

NIELINIOWE RÓWNIANIA RUCHU MAŁOWYNIOSŁEJ SPRĘŻYSTEJ TRÓJWARSTWOWEJ POWŁOKI

DANIEL BUGAJNY (POZNAŃ)

Praca niniejsza zawiera wyprowadzenie ogólnych równań rozpatrywanego zagadnienia oraz sprowadzenia ich do trzech podstawowych równań różniczkowych cząstkowych względem niewiadomych funkcji: naprężeń, przemieszczenia poprzecznego (ugięcia) oraz odkształcenia postaciowego warstwy wypełniającej. Równania podstawowe dotyczą dynamiki powłoki trójwarstwowej o niesymetrycznej izotropowej budowie warstw i uwzględniają efekt inercji obrotu elementu powłoki oraz początkowe odchylenie od kształtu geometrycznego idealnego. W przypadku szczególnym rozważa się nieliniowe zagadnienie stateczności dynamicznej otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej, ściskanej siłami zmieniającymi się w czasie według funkcji wykładniczej. Przedstawiono wyniki przykładu liczbowego, dotyczące tego ostatniego przypadku.

WSTĘP

Powłoki trójwarstwowe lub wielowarstwowe zarówno otwarte jak i zamknięte są pospolitymi elementami konstrukcyjnymi, dlatego też ich dokładna analiza zachowania się przy dynamicznych obciążeniach jest bardzo ważna. Przykładem potrzeby dynamicznej analizy całej konstrukcji lub jej elementów mogą być zagadnienia zapobiegania skutkom katastrofalnych obciążeń występujących przy zderzeniach pojazdów, niszczących działań wybuchów itp. Elementy te są poddane dużym obciążeniom, a towarzyszące im amplitudy giętych drgań nie są takie małe w porównaniu z grubością powłoki, aby móc je analizować za pomocą liniowych równań drgań. Zagadnienia dynamiczne (drgania, propagacja fal, wyboczenie dynamiczne) w ujęciu liniowym z uwzględnieniem efektu inercji obrotu dla płyt i powłok trójwarstwowych rozpatrzono w pracach [1–8]. Nieliniowe zagadnienia dynamiczne były analizowane przez nielicznych autorów. Z ważniejszych należy wymienić prace [9, 10 i 11]. Pierwsza praca dotyczy dynamicznej reakcji trójwarstwowej czaszy kulistej na działanie osiowo-symetrycznego ciśnienia nagle przyłożonego. W drugiej rozwiązano zagadnienie wyboczenia ściskanej otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej przy założeniu, że obciążenie wzrasta liniowo w czasie. W pracy [11] rozpatrywano zagadnienie niestabilnego flateru małowyniosłej trójwarstwowej powłoki wykorzystując równania GRIGOLUKA i CZULKOWA [15]. Zagadnienia wyżej wymienione rozwiązano opierając się na uproszczonych równaniach ruchu i przy założeniu symetrycznej budowy warstw [9 i 10], to jest warstw nośnych, wykonanych z jednakowych materiałów i równej grubości. Uproszczenie równań polegało tutaj na odrzuceniu sił inercji, działających w kierunkach stycznych do powierzchni środkowej, oraz momentów sił inercji obrotu. Pełne (bez uproszczeń) nieliniowe

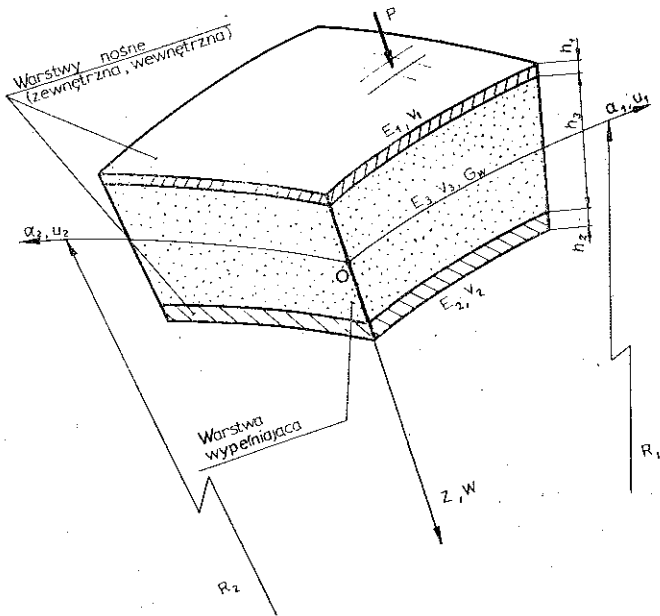
równania ruchu w zapisie tensorowym dla płyt trójwarstwowych sformułował EBCIOGLU [12], a dla powłok wielowarstwowych GERSZTEJN w pracy [13].

Praca niniejsza zawiera wyprowadzenie ogólnych równań rozpatrywanego zagadnienia oraz sprowadzenia ich do trzech podstawowych równań względem niewiadomych funkcji: naprężeń, odkształcenia postaciowego warstwy wypełniającej oraz przemieszczenia poprzecznego (ugięcia). Równania podstawowe stanowią układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych i uwzględniają efekt inercji obrotu elementu powłoki.

Z przeprowadzonej analizy wynika, iż efekt ten jest nie do pominięcia w zagadnieniach dynamicznego wyboczenia.

2. ZAŁOŻENIA I PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Rozpatrywana powłoka trójwarstwowa składa się z dwu cienkich warstw nośnych (zewewnętrznej i wewnętrznej) o grubościach h_k ($k=1, 2$) i różnych izotropowych własnościach sprężystych. Między nimi znajduje się warstwa środkowa (wypełniająca) transwersalnie izotropowa o grubości h_3 (rys. 1). Powłokę traktujemy jako mało-



Rys. 1

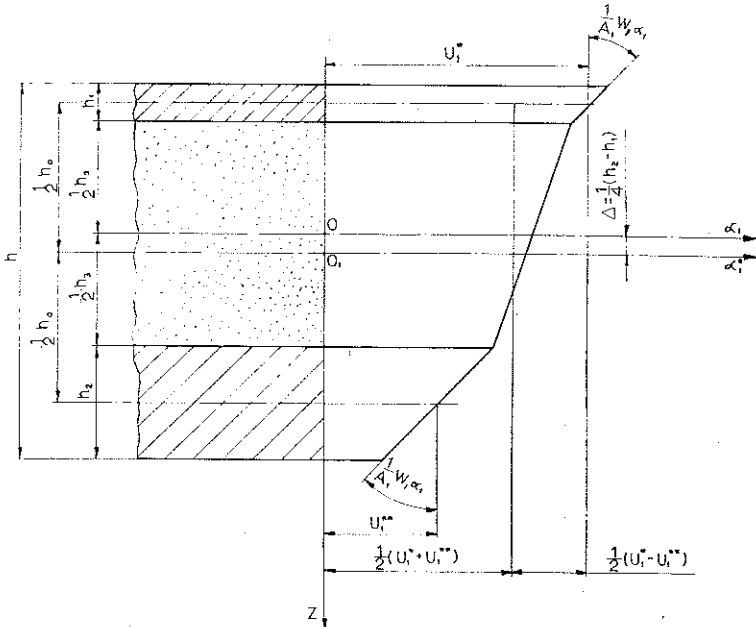
wyniosłą przyjmując promienie krzywizn poszczególnych warstw za jednakowe, a powierzchnię środkową warstwy wypełniającej przyjmujemy jako powierzchnię podstawową. W punkcie 0 na powierzchni podstawowej przyjmujemy układ ortogonalny współrzędnych krzywoliniowych, pokrywający się z liniami krzywizn głównych α_1 i α_2 . Dla określenia położenia punktu nie należącego do powierzchni podstawowej

wprowadzimy oś z normalną do tej powierzchni z dodatnim zwrotem ku środkowi krzywizny powłoki. Przyjmujemy ponadto następujące założenia:

- 1) warstwa wypełniająca jest nieściśliwa w kierunku poprzecznym, a odkształcenia ścinania poprzecznego rozkładają się liniowo na grubości;
- 2) dla warstw nośnych zakładamy ważność hipotezy Kirchhoffa-Love'a;
- 3) dla wszystkich warstw przyjęto zastępcze przewężenie względne;
- 4) odkształcenia powłoki w zakresie umiarkowanie dużych ugięć określone są związkami geometrycznymi technicznej teorii powłok Własowa;
- 5) powłoka wykazuje początkowe małe odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu (wstępne ugięcia);
- 6) na powłokę działa składowa normalna obciążenia zewnętrznego.

W związku z tymi założeniami w warstwach nośnych panuje płaski stan naprężenia, natomiast w warstwie środkowej pomija się jedynie naprężenia normalne do powierzchni podstawowej. Jak wiadomo [14 i 15] przyjęte założenia są dopuszczalne w szerokim zakresie praktycznie ważnych przypadków konstrukcji trójwarstwowych.

Zależności kinematyczne pomiędzy składowymi stanu przemieszczenia U_1, U_2, W dowolnego punktu powłoki, a przemieszczeniami punktów leżących na powierzchniach środkowych warstw zewnętrznej U_1^*, U_2^*, W_1 i wewnętrznej U_1^{**}, U_2^{**}, W_2 , określimy zgodnie z założeniami 1 i 2. Przemieszczenia te są funkcjami odpowiednich współrzędnych α_1, α_2, z oraz czasu t (rys. 2), przy czym mamy:



Rys. 2

dla warstwy zewnętrznej

$$(2.1)_1 \quad U_1 = U_1^* - (z + h_4) \frac{W_{,\alpha_1}}{A_1},$$

dla warstwy wewnętrznej

$$(2.1)_2 \quad U_1 = U_1^{**} - (z + h_5) \frac{W_{, \alpha_1}}{A_1},$$

dla warstwy środkowej

$$(2.1)_3 \quad U_1 = \frac{1}{2} (U_1^* + U_1^{**}) + h_6 \frac{W_{, \alpha_1}}{A_1} - \frac{2z}{h_3} \left(\frac{U_1^* - U_1^{**}}{2} - h_7 \frac{W_{, \alpha_1}}{A_1} \right), \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ (1 \ 2) \\ \leftarrow \end{matrix},$$

gdzie $A_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $A_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2)$ oznaczają współczynniki Lamégo, $(\)_{, \alpha_1} = \partial(\) / \partial \alpha_1$, $(\)_{, \alpha_2} = \partial(\) / \partial \alpha_2$ pochodne cząstkowe względem współrzędnych; $\begin{matrix} \rightarrow \\ (1 \ 2) \\ \leftarrow \end{matrix}$ jest symbolem określającym pozostałe niewypisane formuły, które można otrzymać przez przestawienie wskaźników 1 i 2 oraz

$$h_4 = \frac{1}{4} (h_1 + h_3), \quad h_5 = -\frac{1}{4} (h_2 + h_3),$$

$$h_6 = \frac{1}{4} (h_2 - h_1), \quad h_7 = \frac{1}{4} (h_1 + h_2).$$

Dla wszystkich warstw przyjęto $W_1 = W_2 = W_3 = W$, tj. w kierunku osi z warstwa wypełniająca nie odkształca się (założenie 1).

Zgodnie z założeniami 4 i 5 stan odkształceń powłoki określony jest przez składowe wektora przemieszczeń następującymi związkami geometrycznymi [16]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} U_{1, \alpha_1} + \frac{U_2}{A_1 A_2} A_{1, \alpha_2} - k_{11} W + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1} W_{, \alpha_1} \right)^2 + \frac{1}{A_1^2} W_{, \alpha_1} W_{0, \alpha_1}, \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{U_1}{A_1} \right)_{, \alpha_2} + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{U_2}{A_2} \right)_{, \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} (W_{, \alpha_1} W_{, \alpha_2} + W_{, \alpha_1} W_{0, \alpha_2} + \\ &\quad + W_{, \alpha_2} W_{0, \alpha_1}), \\ \varepsilon_{13} &= U_{1, z} + \frac{1}{A_1} W_{, \alpha_1}, \end{aligned} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ (1 \ 2) \\ \leftarrow \end{matrix},$$

gdzie ε_{11} , ε_{22} są wydłużeniami względnymi, a ε_{12} , ε_{23} , ε_{13} kątami odkształcenia postaciowego w odpowiednich kierunkach lub płaszczyźnie, $k_{11} = 1/R_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $k_{22} = 1/R_2(\alpha_1, \alpha_2)$ krzywiznami głównymi elementu powłoki oraz $W_0(\alpha_1, \alpha_2)$ wstępnymi przemieszczeniami (ugięciami) punktów powłoki w kierunku osi z.

Zgodnie z uogólnionym prawem Hooke'a stan naprężeń w warstwach określony jest następującymi wzorami:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^k &= \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (\varepsilon_{11}^k + \nu_k \varepsilon_{22}^k), \\ \sigma_{12}^k &= \frac{E_k \varepsilon_{12}^k}{2(1 + \nu_k)}, \quad \sigma_{13}^3 = G_W \varepsilon_{13}^3, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ (1 \ 2) \\ \leftarrow \end{matrix},$$

przy czym dla warstw zewnętrznej $k=1$, wewnętrznej $k=2$, a dla warstwy wypełniającej $k=3$, oraz E_k, ν_k oznacza moduł sprężystości podłużnej i przewężenie względne k -tej warstwy, G_W moduł sprężystości postaciowej warstwy wypełniającej.

3. RÓWNANIA RUCHU

Równania różniczkowe ruchu elementu powłoki trójwarstwowej wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi uzyskamy z zasady Hamiltona. Zgodnie z tą zasadą żądamy, aby wariacja całki z funkcjonalów energii kinetycznej i potencjalnej w dowolnym przedziale czasu (t_1, t_2) była równa zero. Otrzymamy zatem warunek

$$(3.1) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\alpha'_1}^{\alpha''_1} \int_{\alpha'_2}^{\alpha''_2} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{(h_k)} (\dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2 + \dot{W}^2) dz - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \int_{(h_k)} \sigma_{ij}^k \varepsilon_{ij}^k dz - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{(h_3)} \sigma_{i3}^3 \varepsilon_{i3}^3 dz + pW \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right\} dt = 0,$$

gdzie ρ_k oznacza gęstość materiału k -tej warstwy, $p(\alpha_1, \alpha_2, t)$ składową normalną obciążenia powierzchniowego oraz gdzie symbol $(\dot{}) = (\partial/\partial t)$ () oznacza różniczkowanie względem czasu. Wprowadzając związki (2.1)—(2.3) oraz nowe zmienne

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} (U_1^* + U_1^{**}), \\ \xi_1 = \frac{1}{2} (U_1^* - U_1^{**}), \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ (1 \quad 2) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

do równania (3.1), całkując w odpowiednich granicach względem zmiennej z i wykonując określone wariacje, otrzymamy równanie wariacyjne zagadnienia. Wobec dowolności wariacji poszczególnych argumentów $(\delta\zeta_1, \dots, \delta W)$ otrzymamy układ równań ruchu elementu powłoki oraz odpowiednie warunki brzegowe zagadnienia, odniesione do powierzchni sprowadzonej (rys. 2), przy czym jej położenie względem powierzchni podstawowej określone jest wzorem $A = \frac{1}{4} (h_2 - h_1)$, a nowy układ współrzędnych α_1^0, α_2^0 , związany z tą powierzchnią, nie różni się praktycznie od poprzedniego ze względu na założenie małej wyniosłości.

Układ równań różniczkowych ruchu przedstawia się następująco:

$$(3.2) \quad \frac{1}{A_1 A_2} \left[(N_{11} A_2)_{,\alpha_1} + \frac{1}{A_1} (N_{12} A_1^2)_{,\alpha_2} - N_{22} A_2_{,\alpha_1} \right] = \\ = \left(\ddot{\zeta}_1 m_a + \ddot{\xi}_1 m_b + \frac{1}{A_1} \ddot{W}_{,\alpha_1} m_c \right) h,$$

$$(3.3) \quad \frac{1}{A_1 A_2} [(A_{22} \tilde{Q}_{13})_{,\alpha_1} + (A_{11} \tilde{Q}_{23})_{,\alpha_2}] + N_{11} k_{11} + N_{22} k_{22} + p = \dot{W} h m_a,$$

$$(3.4) \quad \frac{1}{A_1 A_2} \left[(H_{11} A_2)_{,\alpha_1} + \frac{1}{A_1} (H_{12} A_1^2)_{,\alpha_2} - H_{22} A_{2,\alpha_1} \right] + 2Q_{13} h_3^{-1} = \\ = \left(\check{\zeta}_1 m_b + \check{\zeta}_1 m_d + \frac{1}{A_1} \dot{W}_{,\alpha_1} m_e \right) h,$$

$$\check{\zeta}_1 m_c + \check{\zeta}_1 m_e - \frac{1}{A_1} \dot{W}_{,\alpha_1} m_f = 0, \quad \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ (1-2) \\ \leftarrow \end{array} \right),$$

gdzie symbole N_{ij} , \tilde{Q}_{j3} , H_{ij} ; M_{ij} ($i, j=1, 2$) oznaczają wypadkowe jednostkowych wewnętrznych sił i momentów, działających w przekrojach odpowiednich warstw, zredukowanych do powierzchni sprowadzonej, grubość powłoki wynosi $h = \sum_{k=1}^3 h_k$ oraz

$$m_a = \sum_{k=1}^3 \vartheta_k \rho_k, \quad m_b = \vartheta_1 \rho_1 + \vartheta_2 \rho_2 + \frac{1}{3} m_0, \quad m_c = \vartheta_1 \rho_1 - \vartheta_2 \rho_2,$$

$$m_d = \frac{1}{3} m_0 \vartheta_7 h, \quad m_e = m_0 \vartheta_6 h, \quad m_0 = \vartheta_3 \rho_3,$$

$$m_f = \frac{h^2}{12} [\vartheta_1^2 (\vartheta_1 \rho_1 + m_0) + \vartheta_2^2 (\vartheta_2 \rho_2 + m_0) - \vartheta_1 \vartheta_2 m_0],$$

$$\vartheta_s = h_s h^{-1}, \quad (s=0, 1, 2, \dots, 7).$$

Między składowymi stanu odkształcenia a wypadkowymi siłami i momentami zachodzą związki

$$(3.5) \quad \begin{aligned} N_{ij} &= Bh(a_i + B_{12} b_i + B_{15} h c_i), \\ 2N_{12} &= Bh(1-\nu)(d_1 + B_{12} e_1 + B_{15} h f_1), \end{aligned}$$

$$Q_{i3} = 2G_W \left[\left(\vartheta_7 + \frac{1}{2} \vartheta_3 \right) k_i h + g_i \right],$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \tilde{Q}_{13} &= \frac{N_{11}}{A_1} (W + W_0)_{,\alpha_1} + \frac{N_{12}}{A_2} (W + W_0)_{,\alpha_2} + Q_{13} \left(1 + \frac{2\vartheta_7}{\vartheta_3} \right) + \\ &+ \frac{M_{22}}{A_1 A_2} A_{2,\alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} (M_{11} A_2)_{,\alpha_1} - \frac{1}{A_1^2 A_2} (M_{12} A_1^2)_{,\alpha_2}, \end{aligned}$$

$$H_{ij} = Bh(a_i B_{12} + b_i B_{13} + B_{14} h c_i),$$

$$2H_{12} = Bh(1-\nu)(B_{12} d_1 + B_{13} e_1 + B_{14} h f_1),$$

$$M_{ij} = Bh^2 (B_{16} h c_i + B_{15} a_i + B_{14} b_i),$$

$$2M_{12} = Bh^2 (1-\nu)(B_{16} h f_1 + B_{15} d_1 + B_{14} e_1), \quad (i=j=1, 2),$$

gdzie a_i, b_i, \dots, k_i ($i=1, 2$) określone są przez wzory

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \varepsilon_{11}^0 + \nu \varepsilon_{22}^0, \\
 b_1 &= \frac{1}{A_1} \zeta_{1, \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \zeta_2 A_{1, \alpha_2} + \nu \left(\frac{1}{A_2} \zeta_{2, \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \zeta_1 A_{2, \alpha_1} \right), \\
 c_1 &= \frac{1}{A_1} \left(\frac{1}{A_1} W_{, \alpha_1} \right)_{, \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2^2} A_{1, \alpha_2} W_{, \alpha_2} + \nu \left[\frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} W_{, \alpha_2} \right)_{, \alpha_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{A_2 A_1^2} A_{2, \alpha_1} W_{, \alpha_1} \right], \\
 (3.7) \quad d_1 &= \varepsilon_{12}^0, \\
 e_1 &= \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{\zeta_1}{A_1} \right)_{, \alpha_2} + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{\zeta_2}{A_2} \right)_{, \alpha_1}, \\
 f_1 &= \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{A_1^2} W_{, \alpha_1} \right)_{, \alpha_2} + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{1}{A_2^2} W_{, \alpha_2} \right)_{, \alpha_1}, \quad g_1 = -\zeta_1, \\
 k_1 &= \frac{1}{A_1} W_{, \alpha_1}, \quad \left(\overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{2} \right).
 \end{aligned}$$

Szywności B, \dots, D, \dots określone są wzorami

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{k=1}^3 \frac{E_k \vartheta_k}{1 - \nu_k^2}, & B_k &= \frac{E_k \vartheta_k}{(1 - \nu_k^2) B}, \\
 D &= \sum_{k=1}^3 D_k, & D_1 &= \frac{E_1 \vartheta_1^3}{12(1 - \nu_1^2)}, \\
 D_2 &= \frac{E_2 \vartheta_2^3}{12(1 - \nu_2^2)}, & D_3 &= \frac{E_3 \vartheta_3}{12(1 - \nu_3^2)} [(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2 - \vartheta_1 \vartheta_2],
 \end{aligned}$$

a współczynniki B_{1r} ($r=2, \dots, 6$) wynoszą

$$\begin{aligned}
 B_{12} &= B_1 - B_2, & B_{13} &= B_1 + B_2 + \frac{1}{3} B_3, & B_{14} &= \frac{1}{3} B_3 \vartheta_7, \\
 B_{15} &= B_3 \vartheta_6, & B_{16} &= DB^{-1}
 \end{aligned}$$

oraz

$$\nu = \sum_{k=1}^3 B_k \nu_k$$

oznacza zastępcze przewężenie względne (założenie 3). Występujące we wzorach (3.7) wielkości ε_{ij}^0 ($i, j=1, 2$) określone są przez stan przemieszczenia powierzchni sprowadzonej w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad \varepsilon_{11}^0 &= \frac{1}{A_1} \zeta_{1, \alpha_1} + \frac{\zeta_2}{A_1 A_2} A_{1, \alpha_2} - k_{11} W + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1} W_{, \alpha_1} \right)^2 + \frac{1}{A_1^2} W_{, \alpha_1} W_{0, \alpha_1}, \\
 \varepsilon_{12}^0 &= \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{\zeta_1}{A_1} \right)_{, \alpha_2} + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{\zeta_2}{A_2} \right)_{, \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} (W_{, \alpha_1} W_{, \alpha_2} + W_{, \alpha_1} W_{0, \alpha_2} + \\
 &\quad + W_{, \alpha_2} W_{0, \alpha_1}), \quad \left(\overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{2} \right).
 \end{aligned}$$

Związki (3.2) – (3.4) stanowią pełny układ równań równowagi dynamicznej małowyniosłej powłoki trójwarstwowej o niesymetrycznej budowie warstw. Równania (3.2) i (3.3) opisują ruch elementu powłoki odpowiednio w kierunkach osi α_1^0 , α_2^0 i z , natomiast równania (3.4) dotyczą ruchu obrotowego elementu względem osi α_1^0 i α_2^0 .

W dalszych rozważaniach pominiemy wpływ pochodnych względem czasu przemieszczeń stycznych ζ_1 i ζ_2 na ruch poprzeczny powłoki.

4. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Otrzymane równania ruchu (3.2) – (3.4) odpowiednio przekształcimy do układu równań różniczkowych zwanych równaniami podstawowymi. Dwa pierwsze równania ruchu (3.2) można spełnić tożsamościowo, jeżeli wypadkowe siły N_{ij} ($i, j = 1, 2$) wyrazimy za pomocą funkcji naprężeń $F(\alpha_1, \alpha_2, t)$ i potencjałów $U_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$ ($i = 1, 2$)

$$(4.1) \quad \begin{aligned} N_{11} &= \frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} F_{, \alpha_2} \right)_{, \alpha_2} + \frac{1}{A_2 A_1^2} A_{2, \alpha_1} F_{, \alpha_1} + U_1, \\ N_{12} &= -\frac{1}{A_1 A_2} F_{, \alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2^2} A_{2, \alpha_1} F_{, \alpha_2} + \frac{1}{A_1^2 A_2} A_{1, \alpha_2} F_{, \alpha_1}, \end{aligned}$$

przy czym

$$U_1 = \int x_1(\alpha_1, \alpha_2, t) A_1 d\alpha_1, \quad \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \right) 2,$$

gdzie x_1, x_2 są prawymi stronami równań (3.2).

Z kolei wyrażamy przemieszczenia ξ_1, ξ_2 za pomocą funkcji $\psi(\alpha_1, \alpha_2, t)$ i $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, t)$:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{A_1} \psi_{, \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \phi_{, \alpha_2}, \\ \xi_2 &= \frac{1}{A_2} \psi_{, \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \phi_{, \alpha_1}, \end{aligned}$$

a występujące w (3.6) wielkości M_{ij} , H_{ij} , \tilde{Q}_{i3} ($i, j = 1, 2$) wyrazimy za pomocą (3.7).

Po odpowiednich przekształceniach i wykorzystaniu wzorów (4.1) i (4.2) otrzymamy z pozostałych równań ruchu (3.3) i (3.4) następujący układ równań różniczkowych:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} Bh^2 \nabla^2 \nabla^2 (WhB_{17} - \psi B_{18}) - G_W \vartheta_8 \nabla^2 (Wh\vartheta_0 - 2\psi) - \nabla_k^2 F - \\ - L(W + W_0, F) + m_a h \ddot{W} + m_1 h (L_k + B_{15} h \nabla^2 \ddot{W}) - p = 0, \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad Bh^2 \nabla^2 \nabla^2 (WhB_{18} - \psi B_{19}) - 2\vartheta_3^{-1} G_W \nabla^2 (Wh\vartheta_0 - 2\psi) + m_3 h^2 \nabla^2 \ddot{W} = 0,$$

$$(4.5) \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi - A_z \nabla^2 \varphi = 0,$$

w których wprowadzono następujące operatory różniczkowe:

$$\nabla^2 () = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{A_2 \partial ()}{A_1 \partial \alpha_1} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{A_1 \partial ()}{A_2 \partial \alpha_2} \right] \right\},$$

$$L_1 () = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\partial ()}{A_1 \partial \alpha_1} \right] + \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ()}{\partial \alpha_2},$$

$$L_{12} () = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\partial ()}{A_1^2 \partial \alpha_1} \right] + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\partial ()}{A_2^2 \partial \alpha_2} \right] \right\},$$

$$\nabla_k^2 () = L_1 () k_{22} + L_2 () k_{11}, \tag{1-2}$$

$$L(q_1, q_2) = L_1(q_1)L_2(q_2) + L_2(q_1)L_1(q_2) - 2L_{12}(q_1)L_{12}(q_2),$$

$$L_k = \frac{1}{A_1^2} (W + W_0)_{,\alpha_1} \ddot{W}_{,\alpha_1} + \frac{1}{A_2^2} (W + W_0)_{,\alpha_2} \ddot{W}_{,\alpha_2} + \ddot{W} [L_1(W + W_0) + L_2(W + W_0) + k_{11} + k_{22}]$$

oraz

$$B_{17} = B_{16} - B_{15}^2, \quad B_{18} = B_{14} - B_{12} B_{15},$$

$$B_{19} = B_{13} - B_{12}^2, \quad \vartheta_8 = \vartheta_0 \vartheta_3^{-1},$$

$$A_\alpha = \frac{8G_W}{(1-\nu)BB_{19}h\vartheta_3}, \quad \vartheta_0 = \vartheta_3 + \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

$$m_1 = m_e - m_c m_f m_d^{-1}, \quad m_2 = m_b m_f m_d^{-1} - m_d, \quad m_3 = m_1 B_{12} + m_2.$$

Równania (4.3) - (4.5) zawierają cztery poszukiwane funkcje W, F, ψ, φ . Czwartym równaniem różniczkowym, które muszą spełniać te funkcje, jest równanie ciągłości odkształceń powierzchni sprężonej. Równanie to uzyskamy ze wzorów (3.8) eliminując składowe styczne przemieszczeń; po wykorzystaniu wzorów (3.5) i (4.1) przyjmie ono ostateczną postać

$$(4.6) \quad \nabla^2 \nabla^2 F + Bh(1-\nu^2) \left[\frac{1}{2} L(W + 2W_0, W) + \nabla_k^2 W \right] - m_1 h(1-\nu) \nabla^2 \ddot{W} = 0.$$

W dalszych rozważaniach eliminuje się równanie (4.5) opisujące efekt brzegowy Reissnera analogicznie do pracy [15]. Równanie to nie ma istotnego wpływu na przebieg rozwiązania zagadnienia w przypadku swobodnego podparcia brzegów lub ich utwierdzenia. Tak więc otrzymamy ostatecznie układ trzech nieliniowych równań różniczkowych ruchu (4.3), (4.4) i (4.6) nazwanych równaniami podstawowymi, w których jako niewiadome występują ugięcie W , funkcja naprężeń F i funkcja odkształcenia postaciowego ψ .

Równania podstawowe dotyczą dynamiki sprężystej małowyniosłej powłoki trójwarstwowej i uwzględniają efekt inercji obrotu elementu powłoki (m_3), odkształcenia postaciowe warstwy wypełniającej oraz wstępne ugięcia W_0 .

Jeśli w równaniach podstawowych odrzucimy wyrazy inercyjne oraz W i ψ wyrazimy za pomocą funkcji przemieszczeń

$$W = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \nabla^2\right) \chi, \quad \psi = \left(\frac{h_0}{2} - \frac{h^3}{\beta_1} \nabla^2\right) \chi,$$

to otrzymamy układ dwóch równań równowagi statycznej względem funkcji naprężeń F i przemieszczeń χ :

$$(4.7) \quad B\gamma_0 h^3 \left(1 - \frac{h^2 \theta}{\beta} \nabla^2\right) \nabla^2 \nabla^2 \chi - \nabla_k^2 F - L(W + W_0, F) - p = 0,$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F + Bh(1 - \nu^2) \left[\frac{1}{2} L(W + 2W_0, W) + \nabla_k^2 W \right] = 0,$$

gdzie

$$\gamma_0 = B_{17} + \vartheta_0 \left(\frac{1}{4} \vartheta_0 B_{19} - B_{18} \right), \quad \theta = (B_{17} - B_{18}^2 B_{19}^{-1}) \gamma_0^{-1},$$

$$\beta = \frac{12G_w}{B\vartheta_3 \theta_1}, \quad \beta_1 = \frac{\theta_1 \beta}{3B_{18}}, \quad \theta_1 = 1 + 2(B_1 + B_2) - 3(B_1 - B_2)^2.$$

Równania te dla szczególnego przypadku ($A_1 = A_2 = 1$) w podobny sposób uzyskał E. I. GRIGOLUK i P. P. CZULKOW [15].

Jeśli rozpatrzmy powłokę o symetrycznej budowie warstw z tzw. lekkim wypełniaczem, to parametry równania (4.7)₁ γ_0 i θ przyjmują postać

$$\gamma_0 = \frac{1}{12} (1 + \vartheta_3 + \vartheta_3^2), \quad \theta = \left[1 + 3 \left(1 + \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} \right)^2 \right]^{-1}.$$

5. WARUNKI BRZEGOWE

Z równania wariacyjnego (3.1) otrzymamy również odpowiednie warunki brzegowe charakteryzujące sposób podparcia powłoki. Dla brzegów krzywoliniowych $\alpha_1 = \alpha'_1$ i $\alpha_1 = \alpha''_2$ przyjmują one postać:

$$(5.1) \quad \left(W; \tilde{Q}_{13} + \frac{1}{A_2} M_{12, \alpha_2} \right), (W, \alpha_1; M_{11}) = 0,$$

$$(\zeta_1; N_{11}), (\zeta_2; N_{12}) = 0, \quad (\xi_1; H_{11}), (\xi_2; H_{12}) = 0.$$

Pierwsza grupa warunków (5.1) związana jest z ugięciem powłoki i obrotem normalnej do warstw nośnych lub z siłą poprzeczną $\tilde{Q}_{13} + \frac{1}{A_2} M_{12, \alpha_2}$ i momentem M_{11} . Pozostałe dwie grupy określają charakter podparcia warstw nośnych stosownie do przemieszczeń w kierunkach stycznych do powierzchni sprowadzonej (ζ_1, ζ_2) oraz obrotów w płaszczyznach prostopadłych do tej powierzchni (ξ_1), a stycznych do jej brzegów (ξ_2).

Do równań podstawowych (4.3), (4.4) i (4.6) dołączyć należy jeszcze warunki początkowe. Określają one położenie i prędkość przemieszczenia W powierzchni sprowadzonej powłoki w chwili początkowej $t=0$:

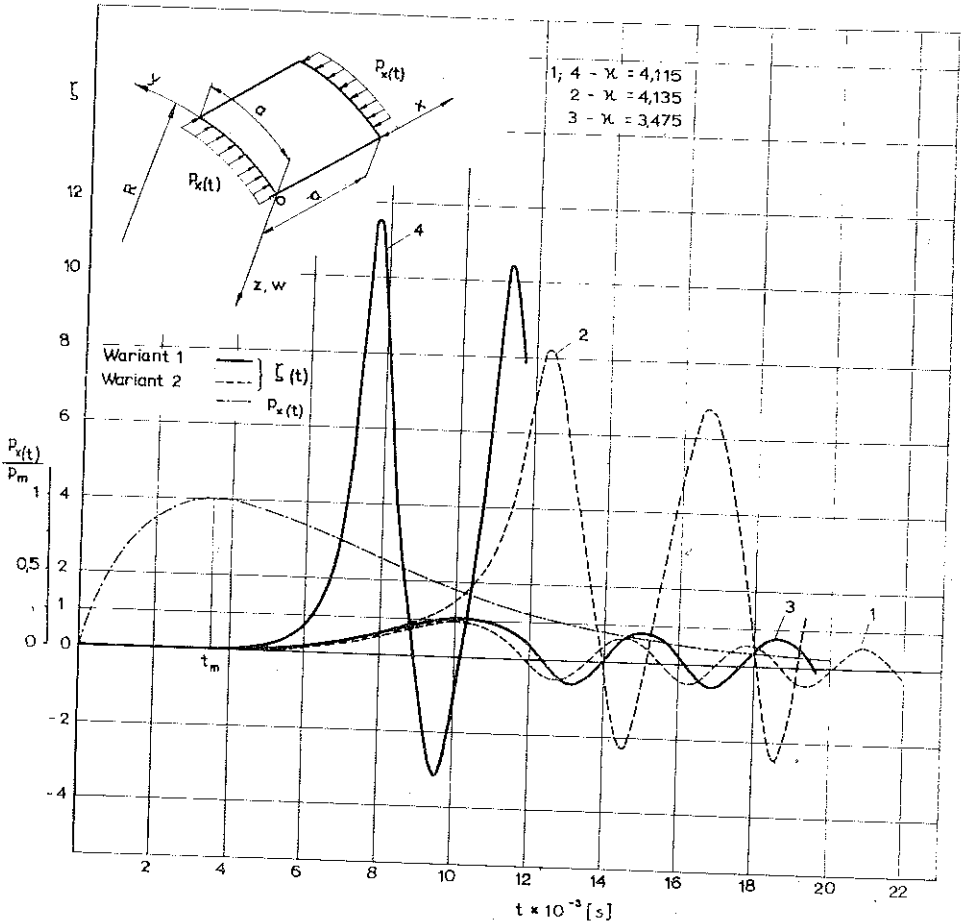
$$W(\alpha_1, \alpha_2, t) = W_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad \dot{W}(\alpha_1, \alpha_2, t) = V(\alpha_1, \alpha_2),$$

gdzie $W_0(\alpha_1, \alpha_2)$, $V(\alpha_1, \alpha_2)$ są funkcjami znanymi wypływającymi z danych warunków zagadnienia.

6. PRZYKŁAD LICZBOWY

Weźmy pod uwagę otwartą trójwarstwową powłokę walcową o symetrycznej budowie warstw, swobodnie podpartą na brzegach. Rozpatrzmy przebieg dynamicznego wybočenja pod wpływem działania podłużnych równomiernie rozłożonych sił ściskających $p_x(t)$, zmiennych w czasie według określonego prawa.

Jeśli przyjąć dla powłoki walcowej układ współrzędnych (rys. 3) $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, to $A_1 = A_2 = 1$, $k_{11} = 0$, $k_{22} = 1/R$,



Rys. 3

a równania podstawowe przyjmą postać

$$(6.1) \quad Bh^2 \nabla^2 \nabla^2 (WhB_{17} - \psi B_{18}) - G_W \vartheta_3 \nabla^2 (Wh \vartheta_0 - 2\psi) - L(W + W_0, F) - \frac{1}{R} F,_{xx} + m_a h \ddot{W} = 0,$$

$$(6.2) \quad Bh^2 \nabla^2 \nabla^2 (WhB_{18} - \psi B_{19}) - 2\vartheta_3^{-1} G_W \nabla^2 (Wh \vartheta_0 - 2\psi) + m_3 h^2 \nabla^2 \ddot{W} = 0,$$

$$(6.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 F + Bh(1 - \nu^2) \left[\frac{1}{2} L(W + 2W_0, W) - \frac{1}{R} W,_{xx} \right] = 0,$$

$$\nabla^2 () = ()_{,xx} + ()_{,yy},$$

$$L(S_1, S_2) = S_{1,xx} S_{2,yy} + S_{1,yy} S_{2,xx} - 2S_{1,xy} S_{2,xy}.$$

Równaniom powyższym na podstawie wzorów (5.1), (4.1) i (4.2) podporządkowane są następujące warunki brzegowe swobodnego podparcia:

dla brzegów krzywoliniowych $x=0$, $x=a$

$$(6.4) \quad W = H_{11} = \psi,_{y} = M_{11} = F,_{xy} = 0, \quad F,_{yy} = -P_x;$$

dla brzegów prostoliniowych $y=0$, $y=b$

$$(6.4)_2 \quad W = H_{22} = \psi,_{x} = M_{22} = F,_{xy} = F,_{xx} = 0.$$

Aby otrzymać przybliżone rozwiązanie równań (6.1)–(6.3), odpowiadające rozpatrywanemu zagadnieniu, założono następujące postacie rozwiązań:

dla funkcji ugięcia

$$(6.5)_1 \quad W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y;$$

dla funkcji odkształcenia postaciowego

$$(6.5)_2 \quad \psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

w którym W_{mn} i ψ_{mn} są nieznanymi funkcjami czasu, stałe zaś a i b są wymiarami wycinka powłoki w kierunkach osi x i y . W pierwszym przybliżeniu weźmiemy po jednym wyrazie funkcji (6.5):

$$(6.6) \quad W(x, y, t) = W_{(t)} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\psi(x, y, t) = \psi_{(t)} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Dla ugięcia wstępnego przyjmiemy analogicznie:

$$(6.7) \quad W_0(x, y) = W_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

przy czym W_0 uważa się za wielkość znaną. Przyjęte w powyższy sposób funkcje $W(x, y, t)$ i $\psi(x, y, t)$ spełniają założone warunki brzegowe (6.4).

Wprowadzenie wyrażeń (6.6) i (6.7) do równania (6.3) pozwala określić funkcję naprężeń:

$$(6.8) \quad F = \frac{Bh(1-\nu^2)}{32} W(W+2W_0) \left[\left(\frac{na}{mb} \right)^2 \cos \frac{2m\pi}{a} x + \left(\frac{mb}{na} \right)^2 \cos \frac{2n\pi}{b} y \right] + \\ + \frac{B(1-\nu^2)}{R\pi^2} \left(\frac{m}{a} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} W \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y - \frac{p_x y^2}{2},$$

gdzie p_x oznacza podłużne siły ściskające edniesione do jednostki długości powierzchni podstawowej.

Dla znalezienia zależności pomiędzy ugięciem W i obciążeniem p_x jako funkcji czasu rozwiążemy pozostałe równania (6.1) i (6.2) stosując metodę Bubnowa-Galerkina.

Oznaczając lewe strony równań (6.1) i (6.2) przez F_1 i F_2 żądamy, aby spełnione były następujące warunki:

$$(6.9) \quad \int_0^a \int_0^b F_1 W(x, y, t) dx dy = 0, \quad \int_0^a \int_0^b F_2 W(x, y, t) dx dy = 0.$$

Wstawiając do równań (6.9) wyrażenia (6.6), (6.7), (6.1) i (6.2) oraz określoną już poprzednio funkcję naprężeń (6.8), otrzymamy po wykonaniu całkowań, wyeliminowaniu funkcji $\psi(t)$ i wprowadzeniu bezwymiarowych parametrów nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne

$$(6.10) \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} C_0 + \zeta^3 C_1 + \zeta^2 C_2 + \zeta C_3 - \hat{p}_x (\zeta + \zeta_0) = 0.$$

Wprowadzono tutaj następujące oznaczenia:

$$C_0 = \frac{(b\lambda)^2}{B(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{b}{\pi h m} \right)^2 m_a + \frac{\left(n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right) \left[\left(\frac{\pi h}{b} \right)^2 \left(n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right) BB_{18} + 2G_W \vartheta_8 \right] m_3}{\left[\left(\frac{\pi h}{b} \right)^2 \left(n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right) BB_{19} + 4G_W \vartheta_3^{-1} \right] h m^2} \right\},$$

$$C_1 = \frac{\pi^2}{16} \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{n^2 \lambda}{m} \right)^2 \right],$$

$$C_2 = \frac{3\pi^2}{16} \zeta_0 \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{n^2 \lambda}{m} \right)^2 \right] - \frac{2\lambda^2 k n}{3m^3 \pi^2 \eta} - \frac{32k m n}{3\pi^2} \left(\frac{\lambda}{m^2 + n^2 \lambda^2} \right)^2 \eta,$$

$$C_3 = \frac{k^2}{\pi^2 \left(\frac{m}{\lambda} + \frac{n^2 \lambda}{m} \right)^2} + \frac{\pi^2 \gamma_0 \left(\frac{m}{\lambda} + \frac{n^2 \lambda}{m} \right)^2 \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] \theta_0 \theta + 1}{\left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] \theta_0 + 1} + \\ + \frac{\pi^2}{8} \zeta_0 \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{n^2 \lambda}{m} \right)^2 \right] - \zeta_0 \frac{4k n}{3\pi^2} \left[8m \left(\frac{\lambda}{m^2 + n^2 \lambda^2} \right)^2 \eta + \frac{\lambda^2}{m^2} \right],$$

gdzie $\hat{p}_x = p_x b^2 / B (1 - \nu^2) h^3$ oznacza parametr obciążenia, $\zeta = W/h$, $\zeta_0 = W_0/h$ parametry ugięcia, $\lambda = a/b$ parametr kształtu powłoki, $k = b^2/Rh$ parametr krzywizny powłoki, $\theta_0 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\pi h}{b} \right)^2$ parametr sztywności wypełniacza oraz gdzie

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \text{ lub } n \text{ parzystego,} \\ 1 & \text{dla } m \text{ i } n \text{ nieparzystego.} \end{cases}$$

Jeśli w równaniu (6.10) założymy $\zeta_0 = 0$ i odrzucimy wyrazy nieliniowe względem ζ oraz wyraz inercyjny, to znajdziemy krytyczną wartość parametru obciążenia statycznego (\hat{p}_{kr}) powłoki geometrycznie idealnej:

$$(6.11) \quad \hat{p}_{kr} = (\hat{p}_x)_{\min} = \frac{k^2}{\pi^2 \left(\frac{m}{\lambda} + \frac{n^2 \lambda}{m} \right)^2} + \frac{\pi^2 \gamma_0 \left(\frac{m}{\lambda} + \frac{n^2 \lambda}{m} \right)^2 \left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] \theta_0 \theta + 1}{\left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right] \theta_0 + 1},$$

gdzie \hat{p}_{kr} jest tu najmniejszą wartością obciążenia dla możliwych wartości ilości pól fal m i n , tzn. dla $m, n = 1, 2, 3$. Wzór (6.11) pokrywa się ze wzorem dla obciążeń ściskających podanym przez GRIGOLUKA i CZULKOWA [15], a po przejściu do powłoki jednowarstwowej ze wzorem podanym przez WOLMIRA [17].

W celu uzyskania ostatecznego równania, którego rozwiązanie pozwoli na prześledzenie procesu deformacji powłoki, zakładamy, że obciążenie zmienia się w czasie według funkcji wykładniczej (rys. 3):

$$\hat{p}_x(t) = \hat{p}_m \frac{t}{t_m} e^{1 - \frac{t}{t_m}},$$

gdzie t_m oznacza czas odpowiadający osiągnięciu maksymalnego obciążenia \hat{p}_m (przy czym $\hat{p}_m = \kappa \hat{p}_{kr}$), \hat{p}_{kr} krytyczną wartość obciążenia statycznego wyznaczoną ze wzoru (6.11) oraz κ współczynnik obciążenia dynamicznego.

Wprowadzając powyższe wyrażenia do równania (6.10) otrzymamy nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu w postaci

$$(6.12) \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{1}{C_0} \left[\hat{C}_x (\zeta + \zeta_0) t e^{-\frac{t}{t_m}} - \zeta^3 C_1 - \zeta^2 C_2 - \zeta C_3 \right],$$

gdzie $\hat{C}_x = e \hat{p}_m t_m^{-1}$ oznacza prędkość początkową wzrostu parametru obciążenia w chwili $t = 0$.

W wyniku rozwiązywania równania metodą Rungego-Kutty przy warunkach początkowych

$$[\zeta]_{t=0} = \zeta_0, \quad \left[\frac{d\zeta}{dt} \right]_{t=0} = 0$$

uzyskuje się funkcje $\zeta = \zeta(t)$ określającą zmianę parametru ugięcia podczas procesu deformacji powłoki pod wpływem obciążenia dynamicznego.

Poza uzyskaniem rozwiązania głównym celem niniejszego przykładu jest próba uchwycenia efektu inercji obrotu elementu powłoki na wartość krytycznego obciążenia

dynamicznego (p_{kr}^d) i czasu krytycznego (t_{kr}). Za obciążenie krytyczne wg KLOSNERA i ROTH A [18] uważa się taką najmniejszą wartość obciążenia \hat{p}_m (przy założeniu $\hat{C}_x = \text{const}$), której nieznaczny przyrost ($\Delta \hat{p}_m$) wywołuje gwałtowny wzrost maksymalnego ugięcia — dla możliwych kombinacji ilości pól fal m i n . Czas t_m , odpowiadający obciążeniu krytycznemu p_{kr}^d , będziemy nazywali czasem krytycznym t_{kr} .

Do obliczeń przyjęto powłokę o następujących parametrach:

$$\lambda = 1, a = 60 \text{ cm}, \quad \zeta_0 = 10^{-3}, \quad h_1 = h_2 = 0,1 \text{ cm}, \quad h_3 = 1 \text{ cm},$$

$$R = 100 \text{ cm}, \quad E_1 = E_2 = 7,012 \cdot 10^5 \text{ MN m}^{-2}, \quad E_3 = 53 \text{ MN m}^{-2},$$

$$G_W = 26 \text{ MN m}^{-2}, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,31, \quad \nu_3 = 0,5, \quad \rho_1 = \rho_2 = 2,795 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

$$\rho_3 = 0,23 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \quad \hat{C}_x = 0,21912 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1} \quad (C_x = 1,08 \cdot 10^3 \text{ MN m}^{-1} \text{ s}^{-1}).$$

Parametry te przyjęto jako stałe, a obliczenia wykonano dla dwóch wariantów:

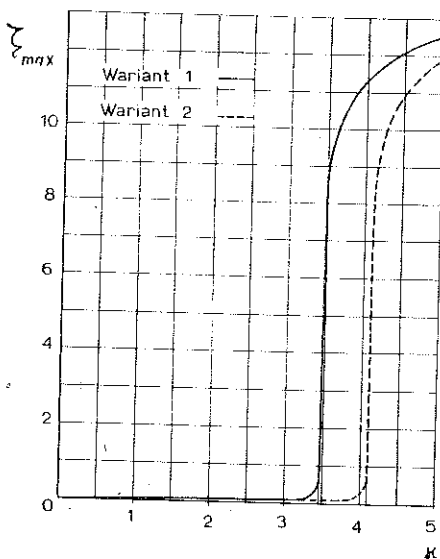
1) wariant 1 uwzględnia efekt inercji obrotu elementu powłoki, tj. dla którego $m_3 \neq 0$,

2) wariant 2 nie uwzględnia efektu inercji obrotu i $m_3 = 0$.

W pierwszym przybliżeniu założono, że przy deformacji powłoki zachodzi zjawisko tworzenia się jednej półfali ugięcia w kierunku podłużnym i obwodowym. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie krzywych $\zeta = \zeta(t)$ na wykresie (rys. 3) będących rozwiązaniem numerycznym równania (6.12).

Każda z tych krzywych na odcinku początkowym odznacza się bardzo małym wzrostem ugięcia w czasie, a na rysunku pokrywa się z osią odciętych. W dalszej części krzywej po osiągnięciu maksimum ugięcia powłoka wchodzi w stan nieliniowych drgań. Krzywa 1 (wariant 2) osiąga maksimum przy obciążeniu $\hat{p}_{m1} = \hat{p}_{kr1}^d = 4,115 \hat{p}_{kr}$ ($\hat{p}_{kr} = 8,061$), dla którego czas krytyczny $t_{kr1} = 4,115 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Dalszy nieznaczny przyrost obciążenia ($\Delta \hat{p}_m = \hat{p}_{m2} - \hat{p}_{m1} = 0,02 \hat{p}_{kr}$) wywołuje gwałtowny wzrost ugięcia (krzywa 2), co uznać można za dynamiczną utratę stateczności.

Następuje przeskok powłoki do nowego położenia równowagi i równocześnie zostaje osiągnięte maksimum ugięcia (wierzchołek krzywej). Dla wariantu 1 wartości krytyczne obciążenia i czasu są nieco mniejsze w porównaniu z wariantem 2 i wynoszą: $\hat{p}_{kr2}^d = 3,475 \hat{p}_{kr}$, $t_{kr2} = 3,475 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Wartości maksymalnych ugięć przed i po przeskoku powłoki przedstawiono na rys. 4, będącym ilustracją zależności maksymalnego ugięcia od współczynnika dynamicznego. Z porównania wariantów 2 i 1 wynika, że współczynnik obciążenia dynamicznego oraz czas krytyczny uległ obniżeniu około 16%. Ponadto możemy



Rys. 4

stwierdzić, że uwzględnienie inercji obrotu elementu powłoki wywołuje utratę stateczności wcześniej niż w przypadku nieuwzględnienia inercji obrotu. Tak więc przy dynamicznym wyboczeniu trójwarstwowej powłoki siłami ściskającymi z prędkością początkową wzrostu rzędu 10^3 [$\text{NM m}^{-1} \text{s}^{-1}$] efekt inercji obrotu jest nie do pominięcia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. Н. Москаленко, *О собственных колебаниях трехслойных плит*, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 4, 1962.
2. В. Н. Москаленко, *Собственные колебания трехслойных пластин прямоугольных в плане*, Труды 4-ой Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин, Эревань 1964.
3. Л. И. Гармаш, *К вопросу о собственных колебаниях слоистых пластин*, Сб. Динамика и прочность машин, вып. 18, Изд-во Харьковск. ун-та, 1973.
4. А. П. Филиппов, В. П. Ольшанский, *Деформации несимметричной трехслойной пластины с заполнителем при ударе*, Прикладная механика, 7, 3, 1971.
5. Y. V. K. S. RAO and B. C. NAKRA, *Theory of vibratory bending of unsymmetrical sandwich plates*, Archives of Mechanics, 25, 2, 1973.
6. P. M. CULKOWSKI and H. REISMANN, *The spherical sandwich shell under axisymmetric static and dynamic loading*, Journal of Sound and Vibration, 14, 2, 1971.
7. K. M. AHMED, *Static and dynamic analysis of sandwich structures by the method of finite elements*, Journal of Sound and Vibration, 18, 1, 1971.
8. B. K. RATH and Y. C. DAS, *Axisymmetric vibration of closed layered spherical shells*, Journal of Sound and Vibration, 37, 1, 1974.
9. N. ARKAS, *Static and dynamic buckling analyses of spherical sandwich caps*, Int. J. Mech. Sci., 16, 1974.
10. W. SZYC, *Stateczność otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej dynamicznie ściskanej*, Rozpr. Inżyn., 19, 4, 1971.
11. Е. Г. Голоскоков, В. В. Дмитренко, *Нестационарный флаттер трехслойных пологих оболочек с жестким заполнителем*, Сб. Динамика и прочность машин, вып. 18, Изд-во Харьковск. ун-та, 1973.
12. I. K. EVCIOGLU, *Nonlinear theory of sandwich panels*, Developments in theoretical and applied mechanics, 4, Pergamon Press, New York 1970.
13. М. С. Герштейн, *Геометрически нелинейные уравнения движения упругой многослойной оболочки*, Механика Полимеров, 5, 1973.
14. Л. Э. Брюккер, *О пределах применимости приближенной теории трехслойных пластин несимметричного строения*, Труды 7-ой Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин, Наука, Москва 1970.
15. Э. И. Григолюк, П. П. Чулков, *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*, Машиностроение, Москва 1973.
16. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва-Ленинград 1949.
17. А. С. Вольмир, *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*, Наука, Москва 1973.
18. R. S. ROTH and J. M. KLOSNER, *Nonlinear response of cylindrical shells subjected to dynamic axial loads*, AIAA Journal, 2, 10, 1964.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛОГОЙ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ
ОБОЛОЧКИ

Настоящая работа содержит вывод общих уравнений рассматриваемой задачи и сведение их к трем основным дифференциальным уравнениям в частных производных для неизвестных функций: напряжений, поперечного перемещения (прогиба) и деформации сдвига заполнителя. Основные уравнения касаются динамики трехслойной оболочки несимметричной структуры и учитывают эффект инерции вращения элемента оболочки, а также начальное отклонение от идеальной геометрической формы. В частном случае обсуждается нелинейная задача динамической устойчивости открытой трехслойной цилиндрической оболочки сжимаемой силами меняющимися во времени по экспоненциальной функции. Представлены результаты численного примера касающиеся этого последнего случая.

SUMMARY

NONLINEAR EQUATION OF MOTION OF AN ELASTIC SANDWICH SHALLOW
SHELL

The paper contains derivation of the general equations of the problem considered and reducing of these equations to the three basic partial differential equations for the unknown functions of stress, transverse displacement (deflection) and shear strain of the core. The basic equations are concerned with a dynamics of a sandwich shell with isotropic nonsymmetric structure of layers and the effect of the rotary inertia of the shell element and initial deviation from the ideal geometrical form are taking into account. As a particular case the nonlinear problem of the dynamic instability of the open cylindrical shell compressed by the forces changing in time according to the exponential function is considered. For this case the numerical results are presented.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 stycznia 1975 r.