
 & \quad \times \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-1} + e^{-t(\lambda_1+h)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-t^i}{i! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \right\} -
 \end{aligned}$$

Wyznaczenie warunku na wystąpienie maksimum siły $R_n(t)$ wiąże się ze znalezieniem maksimum funkcji $R_n(t)$ opisanej powyższym wzorem. Znajdźmy zatem

$$(4.4) \quad \frac{dR_n(t)}{dt} = 0.$$

Pochodna po czasie wyrażenia (4.3) ma postać

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad & \frac{1}{2} \frac{dR_n(t)}{dt} = P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^{n-1} (\lambda_1-h)^{n-2} \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-2+i} \times \right. \\
 & \times \frac{t^{i-1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-2-i}} \left[(\lambda_1-h) \frac{t}{i} + 1 \right] - e^{-t(\lambda_1+h)} (\lambda_1+h) (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-1} \left. \right\} + \\
 & + \dots + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^{n-1} (\lambda_1-h)^{n-1-k} (\lambda_1+h)^k \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-2}{n-1-k} \times \right. \\
 & \times \sum_{i=0}^{n-1-k} (-1)^{n-1-k+i} \frac{t^{i-1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-2-i}} \binom{n-2-i}{l} \left[(\lambda_1+h) \frac{t}{i} + 1 \right] +
 \end{aligned}$$

(4.5)
[cd.]

$$\begin{aligned}
 & + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-2}{n-k} \sum_{i=n-1-k}^{n-2} (-1)^{n-1+i} \frac{t^{n-3-i}}{(n-3-i)! (2\lambda_1)^i} \binom{i}{n-1-k} \times \\
 & \times \left[-(\lambda_1+h) \frac{t}{i} + 1 \right] + \dots + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^{n-1} (\lambda_1-h)^{n-1-k} (\lambda_1+h)^k \times \\
 & \times \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-2}{l} \sum_{i=l}^{n-2} (-1)^{n-1-k+i} \frac{t^{n-3-i}}{(n-3-i)! (2\lambda_1)^i} \binom{i}{l} \left[(\lambda_1-h) \frac{t}{i} + 1 \right] + \right. \\
 & + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-2}{l} \sum_{i=l}^{n-2} (-1)^{n-1-k+i} \frac{t^{n-3-i}}{(n-3-i)! (2\lambda_1)^i} \binom{i}{l} \left[(\lambda_1-h) \frac{t}{i} + 1 \right] + \\
 & + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-2}{l} \sum_{i=0}^l (-1)^{n-1+i} \frac{t^{i-1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-2-i}} \binom{n-2-i}{n-k} \times \\
 & \times \left[-(\lambda_1+h) \frac{t}{i} + 1 \right] + \dots + P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^{n-1} (\lambda_1+h)^{n-2} \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} (\lambda_1-h) \times \right. \\
 & \times \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-2} + e^{-t(\lambda_1+h)} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{t^{i-1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-2-i}} \left[-(\lambda_1+h) \frac{t}{i} + 1 \right] \left. \right\} - \\
 & - P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1-h)^{n-1} \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1+i} \frac{t^{i-1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \times \right. \\
 & \times \left[(\lambda_1-h) \frac{t}{i} + 1 \right] - e^{-t(\lambda_1+h)} (\lambda_1+h) (-1)^n \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-1} \left. \right\} - \\
 & - P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1-h)^{n-k} (\lambda_1+h)^k \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-k+i} \times \right. \\
 & \times \frac{t^{i-1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \left[(\lambda_1-h) \frac{t}{i} + 1 \right] + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-1}{n-k} \sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{n+i} \times \\
 & \times \frac{t^{n-2-i}}{(n-2-i)! (2\lambda_1)^i} \binom{i}{n-k} \left[-(\lambda_1+h) \frac{t}{i} + 1 \right] + \dots - P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n \times \\
 & \times (\lambda_1-h)^{n-k} (\lambda_1+h)^k \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} \binom{n-1}{l} \sum_{i=l}^{n-1} (-1)^{n-k+i} \frac{t^{n-2-i}}{(n-2-i)! (2\lambda_1)^i} \times \right. \\
 & \times \binom{i}{l} \left[(\lambda_1-h) \frac{t}{i} + 1 \right] + e^{-t(\lambda_1+h)} \binom{n-1}{l} \sum_{i=0}^l (-1)^{n+i} \frac{t^{i-1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \times \\
 & \times \binom{n-1-i}{n-k} \left[-(\lambda_1+h) \frac{t}{i} + 1 \right] - P_0 \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^n (\lambda_1+h)^{n-1} \left\{ e^{t(\lambda_1-h)} (\lambda_1-h) \times \right. \\
 & \times \left(\frac{1}{2\lambda_1} \right)^{n-1} + e^{-t(\lambda_1+h)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-t^{i-1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \left[-(\lambda_1+h) \frac{t}{i} + 1 \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

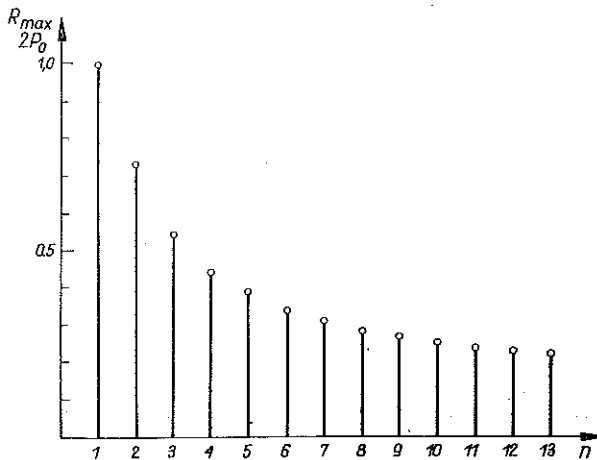
Łatwo zauważyć, że rozwiązanie równania $dR_n(t)/dt=0$ jest skomplikowane, wymaga stosowania metod nieelementarnych. Rozwiązanie to upraszcza się, gdy $\lambda_1 \approx h$, co oznacza $h^2 \gg \omega^2$ [inaczej $k \ll \rho^2 a^2 (S^2/M)$]. Takie przybliżenie stosowano w badaniu elektrod elektrolitów [4]. W tym przypadku równania (4.3) i (4.4) przybierają odpowiednio postać

$$(4.6) \quad R_n(t) = 2P_0 \frac{(2th)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-2ht},$$

$$P_0 e^{-2th} \sum_{i=0}^{n-2} -\frac{t^{i-1} (2h)^i}{(i+1)!} \left[-2h \frac{t}{i} + 1 \right] - P_0 e^{-2th} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{i-1} (2h)^{i+1}}{(i-1)! (2\lambda_1)^{n-1-i}} \times$$

$$\times \left[-2h \frac{t}{i} + 1 \right] = 0.$$

Łatwo zauważyć, że $t_{\max} = (n-1)/2h$ spełnia równanie (4.6)₂. Oznacza to, że wraz z oddalaniem się do końca pręta (wzrost n) występuje opóźnienie chwili wystąpienia maksimum siły $R_n(t)$. Maksymalna wartość siły $R_n(t_{\max})$ może być osiągnięta, gdy



Rys. 3. Maksymalne wartości siły oddziaływania pręta na oscylatory harmoniczne

czas działania impulsu wymuszającego na końcu pręta spełnia nierówność $\tau \geq (n-1)/2h$. Zatem fakt wystąpienia maksimum siły uwarunkowany jest spełnieniem następującej nierówności, zachodzącej pomiędzy czasem działania uderzenia τ a parametrami geometrycznymi układu:

$$(4.7) \quad \tau \geq \frac{1}{\rho a} \frac{M}{S} \frac{n-1}{2}.$$

Podstawiając do zależności (4.6)₁ za $t=t_{\max}$ po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(4.8) \quad R_n(t_{\max}) = 2P_0 \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(n-1)}.$$

Ze wzoru tego wynika, że maksymalne wartości siły nie zależą od parametrów geometrycznych układu, zależą natomiast jedynie od siły P_0 na wejściu układu oraz kolejności masy skupionej n . Zależność tę ilustruje rys. 3. Szczytowe wartości siły oddziaływania pręta na oscylatory harmoniczne tworzą ciąg liczb, który wraz ze wzrostem n maleje asymptotycznie do zera. Na uwypuklenie zasługuje jeszcze fakt «rozmycia» fali naprężeń silnej nieciągłości. Przy wymuszeniu w postaci prostokątnego impulsu danego na końcu pręta silna nieciągłość fali dociera tylko do pierwszego oscylatora, natomiast jak to wynika ze wzoru (4.6) niknie w dalszej części pręta. Współoddziaływanie oscylatorów z prętem powoduje rozmycie silnej nieciągłości fali, skutkiem czego następuje opóźnienie wystąpienia maksimum siły, narastające wraz z kolejnym numerem oscylatora n .

5. PODSUMOWANIE

Podstawione zagadnienie analizy układu dynamicznego, złożonego z pręta i szeregu oscylatorów, rozwiązano w ramach przyjętego modelu bez dodatkowych uproszczeń. Uzyskane wzory rekurencyjne przy danej sile na końcu pręta jako funkcji czasu pozwalają efektywnie wyznaczyć siłę oddziaływania pręta na dowolny oscylator oraz ciśnienie na froncie fali przechodzącej i odbitej. Zagadnienie syntezy rozwiązano dla przypadku $\lambda^2 < 0$, gdy siłę oddziaływania pręta na dowolny oscylator określono wzorem w postaci zamkniętej.

W uzyskaniu podobnych wzorów dla $\lambda^2 = 0$ i $\lambda^2 > 0$ napotymano na duże trudności. Problem syntezy rozwiązano przy prostokątnym impulsie wejściowym oraz przy spełnieniu silnej nierówności $k \ll \rho^2 a^2 (S^2/M)$ (co może mieć miejsce w elektrofiltrze). Warunek (4.7) na maksimum siły $R_n(t)$ można w zastosowaniu do elektrofiltrów przedstawić jeszcze w innej formie. Wobec skończonej prędkości rozchodzenia się zaburzeń tylko część elektrody elektrofiltru (zależna od czasu działania wymuszenia) bierze udział w oddziaływaniu na pręt. Wyznaczając dla tego odcinka elektrody znanymi metodami masę i sztywność zastępczą [5 i 10] można przedstawić nierówność (4.7) jako nierówność zachodzącą wyłącznie pomiędzy parametrami geometrycznymi układu.

Przytoczone rozważania mogą znaleźć zastosowanie w projektowaniu układów elektrod zbiorczych w elektrofiltrach.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. JUDA, *Zwalczanie zapyłania*, WZ, Warszawa 1962.
2. J. LUTYŃSKI, *Elektrostatyczne odpylanie gazów*, WNT, Warszawa 1965.
3. M. SARNA, *Przyspieszenia drgań skrętnych cienkościennego pręta o profilu otwartym*, Rozpr. Inżyn., 18, 4, 1970.
4. M. SARNA, *Dynamika elektrod zbiorczych elektrofiltrów*, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1971.
5. Z. DZYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
6. O. E. JONES, A. T. ELLIS, *Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars*, Part 2; J. Appl. Mech., Trans. ASME, 30, Series E, no 1, 1963,

7. J. MILKLOWITZ, *On the use of approximate theories of an elastic rod in problems of longitudinal impact*, Proc. Third U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, New York 1958.
8. W. GOLDSMITH, *Impact, the theory and physical behaviour of colliding solids*, London 1960.
9. J. OSIECKI, *Reflection of a plane stress wave in a non-homogenous solid medium*, Proc. Vibr. Probl., 2, No 2 (7), 1961.
10. R. GRYBOŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.
11. H. C. FISCHER, *On longitudinal impact*, II, The Hague, Martinus Nijhoff, 1959.
12. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1959.
13. J. GOLIŃSKI, *Metody optymalizacyjne w projektowaniu technicznym*, WNT, Warszawa 1974.

Резюме

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ДИСКРЕТНО-СПЛОШНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В работе представлены рассуждения касающиеся дискретно-сплошной механической системы, состоящей из полубесконечного стержня с присоединенным рядом гармонических осцилляторов. Свойства материала стержня описаны линейной моделью Гука, пружины осцилляторов имеют линейные характеристики. Принята гипотеза плоских поперечных сечений стержня. Рассмотрено взаимодействие стержня с гармоническими осцилляторами во время распространения плоской упругой волны напряжений, вызванной осевым ударом в стержень. Для получения наглядной картины происходящих явлений (пренебрежение накладыванием отраженных волн на падающую волну) введено ограничение относительно времени действия вынуждения. Проблема количественного оптимизационного синтеза представлена как подбор геометрических параметров системы, обеспечивающий максимальные значения силы воздействия стержня на сосредоточенную массу. Исследуемая механическая система представляет в первом приближении свойства системы приемных электродов электрофильтра.

SUMMARY

ANALYSIS AND SYNTHESIS OF A DISCRETE-CONTINUOUS MECHANICAL SYSTEM

This paper deals with the discrete-continuous mechanical system of a half-infinite rod with adjoint series of harmonic oscillators. The properties of the material of the rod are described by Hook's linear model. The springs of the oscillators bear linear characteristics. A hypothesis of the plane cross-sections of the rod is assumed. The interaction of the rod with the harmonic oscillators during propagation of the elastic plane stress wave which is caused by the axial impact of the rod is considered. In order to obtain a clear image of the phenomenon which occurs (omitting superposition of the incident and reflected waves) it was necessary to limit the time duration of the disturbance. The problem of optimizing synthesis quantitative was stated as a choice of those geometric parameters of the system which would assure maximal values of the interaction force of the rod on the concentrated mass. The mechanical system considered represents in a first approximation the properties of the system of collecting electrodes electrostatic precipitator.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
FILIA W BIELSKU-BIAŁYM

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1974 r.