

## NIEKTÓRE PRZYPADKI NOŚNOŚCI GRANICZNEJ ROZCIĄGANYCH PRĘTÓW ZWITYCH

ANDRZEJ D U D E K i MICHAŁ Ż Y C Z K O W S K I (KRAKÓW)

W niniejszej pracy, stanowiącej kontynuację pracy [3], zajęto się rozwiązaniem zagadnienia plastycznego rozciągania prętów zwitych, wykonanych z materiału idealnie plastycznego. Skorzystano z warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego i teorii plastyczności Hencky'ego-Iliuszyna (lub Levy'ego-Misesa). Problem został rozwiązany za pomocą metody małego parametru w krzywoliniowym, ukośnokątnym układzie odniesienia  $\xi, \eta, \zeta$ , przy czym naprężenia i odkształcenia rozpatrywano w lokalnie ortogonalnym układzie współrzędnych  $\xi, \eta, z$ . Za mały parametr przyjęto jednostkowy kąt zwicha pręta  $\vartheta_0$ . Pracę zilustrowano przykładami plastycznego rozciągania pręta zwicha o przekroju eliptycznym oraz pręta zwicha o przekroju kołowym z małym wcięciem kołowym. Wyprowadzono przybliżone wzory określające nośność graniczną przy rozciąganiu rozważanych prętów.

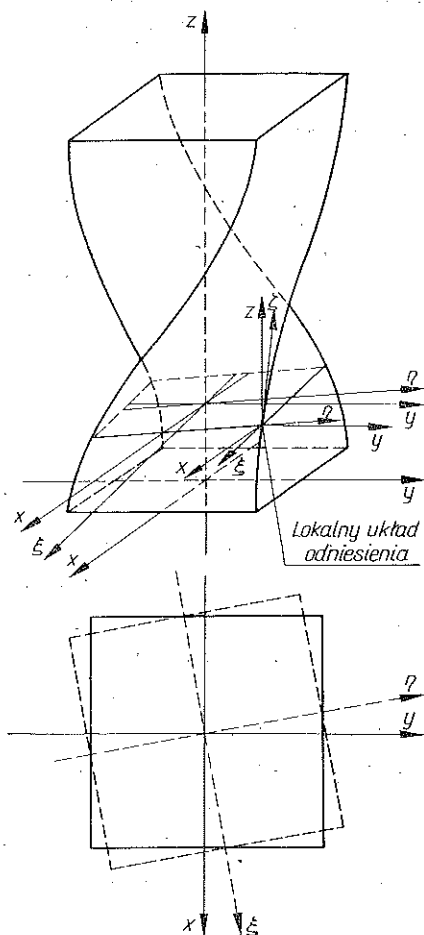
### 1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Pręty zwite w stanie naturalnym stanowią model licznych elementów konstrukcyjnych (wiertła, śmigła itp.). Teorię plastycznego skręcania z rozciąganiem takich prętów sformułowano w pracy M. ŻYCZKOWSKIEGO i M. GALOSA [3], w której podano również przykład obliczeń dla pręta o przekroju kwadratowym oraz omówiono pokrewną literaturę dotyczącą głównie zakresu sprężystego.

Obecna praca stanowi kontynuację pracy [3]. Równania podstawowe wyrażono w krzywoliniowym, ukośnokątnym układzie odniesienia  $\xi, \eta, \zeta$ , przy czym naprężenia i odkształcenia rozpatrywano w lokalnie ortogonalnym układzie współrzędnych  $\xi, \eta, z$  (rys. 1). Podejście takie pozwala z jednej strony na zachowanie korzyści wynikających z zastosowania układów ortogonalnych, a z drugiej — na redukcję problemu trójwymiarowego do dwuwymiarowego przez uzasadnione tu pominięcie pochodnych naprężeń i odkształceń względem zmiennej  $\zeta$ . Do wyprowadzonego układu 16 nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych zastosowano następnie metodę małego parametru, prowadzącą do linearyzacji i częściowego rozprężenia układu. Jako mały parametr przyjęto jednostkowy kąt naturalnego zwicha  $\vartheta_0$  tak, że rozwiązanie niezakłócone określało stosunkowo prosty stan graniczny dla prętów przyrmatycznych (niezwitych). Kolejne poprawki zostały określone równaniami zbliżonymi do pewnych równań teorii sprężystości dla rozpatrywanego obszaru przekroju pręta.

W obecnej pracy wyprowadzimy pewne dalsze zależności o charakterze ogólnym oraz podamy kilka dalszych rozwiązań szczegółowych ograniczając się do przypadku

czystego rozciągania (lub ściskania) pręta. Pierwsza poprawka jest wtedy określona równaniem typu Poissona analogicznym do występującego przy problemie sprężystego skręcania. Rozpatrzmy więc kształty przekroju pokazane na rys. 2 (elipsa i koło z wcięciem kołowym), dla których rozwiązania zagadnienia sprężystego skręcania są szczególnie proste.



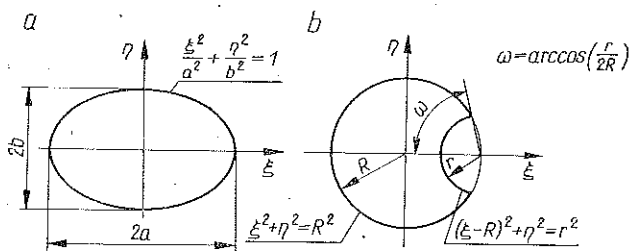
Rys. 1

Nie będziemy tu cytować wyjściowego układu 16 równań nieliniowych, wyprowadzonych w pracy [3] opartej na teorii Hencky'ego-Iliuszyna lub Levy'ego-Misesa, przytoczymy natomiast równania liniowe dla kolejnych poprawek; ulegają one znacznemu uproszczeniu przy ograniczeniu się do czystego rozciągania. Dla nieparzystych poprawek  $n$  mamy wtedy  $\sigma_{\xi n} = \sigma_{\eta n} = \sigma_{z n} = \tau_{\xi \eta n} = \varepsilon_{\xi n} = \varepsilon_{\eta n} = \varepsilon_{z n} = \gamma_{\xi \eta n} = \varphi_n = 0$ ; istotnie, wyżej wymienione wielkości nie ulegną zmianie przy zwiciu pręta w przeciwną stronę (zamiana  $\vartheta_0$  na  $-\vartheta_0$ ), zatem są funkcjami parzystymi parametru  $\vartheta_0$ . Pozostałe niewiadome są określone równaniami

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau_{\xi zn}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\eta zn}}{\partial \eta} &= -\eta \frac{\partial \sigma_z^{(n-1)}}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_z^{(n-1)}}{\partial \eta}, \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{\eta zn}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\xi zn}}{\partial \xi \partial \eta} &= -2B [\varepsilon_{\xi}^{(n-1)}] + A [\gamma_{\xi \eta}^{(n-1)}] + \\
 &+ 2 \left( \frac{\partial \varepsilon_{\xi}^{(n-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \varepsilon_{\eta}^{(n-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \gamma_{\eta \xi}^{(n-1)}}{\partial \eta} \right), \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{\eta zn}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 \gamma_{\xi zn}}{\partial \eta^2} &= 2A [\varepsilon_{\eta}^{(n-1)}] - B [\gamma_{\xi \eta}^{(n-1)}] - \\
 &- 2 \left( \frac{\partial \varepsilon_{\xi}^{(n-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \varepsilon_{\eta}^{(n-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \gamma_{\xi \eta}^{(n-1)}}{\partial \xi} \right), \\
 \gamma_{\eta zn} &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \tau_{\eta z}^{(n-i)}, \quad \gamma_{\xi zn} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \tau_{\xi z}^{(n-i)},
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

gdzie  $\varphi$  oznacza moduł w równaniach Hencky'ego-Iliuszyna lub Levy'ego-Misesa, a przez  $A$  i  $B$  oznaczono dla skrócenia operatory

$$A = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad B = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right).
 \tag{1.2}$$



Rys. 2

Równania (1.1)<sub>2</sub> i (1.1)<sub>3</sub>, wynikające z warunków nierozdzielności, nie są przy tym niezależne (co można sprawdzić przez różniczkowanie pierwszego z nich względem  $\eta$  i drugiego względem  $\xi$  oraz wykorzystanie warunków nierozdzielności dla  $\varepsilon_{\xi}^{(n-1)}$ ,  $\varepsilon_{\eta}^{(n-1)}$  i  $\gamma_{\xi \eta}^{(n-1)}$ ); tak więc otrzymany układ określa cztery niewiadome  $\tau_{\xi zn}$ ,  $\tau_{\eta zn}$ ,  $\gamma_{\xi zn}$  i  $\gamma_{\eta zn}$ . Naprężeniowy warunek brzegowy na swobodnym konturze  $F(\xi, \eta) = 0$  ma przy tym postać

$$\tau_{\xi zn} F'_\xi + \tau_{\eta zn} F'_\eta = -(\eta F'_\xi - \xi F'_\eta) \sigma_z^{(n-1)}.
 \tag{1.3}$$

Dla parzystych poprawek  $n$  mamy natomiast  $\tau_{\xi zn} = \tau_{\eta zn} = \gamma_{\xi zn} = \gamma_{\eta zn} = 0$ , są to bowiem nieparzyste funkcje parametru  $\vartheta_0$ , a pozostałe niewiadome są określone równaniami

(po poprawieniu kilku błędów w znakach i wskaźnikach, które wkradły się do pracy [3]):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{\xi n}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi n n}}{\partial \eta} &= -\eta \frac{\partial \tau_{\xi z (n-1)}}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \tau_{\xi z (n-1)}}{\partial \eta} + \tau_{\eta z (n-1)}, \\
 \frac{\partial \tau_{\xi n n}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta n}}{\partial \eta} &= -\eta \frac{\partial \tau_{\eta z (n-1)}}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \tau_{\eta z (n-1)}}{\partial \eta} - \tau_{\xi z (n-1)}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi n}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\eta n}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{\xi \eta n}}{\partial \xi \partial \eta} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{z n}}{\partial \xi^2} &= A [\gamma_{\xi z (n-1)}] - \frac{\partial \gamma_{\eta z (n-1)}}{\partial \xi} - \eta A [\varepsilon_{\xi (n-2)}] + \xi B [\varepsilon_{\xi (n-2)}] + \\
 &\quad + 2 \left( \eta \frac{\partial \gamma_{\xi \eta (n-2)}}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \gamma_{\xi \eta (n-2)}}{\partial \eta} + \varepsilon_{\xi (n-2)} - \varepsilon_{\eta (n-2)} \right), \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{z n}}{\partial \eta^2} &= B [\gamma_{\eta z (n-1)}] + \frac{\partial \gamma_{\xi z (n-1)}}{\partial \eta} - \eta A [\varepsilon_{\eta (n-2)}] + \xi B [\varepsilon_{\eta (n-2)}] - \\
 &\quad - 2 \left( \eta \frac{\partial \gamma_{\xi \eta (n-2)}}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \gamma_{\xi \eta (n-2)}}{\partial \eta} + \varepsilon_{\xi (n-2)} - \varepsilon_{\eta (n-2)} \right), \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{z n}}{\partial \xi \partial \eta} &= A [\gamma_{\eta z (n-1)}] + B [\gamma_{\xi z (n-1)}] - \frac{\partial \gamma_{\eta z (n-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma_{\xi z (n-1)}}{\partial \xi} - \\
 &\quad - \eta A [\gamma_{\xi \eta (n-2)}] + \xi B [\gamma_{\xi \eta (n-2)}] - 4\eta \left( \frac{\partial \varepsilon_{\xi (n-2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \varepsilon_{\eta (n-2)}}{\partial \xi} \right) - \\
 &\quad - 4\xi \left( \frac{\partial \varepsilon_{\xi (n-2)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \varepsilon_{\eta (n-2)}}{\partial \eta} \right) + 4\gamma_{\xi \eta (n-2)}, \\
 \varepsilon_{\xi n} + \varepsilon_{\eta n} + \varepsilon_{z n} &= 0, \\
 \varepsilon_{z n} - \varepsilon_{\xi n} - \varphi_0 (\sigma_{z n} - \sigma_{\xi n}) - \varphi_n \sigma_{z 0} &= \sum_{i=2}^{n-2} \varphi_i [\sigma_z (n-i) - \sigma_{\xi (n-i)}], \\
 \varepsilon_{z n} - \varepsilon_{\eta n} - \varphi_0 (\sigma_{z n} - \sigma_{\eta n}) - \varphi_n \sigma_{z 0} &= \sum_{i=2}^{n-2} \varphi_i [\sigma_z (n-i) - \sigma_{\eta (n-i)}], \\
 \gamma_{\xi \eta n} - 2\varphi_0 \tau_{\xi \eta n} &= 2 \sum_{i=2}^{n-2} \varphi_i \tau_{\xi \eta (n-i)}, \\
 \sigma_{z 0} (2\sigma_{z n} - \sigma_{\xi n} - \sigma_{\eta n}) &= - \sum_{i=2}^{n-1} [\sigma_{\xi i} \sigma_{\xi (n-i)} + \sigma_{\eta i} \sigma_{\eta (n-i)} + \sigma_{z i} \sigma_{z (n-i)} - \\
 &\quad - \sigma_{\xi i} \sigma_{\eta (n-i)} - \sigma_{\eta i} \sigma_z (n-i) - \sigma_{z i} \sigma_{\xi (n-i)} + 3\tau_{\xi \eta i} \tau_{\xi \eta (n-i)} + 3\tau_{\xi z i} \tau_{\xi z (n-i)} + \\
 &\quad + 3\tau_{\eta z i} \tau_{\eta z (n-i)}].
 \end{aligned}$$

Równania (1.4<sub>4</sub>), (1.4<sub>5</sub>) i (1.4<sub>6</sub>) nie są niezależne, lecz określają to samo odształcenie  $\varepsilon_{zn}$ ; układ pozostałych 8 równań określa  $\sigma_{\xi n}$ ,  $\sigma_{\eta n}$ ,  $\sigma_{zn}$ ,  $\tau_{\xi \eta n}$ ,  $\varepsilon_{zn}$ ,  $\varepsilon_{\eta n}$ ,  $\gamma_{\xi \eta n}$  i  $\varphi_n$ . Naprężeniowe warunki brzegowe na konturze przekroju mają postać

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{\xi n} F'_\xi + \tau_{\xi \eta n} F'_\eta &= -(\eta F'_\xi - \xi F'_\eta) \tau_{\xi z (n-1)}, \\ \tau_{\xi \eta n} F'_\xi + \sigma_{\eta n} F'_\eta &= -(\eta F'_\xi - \xi F'_\eta) \tau_{\eta z (n-1)}. \end{aligned}$$

Po określeniu naprężeń w postaci szeregów małego parametru  $\vartheta_0$  możemy wyrazić siłę podłużną, określającą nośność graniczną pręta, wzorem

$$(1.6) \quad \bar{N} = \sum_{n=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \vartheta_0^n \iint_A \sigma_{zn} dA,$$

gdzie  $A$  oznacza pole przekroju pręta. Moment skręcający w rozpatrywanym przypadku czystego rozciągania jest równy zeru, a wynikający stąd ciąg równań

$$(1.7) \quad \iint_A (\tau_{\eta zn} \xi - \tau_{\xi zn} \eta) dA = 0, \quad n=1, 3, 5 \dots$$

określa pewne stałe, pojawiające się przy całkowaniu równań (1.1) dla nieparzystych poprawek.

## 2. OGÓLNE WZORY DLA DWÓCH PIERWSZYCH POPRAWEK

W pracy niniejszej ograniczymy się do efektywnego określenia tylko pierwszej i drugiej poprawki, a w tym przypadku podane równania ulegają dalszym uproszczeniom. W przybliżeniu zerowym — dla czystego, idealnie plastycznego rozciągania pręta pryzmatycznego — mamy dla dowolnego kształtu przekroju  $\sigma_{z0} = \sigma_0 = \text{const}$ ; pozostałe składowe stanu naprężenia są równe zeru, a funkcja  $\varphi = \varphi_0$  przyjmuje pewną dowolną, dodatnią wartość stałą (w przypadku teorii Hencky'ego-Iliuszyna musi zachodzić  $\varphi_0 > 1/2G$ ). Pozwala to na zapisanie równań (1.1) dla pierwszej poprawki w postaci wspólnej, niezależnej od kształtu przekroju. Pierwsze trzy równania są mianowicie wtedy równaniami jednorodnymi, a scałkowanie i zestawienie razem drugiego i trzeciego daje

$$(2.1) \quad \frac{\partial \gamma_{\eta z 1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \gamma_{\xi z 1}}{\partial \eta} = \bar{D},$$

gdzie  $\bar{D}$  jest pewną stałą; określa ona kąt skręcenia pręta (przyrost kąta naturalnego). Odształcenia są związane z naprężeniami dwoma ostatnimi równaniami (1.1), które tu przyjmują prostą postać  $\gamma_{\eta z 1} = 2\varphi_0 \tau_{\eta z 1}$ ,  $\gamma_{\xi z 1} = 2\varphi_0 \tau_{\xi z 1}$ . Wobec jednorodności pierwszego z równań (1.1) sparametryzujemy je funkcją Prandtla:

$$(2.2) \quad \tau_{\xi z 1} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}, \quad \tau_{\eta z 1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi},$$

a po podstawieniu do (2.1) otrzymujemy

$$(2.3) \quad \nabla^2 \psi_1 = -D,$$

gdzie  $D = \bar{D}/2\rho_0$ . Warunek brzegowy (1.3) przybiera postać

$$(2.4) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} F'_\xi - \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} F'_\eta = -(\eta F'_\xi - \xi F'_\eta) \sigma_0.$$

Wobec spełnionej wzdłuż konturu zależności

$$(2.5) \quad F'_\xi d\xi + F'_\eta d\eta = 0$$

można zamiast (2.4) napisać

$$(2.6) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} d\xi = -(\eta d\eta + \xi d\xi) \sigma_0,$$

a po scałkowaniu

$$(2.7) \quad \psi_1 = -(\xi^2 + \eta^2) \frac{\sigma_0}{2} + C.$$

Otrzymane zagadnienie brzegowe różni się więc warunkiem brzegowym od klasycznego zagadnienia sprężystego skręcania, ale przy znajomości rozwiązania tego ostatniego uwzględnienie warunku (2.7) nie nastęrcza już żadnych trudności. Wystarczy mianowicie założyć rozwiązanie w postaci

$$(2.8) \quad \psi_1 = C - (\xi^2 + \eta^2) \frac{\sigma_0}{2} + \alpha \psi_s,$$

gdzie funkcja  $\psi_s$  stanowi rozwiązanie zagadnienia skręcania z jednorodnym warunkiem brzegowym, aby spełnić i równanie (2.3) i warunek (2.7). Stałą  $\alpha$  należy przy tym obliczyć z warunku zerowania się momentu (1.7); dla  $\psi_1$  według wzoru (2.8), wykorzystując związki (2.2), otrzymujemy

$$(2.10) \quad \alpha = -\frac{\sigma_0 J_0}{2 \iint_A \psi_s dA},$$

gdzie  $J_0$  oznacza biegunowy moment bezwładności przekroju pręta. Stała  $D$ , proporcjonalna do kąta skręcenia (dodatkowego), wyniesie

$$(2.11) \quad D = 2\sigma_0 - \alpha \nabla^2 \psi_s.$$

Ponieważ  $\sigma_{z1} = 0$ , więc w pierwszym przybliżeniu kąt zwięcia  $\vartheta_0$  nie ma wpływu na nośność graniczną pręta  $\bar{N}$ .

Zajmijmy się teraz układem równań (1.4) zapisanym w celu określenia poprawki II-go rzędu ( $n=2$ ). I tutaj następują pewne uproszczenia: w związkach fizycznych prawe strony równań są równe zeru, także w warunkach nierozdzielności oraz warunku plastyczności pewne wyrazy się zerują. Równania równowagi (1.4)<sub>1</sub> i (1.4)<sub>2</sub> przyjmują postać

$$(2.11') \quad \frac{\partial \sigma_{\xi 2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi \eta 2}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \tau_{\xi \eta 2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta 2}}{\partial \eta} = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi},$$

gdzie  $\lambda = \eta \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}$  jest wobec (2.3) funkcją harmoniczną. Wprowadzając funkcję harmoniczną  $f(\xi, \eta)$  sprzężoną z funkcją  $\lambda(\xi, \eta)$ , otrzymujemy układ równań analogiczny do układu równań płaskiego zagadnienia teorii sprężystości z siłami masowymi, posiadającymi potencjał  $f$ . Spełnimy je więc tożsamościowo wprowadzając funkcję naprężeń  $\Phi_2(\xi, \eta)$  w następujący sposób:

$$(2.12) \quad \sigma_{\xi 2} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + f(\xi, \eta), \quad \sigma_{\eta 2} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} + f(\xi, \eta), \quad \tau_{\xi \eta 2} = -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Równania (1.4)<sub>4</sub>, (1.4)<sub>5</sub>, (1.4)<sub>6</sub>, jak już wspomniano wcześniej, nie są niezależne i służą do wyznaczenia  $\varepsilon_{z2}$ . Wykorzystując warunek nieściśliwości (1.4)<sub>7</sub> oraz równanie powstałe w wyniku odjęcia stronami równań (1.4)<sub>8</sub> i (1.4)<sub>9</sub>, możemy wyrazić  $\varepsilon_{\xi 2}$  i  $\varepsilon_{\eta 2}$  w postaci funkcji  $\varepsilon_{z2}$ ,  $\Phi_2$ ,  $f(\xi, \eta)$  (równanie powstałe w wyniku sumowania związków (1.4)<sub>8</sub> i (1.4)<sub>9</sub> służy do wyznaczenia  $\varphi_2$ ). Podstawiając uzyskane w ten sposób funkcje  $\varepsilon_{\xi 2}$  i  $\varepsilon_{\eta 2}$  do warunku nierozdzielności (1.4)<sub>3</sub> oraz wykorzystując równanie (1.4)<sub>10</sub> otrzymujemy równanie, które powinna spełniać funkcja  $\Phi_2$ :

$$\varphi_0 \nabla^4 \Phi_2(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{z2}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z2}}{\partial \eta^2}.$$

Lecz, jak łatwo sprawdzić opierając się na (1.4)<sub>4</sub> i (1.4)<sub>5</sub>,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{z2}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z2}}{\partial \eta^2} = 0,$$

stąd wynika równanie biharmoniczne

$$(2.13) \quad \nabla^4 \Phi_2(\xi, \eta) = 0.$$

Warunki brzegowe (1.5) zapisane przy wykorzystaniu zależności (2.12) przyjmują postać

$$(2.14) \quad \begin{aligned} F'_\xi \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} - F'_\eta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} &= -(\eta F'_\xi - \xi F'_\eta) \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} - F'_\xi f(\xi, \eta), \\ F'_\xi \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} - F'_\eta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} &= -(\eta F'_\xi - \xi F'_\eta) \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + F'_\eta f(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie biharmoniczne (2.13) z warunkami brzegowymi (2.14) na konturze przekroju oraz wykorzystując związki (2.12) możemy określić  $\sigma_{\xi 2}$ ,  $\sigma_{\eta 2}$ ,  $\tau_{\xi \eta 2}$ . Interesującą nas wielkość  $\sigma_{z2}$  wyznaczymy z warunku plastyczności (1.4)<sub>11</sub>, który dla  $n=2$  przedstawia się następująco:

$$(2.15) \quad \sigma_{z0} (2\sigma_{z2} - \sigma_{\xi 2} - \sigma_{\eta 2}) = -3(\tau_{\xi z 1}^2 + \tau_{\eta z 1}^2)$$

lub po wprowadzeniu funkcji naprężeń  $\psi_1$  i  $\Phi_2$  oraz podstawieniu  $\sigma_{z0} = \sigma_0$

$$(2.16) \quad \sigma_{z2} = f(\xi, \eta) + \frac{1}{2} \nabla^2 \Phi_2(\xi, \eta) - \frac{3}{2\sigma_0} |\text{grad } \psi_1(\xi, \eta)|^2.$$

Jak widać, problem określenia poprawki II-go rzędu sprowadza się do znalezienia funkcji biharmonicznej  $\Phi_2(\xi, \eta)$  spełniającej warunki brzegowe (2.14). W przedstawionych poniżej przykładach zadanie to rozwiążemy ściśle bądź też przy zastosowaniu przybliżonej metody Trefftza. Przyjmujemy rozwiązanie w postaci

$$(2.17) \quad \bar{\Phi}_2 = a_1 \bar{\varphi}_1 + a_2 \bar{\varphi}_2 + a_3 \bar{\varphi}_3 + \dots + a_m \bar{\varphi}_m,$$

gdzie  $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \dots, \bar{\varphi}_m$  są funkcjami biharmonicznymi.

Nieznane współczynniki  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  wyznaczmy z warunku

$$(2.18) \quad J = \int_S [\Phi_2|_k - \bar{\Phi}_2|_k]^2 ds = \min,$$

gdzie  $s$  oznacza kontur rozważanego przekroju,  $\Phi_2|_k, \bar{\Phi}_2|_k$  wartości funkcji  $\Phi_2$  i  $\bar{\Phi}_2$  na brzegu (konturze) przekroju.

Na podstawie (2.18) otrzymujemy następujący układ równań dla wyznaczenia  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ :

$$(2.19) \quad \frac{\partial J}{\partial a_i} = -2 \int_S [\Phi_2|_k - \bar{\Phi}_2|_k] \frac{\partial \bar{\Phi}_2|_k}{\partial a_i} ds = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots, m.$$

O doborze funkcji  $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \dots, \bar{\varphi}_m$  decyduje postać warunków brzegowych (2.14) zapisanych dla rozważanego przekroju.

### 3. PRZYKŁADY

Przedstawione powyżej rozważania zilustrujemy przykładami. Rozpatrzmy przypadek pręta zwiętego o przekroju eliptycznym (rys. 2a) oraz pręta zwiętego o przekroju kołowym z małym wcięciem kołowym (rys. 2b), przy czym środek wcięcia (okrąg o promieniu  $r$ ) przyjęto tu na brzegu koła «podstawowego» o promieniu  $R$ . O wyborze tych przykładów zadecydowała znajomość stosunkowo prostych rozwiązań zagadnienia sprężystego skręcania prętów przyrządycznych o takich właśnie przekrojach [1], tj. znajomość funkcji  $\psi_s$ .

#### 3.1. Przekrój o kształcie eliptycznym

Dla tego przekroju na podstawie [1], przyjmujemy

$$(3.1) \quad \psi_s = \frac{\sigma_0}{2} \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right),$$

a stąd, wykorzystując wzór (2.8), mamy

$$(3.2) \quad \psi_1 = C - \frac{\sigma_0}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \alpha \frac{\sigma_0}{2} \left( \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right).$$

Parametr  $\alpha$  wyznaczamy korzystając ze wzoru (2.10); otrzymujemy

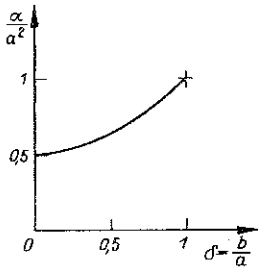
$$(3.3) \quad \alpha = \frac{1}{2} a^2 (1 + \delta^2),$$



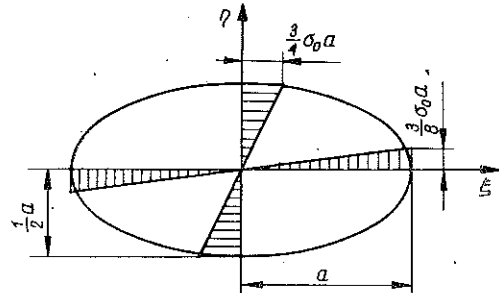
gdzie  $\delta = b/a$ . Naprężenia  $\tau_{\xi z_1}$  i  $\tau_{\eta z_1}$  są określone wzorami

$$(3.4) \quad \tau_{\xi z_1} = \frac{1-\delta^2}{2\delta^2} \sigma_0 \eta, \quad \tau_{\eta z_1} = \frac{1-\delta^2}{2} \sigma_0 \xi.$$

Rysunek 3 ilustruje zależność (3.3); na rys. 4 przedstawiono rozkład naprężeń stycznych będący rozwiązaniem poprawki I-go rzędu.



Rys. 3



Rys. 4

W celu określenia poprawki II-go rzędu należy znaleźć rozwiązanie równania biharmonicznego (2.13) z warunkami brzegowymi (2.14), które dla rozpatrywanego przekroju eliptycznego przedstawiają się następująco:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{\xi}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} - \frac{\eta}{b^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1}{a^2} \sigma_0 \frac{(1-\delta^2)(3+\delta^4)}{4\delta^4} \xi \eta^2 - \frac{1}{4} \sigma_0 \frac{(1-\delta^4)}{\delta^2} \xi, \\ \frac{\xi}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\eta}{b^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{a^2} \sigma_0 \frac{(1-\delta^2)(3\delta^4+1)}{4\delta^4} \xi^2 \eta - \frac{1}{4} \sigma_0 \frac{(1-\delta^4)}{\delta^2} \eta, \end{aligned}$$

gdzie podstawiono  $f(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \sigma_0 \frac{(1-\delta^4)}{\delta^2} (\xi^2 - \eta^2)$ .

Przyjmujemy rozwiązanie w postaci

$$(3.6) \quad \bar{\Phi}_2(\xi, \eta) = a_1(\xi^4 - 3\xi^2\eta^2) + a_2(\eta^4 - 3\xi^2\eta^2) + a_3\xi^2 + a_4\eta^2.$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji różniczkowania na funkcji (3.6), wstawieniu otrzymanych funkcji do wzorów (3.5) i rozwiązaniu otrzymanego układu równań względem niewiadomych  $a_1, a_2, a_3, a_4$  znajdziemy

$$(3.7) \quad a_1 = -\frac{1}{48} \sigma_0 \frac{(1-\delta^2)(3\delta^2+1)}{\delta^2}, \quad a_2 = \frac{1}{48} \sigma_0 \frac{(1-\delta^2)(\delta^2+3)}{\delta^2},$$

$$a_3 = -a_4 = \frac{1}{2} \sigma_0 a^2 (1-\delta^2),$$

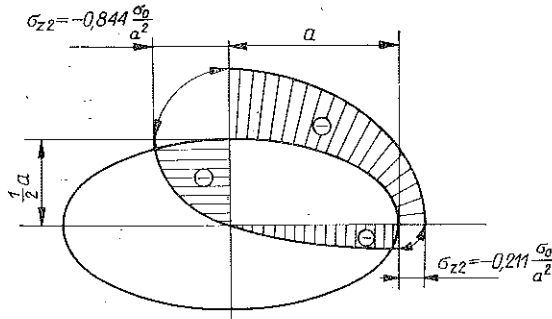
zatem założenie (3.6) prowadzi do rozwiązania ścisłego. Wykorzystując związek (2.16) łatwo znajdziemy poszukiwaną wielkość  $\sigma_{z_2}$ :

$$(3.8) \quad \sigma_{z_2} = -\frac{3}{8} \sigma_0 (1-\delta^2)^2 \left( \xi^2 + \frac{\eta^2}{\delta^4} \right).$$

Rysunek 5 przedstawia wykres powyższej funkcji dla  $\delta=0,5$ .

Nośność graniczna przy rozciąganiu pręta zwiętego o przekroju eliptycznym wyraża się, na podstawie (1.6), wzorem

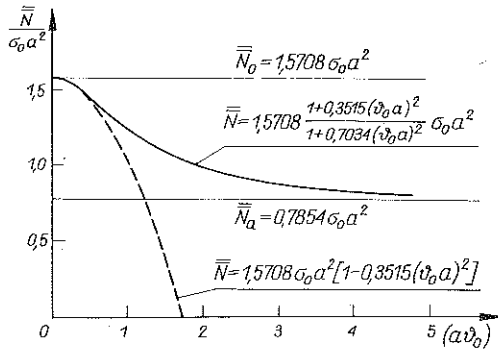
$$(3.9) \quad \bar{N} = \sigma_0 \pi a^2 \delta \left[ 1 - \frac{3}{32} (1 - \delta^2)^2 \frac{(1 + \delta^2)}{\delta^2} a^2 \vartheta_0^2 + \dots \right].$$



Rys. 5

Obliczona siła  $\bar{N}$  nie może być mniejsza od siły wyczerpującej nośność graniczną przy rozciąganiu pręta okrągłego o promieniu  $b$  wpisanego w rozważany przekrój, tj.  $\bar{N} \geq \sigma_0 \pi a^2 \delta^2$ . Tę graniczną wartość można uznać za asymptotyczną wartość wyrażenia (3.9), gdy  $\vartheta_0 \rightarrow \infty$ . Przyjmijmy, podobnie jak w [3], następującą funkcję aproksymacyjną dla  $\bar{N}$ :

$$(3.10) \quad \bar{N} = \sigma_0 \pi a^2 \delta \frac{1 + G_1 \vartheta_0^2}{1 + E_1 \vartheta_0^2}.$$



Rys. 6

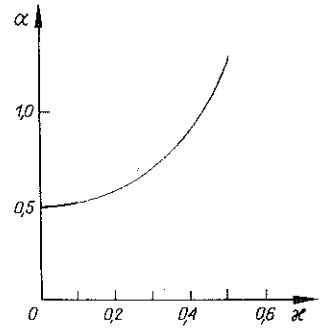
Żądanie identyczności rozwinięć funkcji (3.10) i (3.9) oraz ich wartości asymptotycznych determinuje stałe  $G_1$  i  $E_1$ :

$$(3.11) \quad G_1 = \frac{3(1 - \delta^2)^2 (1 + \delta^2)}{32(1 - \delta)\delta^2} \delta a^2, \quad E_1 = \frac{3(1 - \delta^2)^2 (1 + \delta^2)}{32(1 - \delta)\delta^2} a^2.$$

Rysunek 6 przedstawia powyższe obliczenia dla  $\delta=0,5$ .

3.2. Przekrój kołowy z małym wcięciem kołowym

Wielkość wcięcia charakteryzuje bezwymiarowy stosunek  $\kappa = r/2R$ . Jak można zauważyć, środek ciężkości rozważanego przekroju nie znajduje się w początku układu współrzędnych  $\xi, \eta$  (nie pokrywa się ze środkiem ciężkości «koła podstawowego»); oś pręta zwitego o takim przekroju nie jest linią prostą lecz krzywą przestrzenną. Po przyłożeniu do końców rozważanego pręta zwitego sił rozciągających  $N$  w przekroju obok naprężeń pochodzących od rozciągania wystąpią również naprężenia pochodzące od zginania. Dopuszczając jednak jedynie małe wielkości wcięcia ( $\kappa \leq 0,1$ ) można przekonać się, że przesunięcie środka ciężkości rozważanego przekroju w stosunku do środka ciężkości «koła podstawowego» nie przekracza  $0,015 R$ , a udział naprężeń pochodzących od zginania nie przekracza wartości  $0,05 \sigma_{rozcz}$ . Z tego powodu przy obliczaniu nośności granicznej rozważanego pręta wpływ zginania został pominięty, a wyprowadzony dalej przybliżony wzór na siłę graniczną  $N$  można uznać za poprawny dla  $\kappa \leq 0,1$ .



Rys. 7

Na podstawie [1] dla rozważanego przekroju mamy

$$(3.12) \quad \psi_s = \sigma_0 [(\xi - R)^2 + \eta^2 - r^2] \frac{\xi^2 + \eta^2 - R^2}{(\xi - R)^2 + \eta^2},$$

a następnie wykorzystując wzór (2.8)

$$(3.13) \quad \psi_1 = C - \frac{\sigma_0}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \alpha \sigma_0 [(\xi - R)^2 + \eta^2 - r^2] \frac{\xi^2 + \eta^2 - R^2}{(\xi - R)^2 + \eta^2}.$$

Parametr  $\alpha$  określamy korzystając ze wzoru (2.10):

$$(3.14) \quad \alpha = \frac{(1 - 4\kappa^2 - 8\kappa^4) \arccos \kappa + (1 + 10\kappa^2) \kappa \sqrt{1 - \kappa^2}}{2[(1 - 8\kappa^2 - 8\kappa^4) \arccos \kappa + (1 + 14\kappa^2) \kappa \sqrt{1 - \kappa^2}]}.$$

Funkcję (3.14) ilustruje rys. 7. Wzory na naprężenia  $\tau_{\xi z_1}$  i  $\tau_{\eta z_1}$  przedstawiają się następująco:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \tau_{\xi z_1} &= -\sigma_0 \eta + 2\sigma_0 \alpha \left\{ \eta + 8R^3 \kappa^2 \frac{(\xi - R)\eta}{[(\xi - R)^2 + \eta^2]^2} \right\}, \\ \tau_{\eta z_1} &= \sigma_0 \xi - 2\sigma_0 \alpha \left\{ \xi - 4R^3 \kappa^2 \frac{\eta^2 - (\xi - R)^2}{[(\xi - R)^2 + \eta^2]^2} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha$  określono wzorem (3.14).

Dla określenia poprawki II-go rzędu należy znaleźć rozwiązanie równania bi-harmonicznego (2.13) z warunkami brzegowymi (2.14), które w tym przypadku przyjmują postać:

dla  $(\xi - R)^2 + \eta^2 - r^2 = 0$

$$(3.16) \quad (\xi - R) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} = \sigma_0 R (\xi - R)^2 - 4\sigma_0 R^3 \kappa^2 (1 - 2\alpha) + 2\sigma_0 R^2 (\xi - R) \alpha,$$

$$(\xi - R) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} - \eta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} = -\sigma_0 R \xi \eta + 2\alpha \sigma_0 R^2 \eta;$$

dla  $\xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0$

$$(3.16') \quad \xi \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} = -4\sigma_0 \alpha \frac{\xi}{R - \xi} \kappa^2 R^3,$$

$$\xi \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi \partial \eta} - \eta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} = 4\sigma_0 \alpha \frac{\eta}{R - \xi} \kappa^2 R^3.$$

W powyższych równaniach podstawiono funkcję harmoniczną

$$f(\xi, \eta) = \frac{2(2R - \xi) [(\xi - R)^2 + \eta^2] - 4(\xi - R)^2 R}{[(\xi - R)^2 + \eta^2]^2}.$$

Przyjmijmy rozwiązanie w postaci

$$(3.17) \quad \Phi_2(\xi, \eta) = a_1 \ln \left[ \frac{1}{R} \sqrt{(\xi - R)^2 + \eta^2} \right] + a_2 (\xi - R) \ln \left[ \frac{1}{R} \sqrt{(\xi - R)^2 + \eta^2} \right] +$$

$$+ a_3 [\xi^4 - 3(\xi - R)^2 \eta^2] + a_4 \xi^3 + a_5 \xi^2 + a_6 \xi \eta^2 + a_7 [\eta^4 - 3(\xi - R)^2 \eta^2].$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji różniczkowych na funkcji (3.17) i podstawieniu otrzymanych wyników do wzorów (3.16) mamy

dla  $(\xi - R)^2 + \eta^2 - r^2 = 0$

$$(3.18) \quad (\xi - R) \frac{a_1}{4\kappa^2 R^2} + \frac{a_2}{4\kappa^2 R^2} [2(\xi - R)^2 - 4R^2 \kappa^2] + 12a_7 (\xi - R) \eta^2 +$$

$$+ 2a_6 \xi (\xi - R) + 2a_6 (\xi - R)^2 - 2a_6 r^2 - 18(a_3 + a_7) (\xi - R)^3 +$$

$$+ 48R^2 \kappa^2 (a_3 + a_7) (\xi - R) = \sigma_0 R (\xi - R)^2 - 4\sigma_0 R^3 \kappa^2 (1 - 2\alpha) +$$

$$+ 2\sigma_0 R^2 \alpha (\xi - R),$$

$$-\frac{a_1}{4\kappa^2 R^2} \eta - \frac{a_2}{2\kappa^2 R^2} \eta (\xi - R) + 2a_6 (\xi - R) \eta - 2a_5 \eta - 6a_4 \xi \eta - 12a_3 \xi^2 \eta +$$

$$+ 6(a_3 + a_7) \eta^3 - 12(a_3 + a_7) (\xi - R)^2 \eta = -\sigma_0 R \xi \eta + 2\alpha \sigma_0 R^2 \eta;$$

dla  $\xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0$

$$(3.18') \quad -\frac{a_1}{2(R - \xi)} - \frac{a_2}{2R} \xi + 12a_7 \xi \eta^2 + 4a_6 \xi^2 + 24(a_3 + a_7) R \xi^2 + 6(a_3 + a_7) R^2 \xi -$$

$$- 12(a_3 + a_7) R^3 - 2a_6 R^2 - 18(a_3 + a_7) \xi^3 = -4\sigma_0 \alpha \frac{\xi}{R - \xi} \kappa^2 R^3,$$

$$\frac{a_2 \eta (2R - \xi)}{2R(R - \xi)} + 2a_6 \xi \eta - 2a_5 \eta - 6a_4 \xi \eta - 12a_3 \xi^2 \eta - 18(a_3 + a_7) \xi^2 \eta +$$

$$+ 12(a_3 + a_7) R \xi \eta + 6(a_3 + a_7) R^2 \eta = 4\sigma_0 \alpha \frac{\eta}{R - \xi} \kappa^2 R^3.$$

Przyjmując

$$a_2 = 8\sigma_0 R^3 \kappa^2 \alpha, \quad a_3 = -\frac{1}{16} \sigma_0 (1 - 4\alpha),$$

$$a_4 = \frac{1}{12} \sigma_0 R (1 - 2\kappa^2) - \frac{a_1}{24R^3 \kappa^2},$$

$$a_5 = \frac{1}{8} \sigma_0 R^2 \kappa^2 \alpha - \frac{1}{8} \sigma_0 R^2 (1 - 4\alpha),$$

$$a_6 = \frac{1}{4} \sigma_0 R (1 - 4\kappa^2) + \frac{1}{4} \sigma_0 R (1 - 4\alpha) - \frac{a_1}{8R^3 \kappa^2}, \quad a_7 = \frac{5}{48} \sigma_0 (1 - 4\alpha)$$

spełnimy ściśle warunki brzegowe (3.18)<sub>2</sub> i (3.18)<sub>4</sub>. Pozostały do dyspozycji wolny parametr  $a_1$  wyznaczmy metodą Trefftza, spełniając w sposób przybliżony warunki brzegowe (3.18)<sub>1</sub> i (3.18)<sub>3</sub>. Po wykonaniu odpowiednich rachunków otrzymujemy

$$(3.19) \quad a_1 = 2\kappa^2 \sigma_0 R^4 a_0,$$

gdzie

$$a_0 = \frac{L}{M}$$

$$L = \frac{1}{4} [5 - 12\beta + 4\beta^2 - (1 - 3\beta + 4\beta^2)(1 - 4\alpha)] (\pi - \arccos \beta) + 16\kappa^5 \beta \arccos \kappa +$$

$$+ \left[ \frac{44}{15} + \frac{163}{6} \beta + \frac{14}{15} \beta^2 + \frac{5}{3} \beta^3 - \frac{6}{5} \beta^4 - 4\beta^5 - \frac{4}{3} \beta^6 + \left( \frac{212}{105} - \frac{37}{30} \beta - \frac{103}{210} \beta^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3}{5} \beta^3 - \frac{201}{35} \beta^4 + \frac{102}{15} \beta^5 - \frac{16}{7} \beta^6 \right) (1 - 4\alpha) + \frac{8}{3} \kappa^3 (4 - 6\beta - \beta^2 + 3\beta^3) - \right.$$

$$\left. - \frac{16}{15} \kappa^3 (7 + 2\beta + 13\beta^2 - 12\beta^3)(1 - 4\alpha) \right] \kappa \sqrt{1 - \kappa^2},$$

$$M = \frac{1}{4} (7 - 8\beta + 4\beta^2) (\pi - \arccos \beta) + 16\kappa^5 \arccos \kappa +$$

$$+ \left[ \frac{176}{15} - \frac{29}{6} \beta - \frac{44}{15} \beta^2 - \frac{13}{3} \beta^3 - \frac{4}{3} \beta^5 + \frac{48}{15} \beta^6 - 16\beta \kappa^5 \right] \kappa \sqrt{1 - \kappa^2},$$

przy czym  $\kappa = r/2R$ ;  $\alpha$  określone jest wzorem (3.14) oraz  $\beta = 1 - 2\kappa^2$ .

Znany już wszystkie parametry we wzorze (3.17). Wykorzystując teraz zależność (2.16) określimy  $\sigma_{z2}$ , a następnie poprawkę II-go rzędu  $N_2$ . Na rys. 8 przedstawiono rozkład naprężeń  $\sigma_{z2}$  dla  $\kappa = 0, 1$ . Poszukiwana nośność graniczna przy rozciąganiu pręta zwitego o rozważnym przekroju wyraża się wzorem

$$(3.20) \quad \bar{N} = 2\sigma_0 R^2 [(1 - 2\kappa^2) \arccos \kappa + \kappa \sqrt{1 - \kappa^2}] -$$

$$- \sigma_0 R^4 \left\{ \left[ 2\kappa^2 [1 + (1 - 2\alpha)(1 - \kappa^2) - a_0] + \frac{3}{2} [(1 - 4\kappa^2 - 8\kappa^4)(1 - 2\alpha)^2 + \right. \right.$$

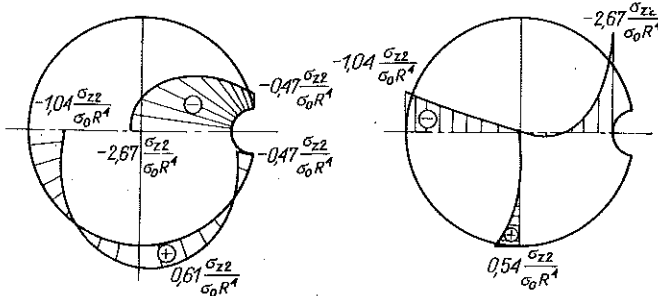
$$\left. \left. + 16\alpha \kappa^2 (1 - \alpha)] \right] \arccos \kappa + \left\{ \frac{3}{2} [(1 + 10\kappa^2)(1 - 2\alpha)^2 - 16\alpha \kappa^2 (1 - \alpha)] - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2\kappa^2 \left[ 2\alpha + \frac{2}{3} (1 - \kappa^2) [3 + 2(1 - 4\alpha)] - a_0 \right] \right\} \kappa \sqrt{1 - \kappa^2} \right\} \vartheta_0^2 + \dots,$$

gdzie  $\alpha$  określone jest wzorem (3.14) oraz  $a_0$  wzorem (3.19).

Przyjmując dla (3.20) formułę aproksymacyjną w postaci

$$(3.21) \quad \bar{N} = 2\sigma_0 R^2 [(1 - 2\kappa^2) \arccos \kappa + \kappa \sqrt{1 - \kappa^2}] \frac{1 + G_1 \vartheta_0^2}{1 + E_1 \vartheta_0^2},$$

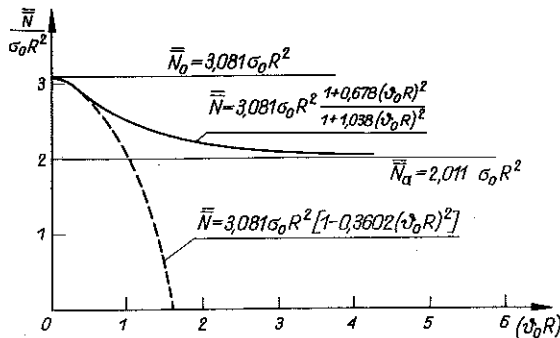


Rys. 8

stałe  $G_1$  i  $E_1$  wyznaczmy na drodze analogicznej do przedstawionej w przykładzie poprzednim. Za wartość asymptotyczną funkcji (3.21) przyjmujemy teraz wartość  $\bar{N}_a = \pi R^2 (1 - 2\kappa^2) \sigma_0$ . Przykładowo, dla  $\kappa = 0,1$  mamy

$$(3.22) \quad \bar{N} = 3,081 \sigma_0 R^2 \frac{1 + 0,678 (\vartheta_0 R)^2}{1 + 1,038 (\vartheta_0 R)^2}.$$

Funkcję (3.22) ilustruje rys. 9.



Rys. 9

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, cz. I, PWN, Warszawa 1954.
2. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
3. M. ŻYCZKOWSKI, M. GALOS, *Plastic torsion and tension of naturally uniformly twisted bars*, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 24, 5-6, 1039-1055, 1972.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ РАСТЯГИВАЕМЫХ СВЕРТЫХ СТЕРЖНЕЙ

В настоящей работе, составляющей продолжение работы [3], занимаются решением задачи пластического растяжения свертых стержней, изготовленных из идеально пластического материала. Используются условие пластичности Губера-Мизеса-Генки и теория пластичности Генки-Ильюшина (или Леви-Мизеса). Задача решена при помощи метода малого параметра в криволинейной, косоугольной системе координат  $\xi, \eta, \zeta$ , причем напряжения и деформации рассмотрены в локально ортогональной системе координат  $\xi, \eta, z$ . Малым параметром принят единичный угол свертки стержня  $\vartheta_0$ . Работа иллюстрирована примерами пластического растяжения свертого стержня эллиптического сечения, а также свертого стержня кругового сечения с малым круговым врезом. Выведены приближенные формулы определяющие предельную нагрузку при растяжении рассматриваемых стержней.

SUMMARY

CERTAIN CASES OF LIMIT CARRYING CAPACITY OF NATURALLY TWISTED BARS IN TENSION

In the present paper, which is a continuation of paper [3], the problem of solution of plastic tension of twisted rods made of perfectly-plastic material is considered. The Huber-Mises-Hencky yield condition and Hencky-Ilyushin (or Levy-Mises) plasticity theory are applied. The problem is solved by a small parameter method in an oblique curvilinear system of reference  $\xi, \eta, \zeta$ , but the stresses and strains are considered in a locally orthogonal system of coordinates  $\xi, \eta, z$ . As a small parameter the unit angle of natural twist of the rod  $\vartheta_0$  is assumed. The paper is illustrated by the examples of plastic tension of twisted rod of elliptic cross-section and of twisted rod of circular cross-section with a small circular notch. The approximate formulae determining the limit carrying capacity in tension of the rods considered are derived.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
 INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 czerwca 1975 r.*