

## STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA DŹWIGARÓW RAMOWYCH DWUPASOWYCH PODDANYCH DZIAŁANIU OBCIĄŻEŃ KONSERWATYWNYCH (\*)

JÓZEF DREWNIAK (BIELSKO-BIAŁA) i JAN MISIAK (WARSZAWA)

Przedmiotem pracy jest zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania prostokątnych dźwigarów ramowych obciążonych układem konserwatywnych sił i momentów. Uzyskano układ jednorodny sześciu równań różnicowych liniowych umożliwiających obliczenie sił i momentów krytycznych dla szeregu dźwigarów o dowolnych parametrach konstrukcyjnych. Praca zilustrowana jest przykładami liczbowymi uzyskanymi na drodze numerycznej.

### WSTĘP

Płaskie dźwigary ramowe mają szerokie zastosowanie w wielu konstrukcjach inżynierskich. Przy prawidłowym projektowaniu tych dźwigarów, oprócz wyznaczenia sił i momentów wewnętrznych w poszczególnych odcinkach dźwigara (w prętach) niezbędne jest określenie ich stateczności. Szereg pojedynczych zadań dotyczących stateczności różnych przypadków ramowych konstrukcji płaskich zebrano w monografiach [2, 3, 13, 14, 15, 16, 17 i 18]. Metody stosowane w wymienionych pracach polegały na traktowaniu tych konstrukcji jako ram wieloobwodowych. Stopień trudności obliczeń wzrastał jednak bardzo gwałtownie wraz ze wzrostem liczby prętów. Ogólne rozwiązanie stateczności dowolnego układu prętowego przedstawił W. GUTKOWSKI [7] oraz J. BAUER i W. GUTKOWSKI [1]. Metoda zaproponowana przez tych autorów również nie jest łatwa do obliczeń numerycznych, ponieważ prowadzi do rozwiązania złożonych układów równań przestępnych.

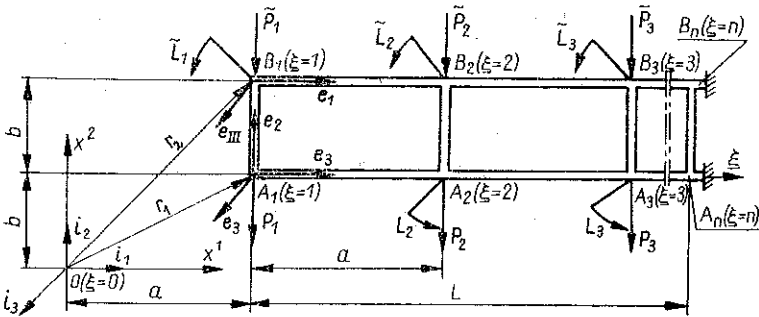
Przybliżone metody rozwiązywania zagadnień stateczności opracowali H. FRĄCKIEWICZ [4] i Cz. WOŹNIAK [17]. Metodę H. Frąckiewicza zastosowano z powodzeniem do rozwiązania stateczności rusztów siatkowych [8] i dźwigarów kratowych [5, 6, 9, 10, 11 i 12].

Biorąc powyższe pod uwagę autorzy w niniejszej pracy postawili sobie za cel opracowanie zagadnienia stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów ramowych dwupasowych prostokątnych poddanych działaniu sił konserwatywnych (rys. 1).

Do opisanego powyższego zagadnienia zastosowano metodę obliczania wybożenia płytowego siatek płaskich, zaproponowaną przez H. FRĄCKIEWICZA w pracy [4].

(\*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 — tematu 08.7 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Metoda ta polega na superpozycji dwóch rozwiązań tarczowego i płytowego. Równania równowagi dla każdego z tych zagadnień piszemy dla konfiguracji nieodkształconej. Równania równowagi opisujące statyczne zginanie płyty przechodzą w równania stateczności dźwigara, jeżeli zamiast dowolnego obciążenia płytowego podstawimy obciążenie szczególne będące liniową funkcją tarczowego stanu napięć i założonego wychylenia płytowego. Stosując tę metodę otrzymano przemieszczeniowe równania równowagi wyboczonego dźwigara, stanowiące jednorodny układ równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Sprowadzono problem do zagadnienia jednowymiarowego, co pozwoliło na znaczne uproszczenie warunków brzegowych.



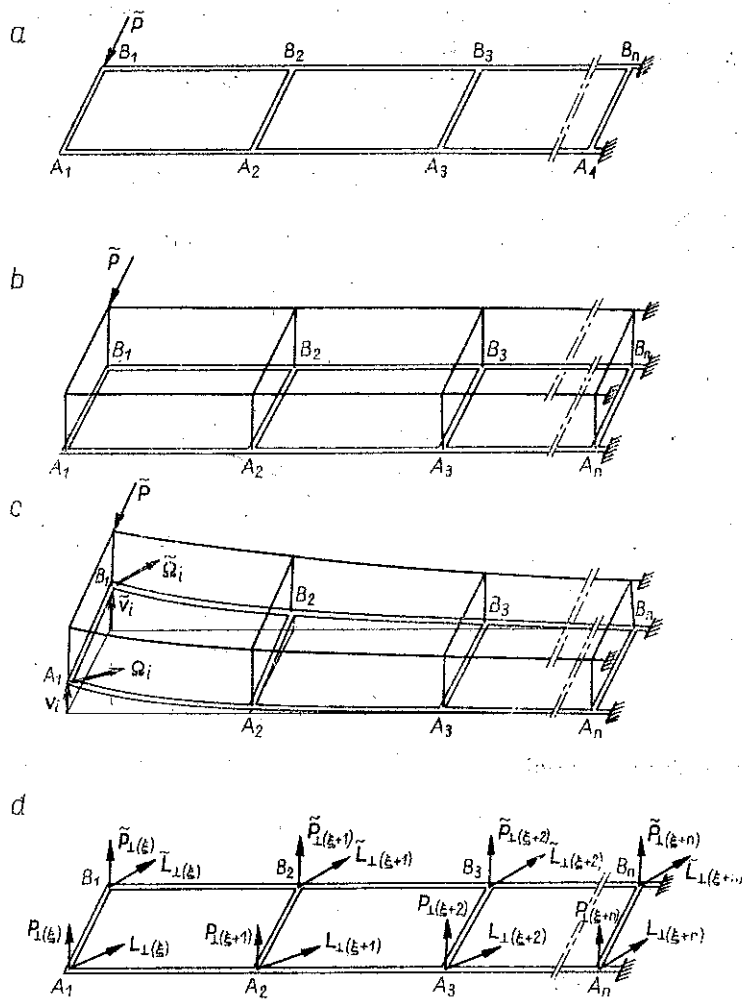
Rys. 1

Model zjawiska wyboczenia przedstawiony jest na rys. 2. Nad dźwigarem (rys. 2a) rozpina się tarczę zbudowaną z prętów sztywno-sprężystych ( $EJ = \infty$ ) o sztywnych węzłach, połączoną przegubowo z dźwigarem przez sztywne łączniki (rys. 2b) powstaje w ten sposób układ składający się ze sztywnej tarczy i połączonej z nią sprężystej płyty ramowej. Sposób połączenia węzłów sztywnej tarczy i sprężystej płyty jest taki, że umożliwi przeniesienie nierównoważonych obciążeń w obrębie tarczowego stanu napięć z tarczy na płytę.

Nadając węzłom tarczy przesunięcia  $V_i$ ,  $\tilde{V}_i$  oraz obroty  $\Omega_i$ ,  $\tilde{\Omega}_i$ , powoduje się przejście tego układu od płaskiej postaci do konfiguracji wygiętej.

Obciążeniem krytycznym będzie takie obciążenie tarczowe  $P$ , przy którym jest możliwa równowaga układu sztywnej tarczy i sprężystej płyty, w płytowej konfiguracji wygiętej. Jak widać na rys. 2c pręty tarczy po nadaniu tych odkształceń pozostają proste, a płyta wygina się sprężysto. W efekcie siły istniejące w prętach tarczy dają rzut na kierunek prostopadły do jej płaszczyzny, momenty zaś na kierunku równoległe do tarczy. Powstałe w ten sposób rzuty sił i momentów nie mogą być zrównoważone w obrębie tarczowego stanu napięć i obciążają sprężoną z tarczą płytę. Siły te i momenty są liniową funkcją sił i momentów tarczowych oraz założonego wychylenia płytowego. Zagadnienie w efekcie sprowadza się do rozwiązania płyty obciążonej w węzłach siłami i momentami liniowo zależnymi od ugięcia i obrotu tych węzłów (rys. 2d).

Zgodnie z przedstawionym powyżej modelem, umożliwiającym obliczenie obciążenia płytowego pochodzącego od napięć wewnętrznych w tarczy, zakładamy,



Rys. 2

że pręty połączone są w węzłach w taki sposób, że istnieje w tarczy stan napięć  $T_i, \tilde{T}_i, N_i, \tilde{N}_i, M_i, \tilde{M}_i$ ; nie występuje zginanie prętów tarczy przy jej przejściu w konfigurację wyboeczeniową typu płytowego; pręty tarczy nie posiadają żadnej sztywności skrętnej.

## 1. TARCZOWY STAN NAPIĘĆ

### 1.1. Model geometryczny dźwigara

Rozpatruje się dźwigar ramowy prostokątny przedstawiony na rys. 1, poddany działaniu zewnętrznego tarczowego obciążenia konserwatywnego w postaci siły  $P_i$  i momentu  $L_i$ . Konfiguracja początkowa tarczy określona jest promieniami,

wektorami  $r_1$  i  $r_2$ . Węzły tarczy pokrywają się z punktami dyskretnego zbioru sparymetryzowanego współrzędną Lagrange'a  $\xi$ .

Promienie, wektory przedstawiające się następująco:

$$(1.1) \quad r_1 = i_1 a \xi + i_2 b, \quad r_2 = i_1 a \xi + i_2 2b,$$

pozwalają określić w dźwigarze lokalne bazy wektorowe oraz składowe obiektów podstawowych i wzajemnych.

Wektorowe bazy podstawowe przedstawia się następująco:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} e_1 &= a i_1, & e_2 &= b i_2, & e_3 &= i_3, \\ e_I &= a i_1, & e_{III} &= i_3. \end{aligned}$$

Składowe obiektów podstawowych są równe

$$(1.3) \quad \begin{aligned} g_{11} &= a^2, & g_{22} &= b^2, & g_{12} &= 0, \\ g_{II} &= a^2, & g_{I2} &= 0. \end{aligned}$$

Powyższe składowe tworzą macierz kwadratową o wyznaczniku  $g = a^2 b^2$ .

Za pomocą wektorów baz podstawowych wyrazić można wektory baz wzajemnych:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} e^1 &= \frac{1}{a} i_1, & e^2 &= \frac{1}{b} i_2, & e^3 &= i_3, \\ e^I &= \frac{1}{a} i_1, & e^{III} &= i_3. \end{aligned}$$

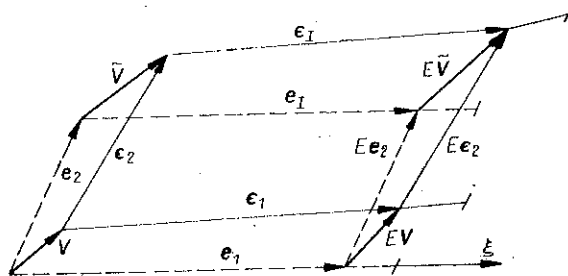
Składowe obiektów wzajemnych wyrażają się następującymi wzorami:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{a^2}, & g^{12} &= 0, & g^{22} &= \frac{1}{b^2}, \\ g^{II} &= \frac{1}{a^2}, & g^{I2} &= 0. \end{aligned}$$

### 1.2. Stan odkształcenia

Odształcenie tarczy spowodowane jest przemieszczeniami przesunięciowymi i obrotowymi jej węzłów. Przemieszczenia przesunięciowe tarczy (rys. 3) przedstawiają się następująco:

$$(1.6) \quad v = v^\alpha e_\alpha = v_\alpha e^\alpha, \quad \tilde{v} = \tilde{v}^\alpha e_\alpha = \tilde{v}_\alpha e^\alpha,$$



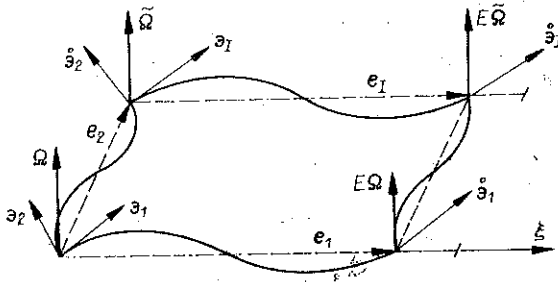
Rys. 3

gdzie  $\alpha=1, 2$ . Wektory tych przesunięć  $v_{(\xi)}$  i  $\tilde{v}_{(\xi)}$  przekształcają wektorowe bazy konfiguracji początkowej  $e_k$  na następujące wektorowe bazy konfiguracji chwilowej  $\epsilon_k$ :

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= e_1 + \delta v, & \epsilon_2 &= e_2 - v + \tilde{v}, \\ \epsilon_1 &= e_1 + \delta \tilde{v} = e_1 + \delta \tilde{v}. \end{aligned}$$

Przemieszczenie obrotowe węzłów tarczy wyraża się przez składowe w bazie podstawowej i wzajemnej konfiguracji początkowej:

$$(1.8) \quad \Omega = \omega e_3 = \omega e^3, \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\omega} e_{III} = \tilde{\omega} e^{III}.$$



Rys. 4

Wektory baz konfiguracji chwilowej po obrocie węzłów (rys. 4) przedstawiają się następująco:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \vartheta_1 &= e_1 + \omega(e_3 \times e_1), & \vartheta_2 &= e_2 + \omega(e_3 \times e_2), \\ \vartheta_I &= e_1 + \tilde{\omega}(e_{III} \times e_1) = e_1 + \tilde{\omega}(e_3 \times e_1), \\ \dot{\vartheta}_1 &= e_1 + E\omega(e_3 \times e_1), & \dot{\vartheta}_2 &= e_2 + \tilde{\omega}(e_3 \times e_2), \\ \dot{\vartheta}_I &= e_1 + E\tilde{\omega}(e_{III} \times e_1) = e_1 + E\tilde{\omega}(e_3 \times e_1), \end{aligned}$$

gdzie operator  $E=(1+\delta)$ .

### 1.3. Związki geometryczne

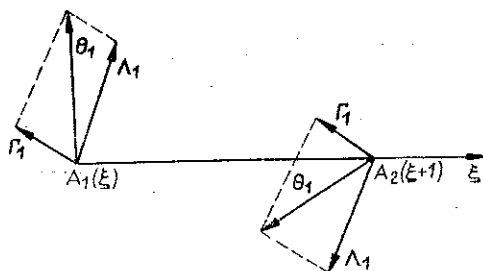
Odształcenie całkowite rozpatrywanego dźwigara określają jednoznacznie obiekty opisujące wygięcie i wydłużenie łączników, spowodowane polem przesunięć węzłów  $v_{(\xi)}$  i  $\tilde{v}_{(\xi)}$  oraz polem ich obrotu  $\Omega_{(\xi)}$  i  $\tilde{\Omega}_{(\xi)}$ . Miarą ugięcia prętów są wektory  $\theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha, \theta_I, \dot{\theta}_I$ , które dla małych odkształceń są wektorowymi miarami kątów pomiędzy wektorami  $(\epsilon_\alpha, \vartheta_\alpha)$ ,  $(\epsilon_\alpha, \dot{\vartheta}_\alpha)$ , oraz  $(\epsilon_I, \dot{\vartheta}_I)$ . Wektory  $\theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha, \theta_I, \dot{\theta}_I$ , wyrazić więc można wzorami:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \theta_\alpha &= \frac{\epsilon_\alpha \times \vartheta_\alpha}{|\epsilon_\alpha| |\vartheta_\alpha|}, & \dot{\theta}_\alpha &= \frac{\epsilon_\alpha \times \dot{\vartheta}_\alpha}{|\epsilon_\alpha| |\dot{\vartheta}_\alpha|}, \\ \theta_I &= \frac{\epsilon_I \times \vartheta_I}{|\epsilon_I| |\vartheta_I|}, & \dot{\theta}_I &= \frac{\epsilon_I \times \dot{\vartheta}_I}{|\epsilon_I| |\dot{\vartheta}_I|}, \end{aligned}$$

oraz przedstawić jako liniową kombinację wektorów  $\Gamma_\alpha$ ,  $\Lambda_\alpha$ ,  $\Gamma_I$ ,  $\Lambda_I$ :

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \theta_\alpha &= \Gamma_\alpha + \Lambda_\alpha, & \dot{\theta}_\alpha &= \Gamma_\alpha - \Lambda_\alpha, \\ \theta_I &= \Gamma_I + \Lambda_I, & \dot{\theta}_I &= \Gamma_I - \Lambda_I. \end{aligned}$$

Na rys. 5 przedstawiono dla pręta  $A_1 A_2$  wektory  $\theta_I$  i  $\dot{\theta}_I$  jako liniową kombinację wektorów  $\Gamma_I$ ,  $\Lambda_I$ . Wektory  $\Gamma_\alpha$  oraz  $\Gamma_I$  opisują antysymetryczną część wygięcia łącznika, natomiast wektory  $\Lambda_\alpha$  oraz  $\Lambda_I$  opisują symetryczną część wygięcia łącznika.



Rys. 5

Wektory  $\Gamma_\alpha$ ,  $\Gamma_I$ ,  $\Lambda_\alpha$ ,  $\Lambda_I$  po uwzględnieniu wzorów (1.10) przedstawiają się następująco:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \Gamma_\alpha &= \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \epsilon_\alpha \times (\vartheta_\alpha + \dot{\vartheta}_\alpha), & \Lambda_\alpha &= \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \epsilon_\alpha \times (\vartheta_\alpha - \dot{\vartheta}_\alpha), \\ \Gamma_I &= \frac{1}{2g_{II}} \epsilon_I \times (\vartheta_I + \dot{\vartheta}_I), & \Lambda_I &= \frac{1}{2g_{II}} \epsilon_I \times (\vartheta_I - \dot{\vartheta}_I). \end{aligned}$$

Podstawiając do wzorów (1.12) wektory (1.7) oraz (1.9) z dokładnością do wyrazów liniowych otrzymano następujące wzory:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{2a} [-2b\delta v^2 + a(2\omega + \delta\omega)] e^3, & \Lambda_1 &= -\frac{1}{2} \delta\omega e^3, \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{2b} [-2a(v^1 - \tilde{v}^1) + b(\omega + \tilde{\omega})] e^3, & \Lambda_2 &= \frac{1}{2} (\omega - \tilde{\omega}) e^3, \\ \Gamma_I &= \frac{1}{2a} [-2b\delta\tilde{v}^2 + a(2\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega})] e^3, & \Lambda_I &= -\frac{1}{2} \delta\tilde{\omega} e^3. \end{aligned}$$

Wydlużenie łączników określa się wzorami:

$$(1.14) \quad \epsilon_1 = \delta v^1, \quad \epsilon_2 = \tilde{v}^2 - v^2, \quad \tilde{\epsilon}_I = \delta\tilde{v}^1.$$

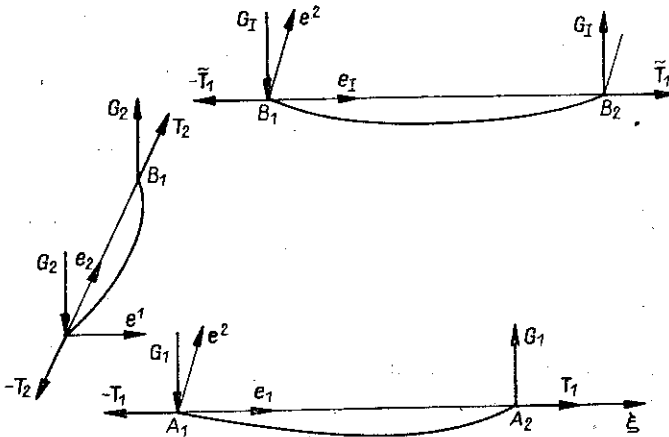
#### 1.4. Związki fizyczne i stan napięcia tarczy

Związki fizyczne określają zależności między składowymi stanu napięcia w łącznikach, a składowymi stanu odkształcenia tych łączników. Dla składowych podstawowego stanu napięcia związki te są następujące:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1 &= \frac{6a_1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{\Gamma}_1 = \frac{3a_1 e^3}{a^2} [-2b(v_{(\xi+1)}^2 - v_{(\xi)}^2) + a(\omega_{(\xi)} + \omega_{(\xi+1)})], \\
 \mathbf{G}_1 &= \frac{2a_1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{\Lambda}_1 = -\frac{a_1 e^3}{a} (\omega_{(\xi+1)} - \omega_{(\xi)}), \\
 \mathbf{K}_2 &= \frac{6a_2}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{\Gamma}_2 = \frac{3a_2 e^3}{b^2} [-2a(v_{(\xi)}^1 - \tilde{v}_{(\xi)}^1) + b(\omega_{(\xi)} + \tilde{\omega}_{(\xi)})], \\
 \mathbf{G}_2 &= \frac{2a_2}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{\Lambda}_2 = -\frac{a_2 e^3}{b^2} (\omega_{(\xi)} - \tilde{\omega}_{(\xi)}), \\
 \mathbf{K}_1 &= \frac{6a_1}{\sqrt{g_{II}}} \mathbf{\Gamma}_1 = \frac{3a_1 e^3}{a^2} [-2b(\tilde{v}_{(\xi+1)}^2 - \tilde{v}_{(\xi)}^2) + a(\tilde{\omega}_{(\xi)} + \tilde{\omega}_{(\xi+1)})], \\
 \mathbf{G}_1 &= \frac{2a_1}{\sqrt{g_{II}}} \mathbf{\Lambda}_1 = -\frac{a_1 e^3}{a} (\tilde{\omega}_{(\xi+1)} - \tilde{\omega}_{(\xi)}), \\
 T_1 = t_1 = d_1 \varepsilon_1 &= d_1 (v_{(\xi+1)}^1 - v_{(\xi)}^1), \quad T_2 = t_2 = d_2 \varepsilon_2 = d_2 (\tilde{v}_{(\xi)}^2 - \tilde{v}_{(\xi)}^2), \\
 \tilde{T}_1 = \tilde{t}_1 = d_1 \tilde{\varepsilon}_1 &= d_1 (\tilde{v}_{(\xi+1)}^1 - \tilde{v}_{(\xi)}^1),
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

gdzie  $a_1, a_2, a_1$  oznaczają sztywności zginania łączników, a  $d_1, d_2, d_1$  — sztywności rozciągania łączników.

Na rys. 6 i 7 pokazano dodatnie zwroty składowych podstawowego stanu napięcia tarczy.



Rys. 6

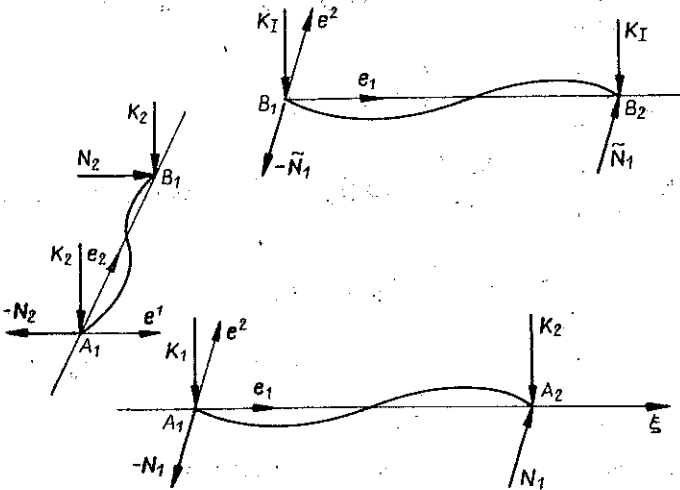
Sily  $N_1, N_2, \tilde{N}_1$  można wyrazić przez składowe w bazie podstawowej:

$$\tag{1.16} \quad N_1 = n_1^2 e_2, \quad N_2 = n_2^2 e_1, \quad \tilde{N}_1 = \tilde{n}_1^2 e_2.$$

Pisząc równania równowagi łączników wg rys. 7 i dokonując odpowiednich przekształceń z uwzględnieniem zależności (1.16), otrzymamy

$$(1.17) \quad 2\mathbf{K}_1 = n_1^2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2), \quad 2\mathbf{K}_2 = n_2^1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1), \quad 2\mathbf{K}_I = \tilde{n}_1^2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2).$$

Ze wzorów powyższych można otrzymać składowe w bazie podstawowej sił  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\tilde{N}_1$ .



Rys. 7

Także wektory momentów  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$ ,  $\mathbf{K}_I$ ,  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{G}_I$  można wyrazić przez składowe w bazie podstawowej:

$$(1.18) \quad \begin{aligned} m_1^3 &= (\mathbf{K}_1 + \mathbf{G}_1) \mathbf{e}^3 = \frac{2a_1}{a} \left[ -\frac{3b}{a} (v_{(\xi+1)}^2 - v_{(\xi)}^2) + 2\omega_{(\xi)} + \omega_{(\xi+1)} \right], \\ m_2^3 &= (\mathbf{K}_2 + \mathbf{G}_2) \mathbf{e}^3 = \frac{2a_2}{b} \left[ \frac{3a}{b} (\tilde{v}_{(\xi)}^1 - v_{(\xi)}^1) + \omega_{(\xi)} + 2\tilde{\omega}_{(\xi)} \right], \\ \tilde{m}_1^3 &= (\mathbf{K}_I + \mathbf{G}_I) \mathbf{e}^3 = \frac{2a_1}{a} \left[ -\frac{3b}{a} (\tilde{v}_{(\xi+1)}^2 - \tilde{v}_{(\xi)}^2) + 2\tilde{\omega}_{(\xi)} + \tilde{\omega}_{(\xi+1)} \right]. \end{aligned}$$

Równania równowagi otrzymano dla obciążenia tarczy siłą brzegową  $\mathbf{P}$  lub  $\tilde{\mathbf{P}}$  i momentem brzegowym  $\mathbf{L}$  lub  $\tilde{\mathbf{L}}$ .

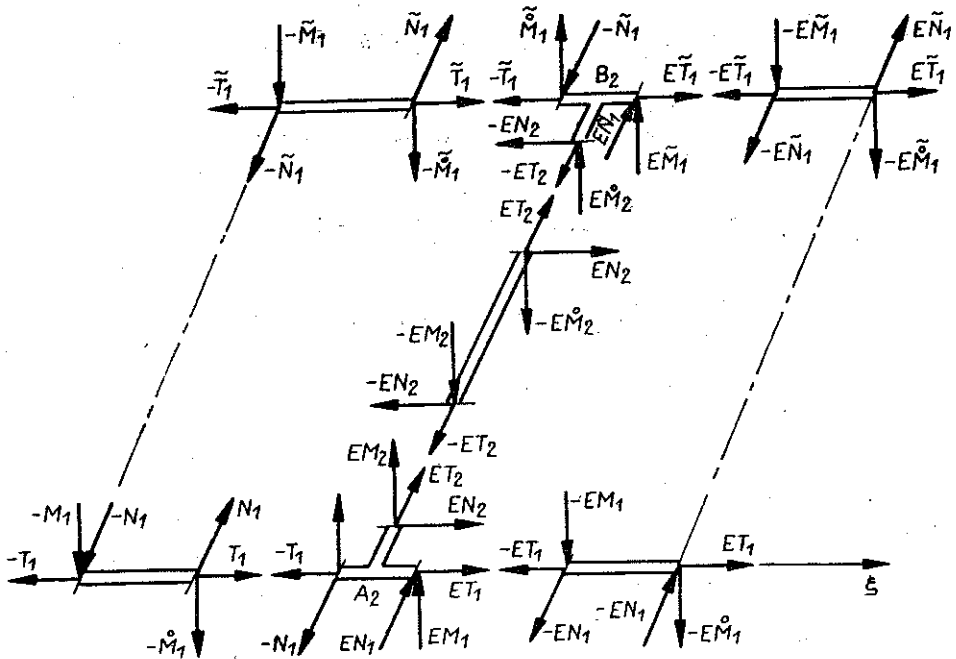
Wektorowe równania równowagi dwóch charakterystycznych węzłów tarczy  $A_2$  i  $B_2$  oraz brzegowych  $A_1$  i  $B_1$  przedstawiają się następująco:

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \delta\mathbf{T}_1 + E\mathbf{T}_2 + \delta\mathbf{N}_1 + E\mathbf{N}_2 &= 0, & \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{P} &= 0, \\ \mathring{\mathbf{M}}_1 + E\mathbf{M}_1 + E\mathbf{M}_2 &= 0, & \tilde{\mathbf{T}}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{N}_2 + \tilde{\mathbf{N}}_1 + \tilde{\mathbf{P}} &= 0, \\ \delta\tilde{\mathbf{T}}_1 - E\mathbf{T}_2 + \delta\tilde{\mathbf{N}}_1 - E\mathbf{N}_2 &= 0, & \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{L} &= 0, \\ \mathring{\mathbf{M}}_1 + E\tilde{\mathbf{M}}_1 + E\mathbf{M}_2 &= 0, & \tilde{\mathbf{M}}_1 + \tilde{\mathbf{M}}_2 + \tilde{\mathbf{L}} &= 0. \end{aligned}$$



Z równań równowagi poszczególnych prętów wynikają następujące wzory:

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \dot{M}_1 &= e_1 \times N_1 - M_1, \\ \dot{M}_2 &= e_2 \times N_2 - M_2, \\ \dot{\tilde{M}}_1 &= e_1 \times \tilde{N}_1 - \tilde{M}_1, \\ EM_2 &= e_2 \times EN_2 - EM_2, \end{aligned}$$



Rys. 8

gdzie  $T_1, T_2, \tilde{T}_1$  oznaczają siły normalne w poszczególnych prętach  $N_1, N_2, \tilde{N}_1$  siły tnące w poszczególnych prętach  $M_1, M_2, \tilde{M}_1, \dot{M}_1, \dot{M}_2, \dot{M}_1$  momenty gnące oraz  $P, \tilde{P}$  siły zewnętrzne leżące w płaszczyźnie tarczy,  $L, \tilde{L}$  — zewnętrzne momenty tarczowe.

Wyrażając siły i momenty przez składowe w bazie podstawowej otrzymano skalarowe równania równowagi:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \delta t_1 + En_2^1 &= 0, & Et_2 + \delta n_1^2 &= 0, \\ abn_1^2 + Em_2^3 + \delta m_1^3 &= 0, & \delta t_1 - En_2^1 &= 0, \\ -Et_2 + \delta \tilde{n}_1^2 &= 0, & ab\tilde{n}_1^2 + \delta \tilde{m}_1^3 - abEn_2^1 - Em_2^3 &= 0, \\ t_1 + n_2^1 &= 0, & t_2 + n_1^2 - P &= 0, \\ m_1^3 + m_2^3 + L &= 0, & \tilde{T}_1 - n_2^1 &= 0, \\ -t_2 + \tilde{n}_1^2 - \tilde{P} &= 0, & \tilde{m}_1^3 - m_2^3 - abn_1^2 + \tilde{L} &= 0. \end{aligned}$$

Składowe napięć na podstawie wzorów (1.16), (1.17) i (1.18) mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 m_1^3 &= \frac{2a_1}{a} \left[ -\frac{3b}{a} (v_{(\xi+1)}^2 - v_{(\xi)}^2) + 2\omega_{(\xi)} + \omega_{(\xi+1)} \right], \\
 m_2^3 &= \frac{2\alpha a_1}{b} \left[ \frac{3a}{b} (\tilde{v}_{(\xi)}^1 - v_{(\xi)}^1) + \omega_{(\xi)} + 2\tilde{\omega}_{(\xi)} \right], \\
 \tilde{m}_1^3 &= \frac{2\beta a_1}{a} \left[ -\frac{3b}{a} (\tilde{v}_{(\xi+1)}^2 - \tilde{v}_{(\xi)}^2) + 2\tilde{\omega}_{(\xi)} + \tilde{\omega}_{(\xi+1)} \right], \\
 n_1^2 &= \frac{6a_1}{a^3 b} [-2b(v_{(\xi+1)}^2 - v_{(\xi)}^2) + a(\omega_{(\xi)} + \omega_{(\xi+1)})], \\
 n_2^1 &= -\frac{6\alpha a_1}{ab^3} [2a(\tilde{v}_{(\xi)}^1 - v_{(\xi)}^1) + b(\omega_{(\xi)} + \tilde{\omega}_{(\xi)})], \\
 \tilde{n}_1^2 &= \frac{6\beta a_1}{a^3 b} [a(\tilde{\omega}_{(\xi)} + \tilde{\omega}_{(\xi+1)}) - 2b(\tilde{v}_{(\xi+1)}^2 - \tilde{v}_{(\xi)}^2)], \\
 t_1 &= \psi a_1 (v_{(\xi+1)}^1 - v_{(\xi)}^1), \\
 t_2 &= \gamma a_1 (\tilde{v}_{(\xi)}^2 - v_{(\xi)}^2), \\
 \tilde{t}_1 &= \varphi a_1 (\tilde{v}_{(\xi+1)}^1 - \tilde{v}_{(\xi)}^1),
 \end{aligned}
 \tag{1.22}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta = \frac{a_1}{a_1}, \quad \psi = \frac{d_1}{a_1}, \quad \gamma = \frac{d_2}{a_1}, \quad \varphi = \frac{d_1}{a_1}.$$

Po podstawieniu do skalarowych równań równowagi tarczy (1.21) składowych obiektów napięć (1.22) otrzymano ostateczną postać równań równowagi:

$$\begin{aligned}
 A_2^1 \omega_{(\xi+1)} + A_5^1 \tilde{\omega}_{(\xi+1)} + A_7^1 v_{(\xi)}^1 + A_8^1 v_{(\xi+1)}^1 + A_9^1 v_{(\xi+2)}^1 + A_{14}^1 \tilde{v}_{(\xi+1)}^1 &= 0, \\
 A_1^2 \omega_{(\xi)} + A_3^2 \omega_{(\xi+2)} + A_{10}^2 v_{(\xi)}^2 + A_{11}^2 v_{(\xi+1)}^2 + A_{12}^2 v_{(\xi+2)}^2 + A_{17}^2 \tilde{v}_{(\xi+1)}^2 &= 0, \\
 A_2^3 \omega_{(\xi+1)} + A_5^3 \tilde{\omega}_{(\xi+1)} + A_8^3 v_{(\xi+1)}^1 + A_{13}^3 \tilde{v}_{(\xi)}^1 + A_{14}^3 \tilde{v}_{(\xi+1)}^1 + A_{15}^3 \tilde{v}_{(\xi+2)}^1 &= 0, \\
 A_4^4 \tilde{\omega}_{(\xi)} + A_6^4 \tilde{\omega}_{(\xi+2)} + A_{11}^4 v_{(\xi+1)}^2 + A_{16}^4 \tilde{v}_{(\xi)}^2 + A_{17}^4 \tilde{v}_{(\xi+1)}^2 + A_{18}^4 \tilde{v}_{(\xi+2)}^2 &= 0, \\
 A_1^5 \omega_{(\xi)} + A_2^5 \omega_{(\xi+1)} + A_3^5 \omega_{(\xi+2)} + A_5^5 \tilde{\omega}_{(\xi+1)} + A_8^5 v_{(\xi+1)}^1 + A_{10}^5 v_{(\xi)}^2 + A_{12}^5 v_{(\xi+2)}^2 + \\
 &+ A_{14}^5 \tilde{v}_{(\xi+1)}^1 = 0, \\
 A_2^6 \omega_{(\xi+1)} + A_4^6 \tilde{\omega}_{(\xi)} + A_5^6 \tilde{\omega}_{(\xi+1)} + A_6^6 \tilde{\omega}_{(\xi+2)} + A_8^6 v_{(\xi+1)}^1 + A_{14}^6 \tilde{v}_{(\xi+1)}^1 + \\
 &+ A_{16}^6 \tilde{v}_{(\xi)}^2 + A_{17}^6 \tilde{v}_{(\xi+1)}^2 + A_{18}^6 \tilde{v}_{(\xi+2)}^2 = 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

Jest to układ sześciu równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Niewiadomymi funkcjami współrzędnej węzłów tarczy jest sześć składowych  $\omega$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $v^1$ ,  $v^2$ ,  $\tilde{v}^1$ ,  $\tilde{v}^2$  stanu przemieszczeń tych węzłów.

Równania równowagi węzłów brzegowych  $A_1, B_1$  przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}
 & A_1^{01} \omega_{(\xi)} + A_4^{01} \tilde{\omega}_{(\xi)} + A_7^{01} v_{(\xi)}^1 + A_8^{01} v_{(\xi+1)} + A_{13}^{01} \tilde{v}_{(\xi)}^1 + \frac{P}{a_1} = 0, \\
 & A_1^{02} \omega_{(\xi)} + A_2^{02} \omega_{(\xi+1)} + A_{10}^{02} v_{(\xi)}^1 + A_{11}^{02} v_{(\xi+1)}^2 + A_{16}^{02} \tilde{v}_{(\xi)}^2 = 0, \\
 & A_1^{03} \omega_{(\xi)} + A_4^{03} \tilde{\omega}_{(\xi)} + A_7^{03} v_{(\xi)}^1 + A_{13}^{03} v_{(\xi)}^1 + A_{14}^{03} \tilde{v}_{(\xi+1)}^1 + \frac{L}{a_1} = 0, \\
 (1.24) \quad & A_4^{04} \tilde{\omega}_{(\xi)} + A_5^{04} \tilde{\omega}_{(\xi+1)} + A_{10}^{04} v_{(\xi)}^2 + A_{16}^{04} \tilde{v}_{(\xi+1)}^2 + A_{17}^{04} \tilde{v}_{(\xi+1)}^2 + A_{18}^{04} \tilde{v}_{(\xi+2)}^2 + \frac{\tilde{P}}{a_1} = 0, \\
 & A_1^{05} \omega_{(\xi)} + A_2^{05} \omega_{(\xi+1)} + A_4^{05} \tilde{\omega}_{(\xi)} + A_7^{05} v_{(\xi)}^1 + A_{10}^{05} v_{(\xi)}^2 + A_{11}^{05} v_{(\xi+1)}^2 + A_{13}^{05} \tilde{v}_{(\xi)}^1 = 0, \\
 & A_1^{06} \omega_{(\xi)} + A_4^{06} \tilde{\omega}_{(\xi)} + A_5^{06} \tilde{\omega}_{(\xi+1)} + A_7^{06} v_{(\xi)}^1 + A_{13}^{06} \tilde{v}_{(\xi)}^1 + A_{16}^{06} \tilde{v}_{(\xi)}^2 + \\
 & \qquad \qquad \qquad + A_{17}^{06} \tilde{v}_{(\xi+1)}^2 + \frac{\tilde{L}}{a_1} = 0.
 \end{aligned}$$

Operatory równań (1.23) i (1.24) wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 A_2^1 = A_5^1 &= \frac{6\alpha}{ab^2}, & A_7^1 = A_9^1 &= \psi, & A_8^1 &= -2\psi + \frac{12\alpha}{b^3}, \\
 A_{14}^1 &= -\frac{12\alpha}{b^3}, & A_1^2 = -A_3^2 &= -\frac{6}{a^2 b}, & A_{10}^2 = A_{12}^2 &= -\frac{12}{a^3}, \\
 A_{11}^2 &= \frac{24}{a^3} - \gamma, & A_{17}^2 &= \gamma, & A_2^3 = A_5^3 &= \frac{6\alpha}{ab^2}, & A_8^3 &= -\frac{12\alpha}{b^3}, \\
 A_{13}^3 = A_{15}^3 &= \varphi, & A_{14}^3 &= \frac{12\alpha}{b^3} - 2\varphi, & A_4^4 = -A_6^4 &= -\frac{6\beta}{a^2 b}, \\
 A_{11}^4 &= \gamma, & A_{16}^4 = A_{18}^4 &= -\frac{12\beta}{a^3}, & A_{17}^4 &= -\gamma + \frac{24\beta}{a^3}, & A_1^5 &= \frac{2}{a}, \\
 A_2^5 &= \frac{8}{a} + \frac{2\alpha}{b}, & A_3^5 &= \frac{2}{a}, & A_5^5 &= \frac{4\alpha}{b}, & A_8^5 &= -\frac{6\alpha a}{b}, & A_{14}^5 &= -\frac{6\alpha a}{b}, \\
 A_{10}^5 &= \frac{6b}{a^2}, & A_{12}^5 &= -\frac{6b}{a^2}, & A_2^6 &= \frac{6\alpha}{b} - \frac{2\alpha a}{b^2}, & A_4^6 &= \frac{2\beta}{a}, \\
 A_5^6 &= \frac{8\beta}{a} + \frac{6\alpha}{b} - \frac{4\alpha a}{b^2}, & A_6^6 &= \frac{2\beta}{a}, & A_8^6 &= -A_{14}^6 &= -\frac{6\alpha a}{b^2}, \\
 A_{16}^6 &= \frac{6\beta b}{a^2}, & A_{18}^6 &= -\frac{6\beta b}{a^2}, & A_1^{01} = A_4^{01} &= -\frac{6\alpha}{ab^2}, & A_7^{01} &= -\psi + \frac{12\alpha}{b^3}, \\
 A_8^{01} &= \psi, & A_{13}^{01} &= -\frac{12\alpha}{b^3}, & A_1^{02} = A_2^{02} &= \frac{6}{a^2 b}, & A_{10}^{02} &= -\gamma + \frac{12}{a^3}, & A_{11}^{02} &= -\frac{12}{a^3}, \\
 A_{16}^{02} = A_{10}^{04} &= \gamma, & A_1^{03} = A_4^{03} &= \frac{6\alpha}{ab^2}, & A_7^{03} &= \frac{12\alpha}{b^3}, & A_{13}^{03} &= -\varphi + \frac{12\alpha}{b^3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{14}^{03} &= \varphi, & A_4^{04} &= A_5^{04} = \frac{6\beta}{a^2 b}, & A_{16}^{04} &= -\gamma + \frac{12\beta}{a^3}, & A_{17}^{04} &= -\frac{12\beta}{a^3}, \\
 A_1^{05} &= \frac{4}{a} + \frac{2\alpha}{b}, & A_2^{05} &= \frac{2}{a}, & A_4^{05} &= \frac{4\alpha}{b}, & A_7^{05} &= -\frac{6\alpha a}{b^2} = -A_{13}^{05}, \\
 A_{10}^{05} &= -A_{11}^{05} = \frac{6b}{a^2}, & A_1^{06} &= \frac{4\alpha}{b}, & A_4^{06} &= \frac{4\beta}{a} + \frac{2\alpha}{b}, & A_5^{06} &= \frac{2\beta}{a}, \\
 A_7^{06} &= -A_{13}^{06} = -\frac{6\alpha a}{b^2}, & A_{16}^{06} &= -A_{17}^{06} = \frac{6\beta b}{a^2}.
 \end{aligned}$$

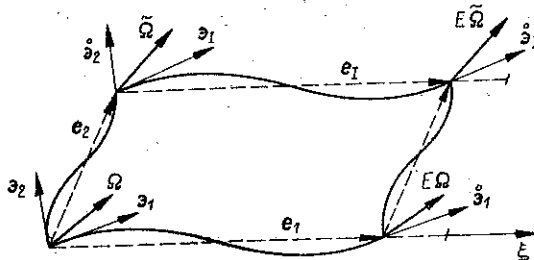
## 2. PLYTOWY STAN NAPIĘCIA

Rozważa się płytę ramową obciążoną w poszczególnych węzłach obciążeniem zewnętrznym w postaci sił  $P_{11}, \tilde{P}_{11}, P_{12}, \tilde{P}_{12}, \dots, P_{1n}, \tilde{P}_{1n}$  oraz momentów  $L_{11}, \tilde{L}_{11}, L_{12}, \tilde{L}_{12}, \dots, L_{1n}, \tilde{L}_{1n}$  (rys. 2d).

### 2.1. Stan przemieszczenia węzłów płyty

Przemieszczenia węzłów płyty ramowej podobnie jak i tarczy ramowej składają się z przesunięć i obrotów. Wektory przemieszczeń węzłów płyty wyrazić można przez składowe skalarowe w bazie podstawowej lub wzajemnej:

$$(2.1) \quad \mathbf{v}_{(\xi)} = v^3 \mathbf{e}_3 = v_3 \mathbf{e}^3, \quad \tilde{\mathbf{v}}_{(\xi)} = \tilde{v}^3 \mathbf{e}_3 = \tilde{v}_3 \cdot \mathbf{e}^3.$$



Rys. 9

Wektory przemieszczeń węzłów przekształcają wektory baz konfiguracji początkowej  $\mathbf{e}_\alpha$  i  $\mathbf{e}_1$  na wektory baz konfiguracji chwilowej  $\mathbf{e}_\alpha$  i  $\mathbf{e}_1$  następująco:

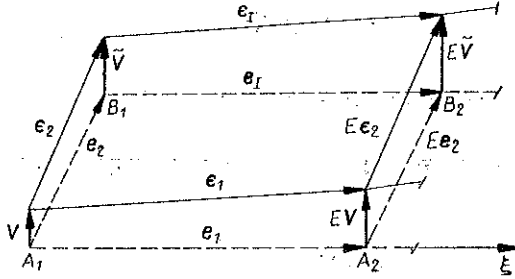
$$(2.2) \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \delta\mathbf{v}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \delta\tilde{\mathbf{v}}.$$

Pole wektorowe obrotów węzłów dźwigara także można wyrazić przez składowe w bazach podstawowej i wzajemnej konfiguracji początkowej:

$$(2.3) \quad \mathbf{\Omega}_{(\xi)} = \Omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \Omega_\alpha \mathbf{e}^\alpha, \quad \tilde{\mathbf{\Omega}}_{(\xi)} = \tilde{\Omega}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \tilde{\Omega}_\alpha \mathbf{e}^\alpha.$$

Wektory obrotów przekształcają wektory baz konfiguracji początkowej  $\mathbf{e}_\alpha$  i  $\mathbf{e}_I$  na wektory baz konfiguracji chwilowej  $\mathfrak{e}_\alpha$  i  $\mathfrak{e}_I$  następująco:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \mathbf{e}_1 + \Omega^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_1), & \mathfrak{e}_2 &= \mathbf{e}_2 + \Omega^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_2), \\ \mathfrak{e}_I &= \mathbf{e}_I + \tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_I) = \mathbf{e}_I + \tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_I). \end{aligned}$$



Rys. 10

Dodatkowo wektory baz konfiguracji chwilowej  $\mathfrak{e}_\alpha$  i  $\mathfrak{e}_I$  powstałe przez obrót wektorów  $\mathbf{e}_\alpha$  i  $\mathbf{e}_I$  o kąty określone wektorami  $E\Omega$  i  $E\tilde{\Omega}$  przedstawiają się następująco:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \mathbf{e}_1 + E\Omega^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_1), & \mathfrak{e}_2 &= \mathbf{e}_2 + \tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_2), \\ \mathfrak{e}_I &= \mathbf{e}_I + E\tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_I) = \mathbf{e}_I + E\tilde{\Omega}^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_I). \end{aligned}$$

### 2.2. Związki geometryczne płyty ramowej

Wektory  $\theta_{1\alpha}$ ,  $\hat{\theta}_{1\alpha}$ ,  $\theta_{1I}$ ,  $\hat{\theta}_{1I}$  będące miarą ugięcia łączników przedstawiono jako liniową kombinację wektorów  $\Gamma_{1\alpha}$ ,  $\Lambda_{1\alpha}$ ,  $\Gamma_{1I}$ ,  $\Lambda_{1I}$ . W ogólnym przypadku mamy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \theta_{1\alpha} &= \Gamma_{1\alpha} + \Lambda_{1\alpha}, & \hat{\theta}_{1\alpha} &= \Gamma_{1\alpha} - \Lambda_{1\alpha}, \\ \theta_{1I} &= \Gamma_{1I} + \Lambda_{1I}, & \hat{\theta}_{1I} &= \Gamma_{1I} - \Lambda_{1I}. \end{aligned}$$

Wektory  $\Gamma_{1\alpha}$ ,  $\Gamma_{1I}$  opisujące antysymetryczną część wygięcia łączników można określić następująco:

$$(2.7) \quad \Gamma_{1\alpha} = \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \mathbf{e}_\alpha \times (\mathfrak{e}_\alpha + \mathring{\mathfrak{e}}_\alpha), \quad \Gamma_{1I} = \frac{1}{2g_{II}} \mathbf{e}_I \times (\mathfrak{e}_I + \mathring{\mathfrak{e}}_I).$$

wektory  $\Lambda_{1\alpha}$ ,  $\Lambda_{1I}$  opisujące symetryczną część wygięcia łączników

$$(2.8) \quad \Lambda_{1\alpha} = \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \mathbf{e}_\alpha \times (\mathfrak{e}_\alpha - \mathring{\mathfrak{e}}_\alpha), \quad \Lambda_{1I} = \frac{1}{2g_{II}} \mathbf{e}_I \times (\mathfrak{e}_I - \mathring{\mathfrak{e}}_I).$$

Po podstawieniu do wzorów (2.7) i (2.8) wektorów (2.2) oraz (2.4) i (2.5) otrzymano

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{abe^2}{2g_{11}} [2\delta v_j + ab(2\Omega^2 + \delta\Omega^2)], & \Lambda_{11} &= -\frac{a^2 b^2 e^2}{2g_{11}} \delta\Omega^2, \\ \Gamma_{12} &= \frac{abe^1}{2g_{22}} [2(v - \tilde{v}) + ab(\Omega^1 + \tilde{\Omega}^1)], & \Lambda_{12} &= \frac{a^2 b^2 e^1}{2g_{22}} (\Omega^1 - \tilde{\Omega}^1), \\ \Gamma_{1I} &= \frac{abe^2}{2g_{II}} [2\delta\tilde{v} + ab(2\tilde{\Omega}^2 + \delta\tilde{\Omega}^2)], & \Lambda_{1I} &= -\frac{a^2 b^2 e^2}{2g_{II}} \delta\tilde{\Omega}^2. \end{aligned}$$

Składowe skalarowe obiektu skręcenia mają postać

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \sqrt{g_{11}} \delta \Omega^1, \\ \varphi_2 &= \sqrt{g_{22}} (\tilde{\Omega}^2 - \Omega^2), \\ \varphi_3 &= \sqrt{g_{11}} \delta \tilde{\Omega}^1. \end{aligned}$$

### 2.3. Związki fizyczne i stan napięcia płyty

Dla składowych podstawowego stanu napięcia związki fizyczne płyty przedstawiają się następująco:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \frac{6a_{11}}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{\Gamma}_{11} = \frac{3a_{11} b e^2}{a^2} [2(v_{(\xi+1)} - v_{(\xi)}) + ab(\Omega_{(\xi)}^2 + \Omega_{(\xi+1)}^2)], \\ \mathbf{G}_{11} &= \frac{2a_{11}}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{\Lambda}_{11} = -\frac{a_{11} b^2 e^2}{a} [\Omega_{(\xi+1)}^2 - \Omega_{(\xi)}^2], \\ \kappa_1 &= \frac{b_1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi_1 = b_1 [\Omega_{(\xi+1)}^1 - \Omega_{(\xi)}^1], \\ \mathbf{K}_{12} &= \frac{6a_2}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{\Gamma}_{12} = \frac{3a_{12} a e^1}{b^2} [2(v_{(\xi)} - \tilde{v}_{(\xi)}) + ab(\Omega_{(\xi)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1)], \\ \mathbf{G}_{12} &= \frac{2a_2}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{\Lambda}_{12} = \frac{a_{12} a^2 e^1}{b} [\Omega_{(\xi)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1], \\ \kappa_2 &= \frac{b_2}{\sqrt{g_{22}}} \varphi_2 = b_2 [\tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 - \Omega_{(\xi)}^2], \\ \mathbf{K}_{11} &= \frac{6a_1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{\Gamma}_{11} = \frac{3a_{11} b e^2}{a^2} [2(\tilde{v}_{(\xi+1)} - \tilde{v}_{(\xi)}) + ab(\tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 + \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2)], \\ \mathbf{G}_{11} &= \frac{2a_{11}}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{\Lambda}_{11} = -\frac{a_{11} b^2 e^2}{a} [\tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 - \tilde{\Omega}_{(\xi)}^2], \\ \kappa_1 &= \frac{b_1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi_1 = b_1 [\tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1], \end{aligned}$$

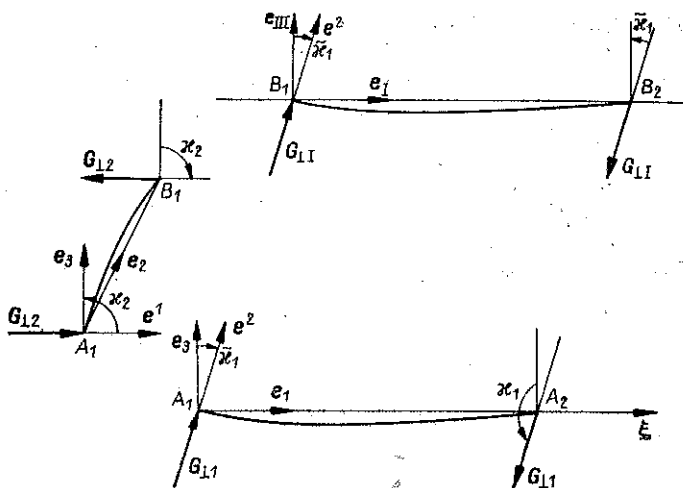
gdzie  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{11}$  oznaczają sztywności zginania łączników,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_1$  sztywności skręcenia łączników.

Na rys. 11 i 12 przedstawione są składowe podstawowego stanu napięcia. Siły tnące  $N_{11}$ ,  $N_{12}$ ,  $\tilde{N}_{11}$  można wyrazić przez składowe w bazie podstawowej:

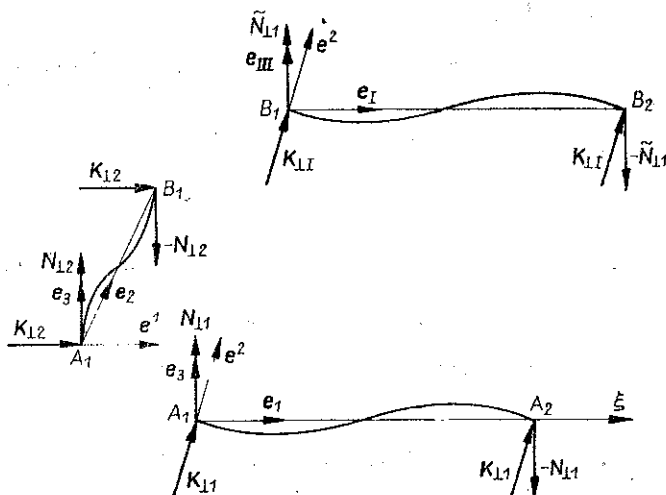
$$(2.12) \quad N_{11} = N_{11} \mathbf{e}_3 = n_{11}^3 \mathbf{e}_3, \quad N_{12} = N_{12} \mathbf{e}_3 = n_{12}^3 \mathbf{e}_3, \quad \tilde{N}_{11} = \tilde{N}_{11} \mathbf{e}_3 = \tilde{n}_{11}^3 \mathbf{e}_3.$$

Pisząc równania równowagi łączników wg rys. 12 i dokonując odpowiednio przekształceń z uwzględnieniem wzorów (2.12) otrzymano:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} 2\mathbf{K}_{1I} &= n_{1I}^3 (\mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_3), & 2\mathbf{K}_{2I} &= n_{12}^3 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \\ 2\mathbf{K}_{LI} &= \tilde{n}_{1I}^3 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) = \tilde{n}_{1I}^3 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3). \end{aligned}$$



Rys. 11

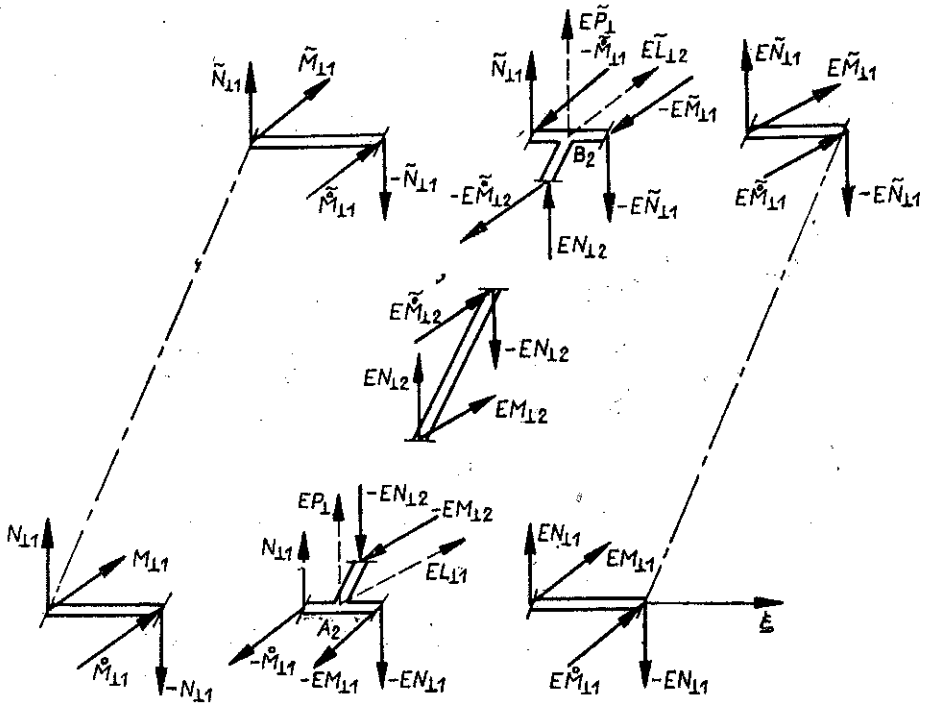


Rys. 12

Momenty działające na łączniki, jak przedstawiono na rys. 11 i 12, zostały wyrażone przez wektory  $\mathbf{K}_{L1}$ ,  $\mathbf{K}_{L2}$ ,  $\mathbf{K}_{LI}$ ,  $\mathbf{G}_{L1}$ ,  $\mathbf{G}_{L2}$ ,  $\mathbf{G}_{LI}$  oraz skalary

$\alpha_1, \alpha_2, \tilde{\alpha}_1$ . Następnie wyrażając je przez składowe w bazie podstawowej otrzymano:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} m_{11}^1 &= \left[ (K_{11} + G_{11}) e^1 - \alpha_1 \frac{e_1 e^1}{\sqrt{g_{11}}} \right], & m_{11}^2 &= [(K_{11} + G_{11}) e^2], \\ m_{12}^1 &= [(K_{12} + G_{12}) e^1], & m_{12}^2 &= \left[ (K_{12} + G_{12}) e^2 - \alpha_2 \frac{e_2 e^2}{\sqrt{g_{22}}} \right], \\ \tilde{m}_{11}^1 &= \left[ (K_{11} + G_{11}) e^1 - \tilde{\alpha}_1 \frac{e_1 e^1}{\sqrt{g_{11}}} \right], & \tilde{m}_{11}^2 &= [(K_{11} + G_{11}) e^2]. \end{aligned}$$



Rys. 13

Równania równowagi płyty otrzymano dla dwóch powtarzalnych węzłów  $A_2$  i  $B_2$  (rys. 13):

$$(2.15) \quad \begin{aligned} -\delta N_{11} - EN_{12} + EP_1 &= 0, \\ -\dot{M}_{11} - EM_{11} - EM_{12} + EL_{11} &= 0, \\ -\delta \tilde{N}_{11} + EN_{12} + E\tilde{P}_1 &= 0, \\ -\dot{\tilde{M}}_{11} - E\tilde{M}_{11} - E\tilde{M}_{12} + E\tilde{L}_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Równania równowagi prętów ramy są następujące:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \dot{M}_{11} &= e_1 \times N_{11} - M_{11}, \\ \dot{\tilde{M}}_{11} &= e_1 \times \tilde{N}_{11} - \tilde{M}_{11} = e_1 \times \tilde{N}_{11} - \tilde{M}_{11}, \\ E\dot{M}_{12} &= e_2 \times EN_{12} - EM_{12}. \end{aligned}$$



Uwzględniając równania (2.16), a następnie wyrażając siły i momenty przez składowe w bazie podstawowej, otrzymano następujące równania równowagi:

$$\begin{aligned}
 & -\delta m_{11}^1 g_{11} - Em_{12}^1 g_{11} + El_{11}^1 g_{11} = 0, \\
 & abn_{11}^3 - \delta m_{11}^2 g_{22} - Em_{12}^2 g_{22} + El_{11}^2 g_{22} = 0, \\
 & -\delta n_{11}^3 - En_{12}^3 + Ep_{11}^3 = 0, \\
 (2.17) \quad & -abEn_{12}^3 + Em_{12}^1 g_{11} - \delta \tilde{m}_{11}^1 g_{11} + El_{11}^1 g_{11} = 0, \\
 & ab\tilde{n}_{11}^3 + Em_{12}^2 g_{22} - \delta \tilde{m}_{11}^2 g_{22} + El_{11}^2 g_{22} = 0, \\
 & -\delta \tilde{n}_{11}^3 + En_{12}^3 + Ep_{11}^3 = 0.
 \end{aligned}$$

Składowe napięć na podstawie wzorów (2.11), (2.13) i (2.14) w postaci rozwiniętej mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 n_{11}^3 &= -\frac{6a_1}{a^3} [2(v_{(\xi+1)} - v_{(\xi)}) + ab(\Omega_{(\xi+1)}^2 + \Omega_{(\xi)}^2)], \\
 n_{12}^3 &= \frac{6\alpha_{\perp} a_1}{b^3} [2(v_{(\xi)} - \tilde{v}_{(\xi)}) + ab(\Omega_{(\xi)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1)], \\
 \tilde{n}_{11}^3 &= -\frac{6\beta_{\perp} a_1}{a^3} [2(\tilde{v}_{(\xi+1)} - \tilde{v}_{(\xi)}) + ab(\tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1)], \\
 m_{11}^1 &= -\frac{\psi_{\perp} a_1}{a} [\Omega_{(\xi+1)}^1 - \Omega_{(\xi)}^1], \\
 (2.18) \quad m_{11}^2 &= \frac{a_1}{a^2 b} [6(v_{(\xi+1)} - v_{(\xi)}) + 2ab(2\Omega_{(\xi)}^2 + \Omega_{(\xi+1)}^2)], \\
 m_{12}^2 &= -\frac{\gamma_{\perp} a_1}{b} [\tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 - \Omega_{(\xi)}^2], \\
 m_{12}^1 &= \frac{\alpha_{\perp} a_1}{ab^2} [6(v_{(\xi)} - \tilde{v}_{(\xi)}) + 2ab(2\Omega_{(\xi)}^1 + \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1)], \\
 \tilde{m}_{11}^1 &= -\frac{\varphi_{\perp} a_1}{a} [\tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1], \\
 \tilde{m}_{11}^2 &= \frac{\beta_{\perp} a_1}{a^2 b} [6(\tilde{v}_{(\xi+1)} - \tilde{v}_{(\xi)}) + 2ab(2\tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 + \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2)],
 \end{aligned}$$

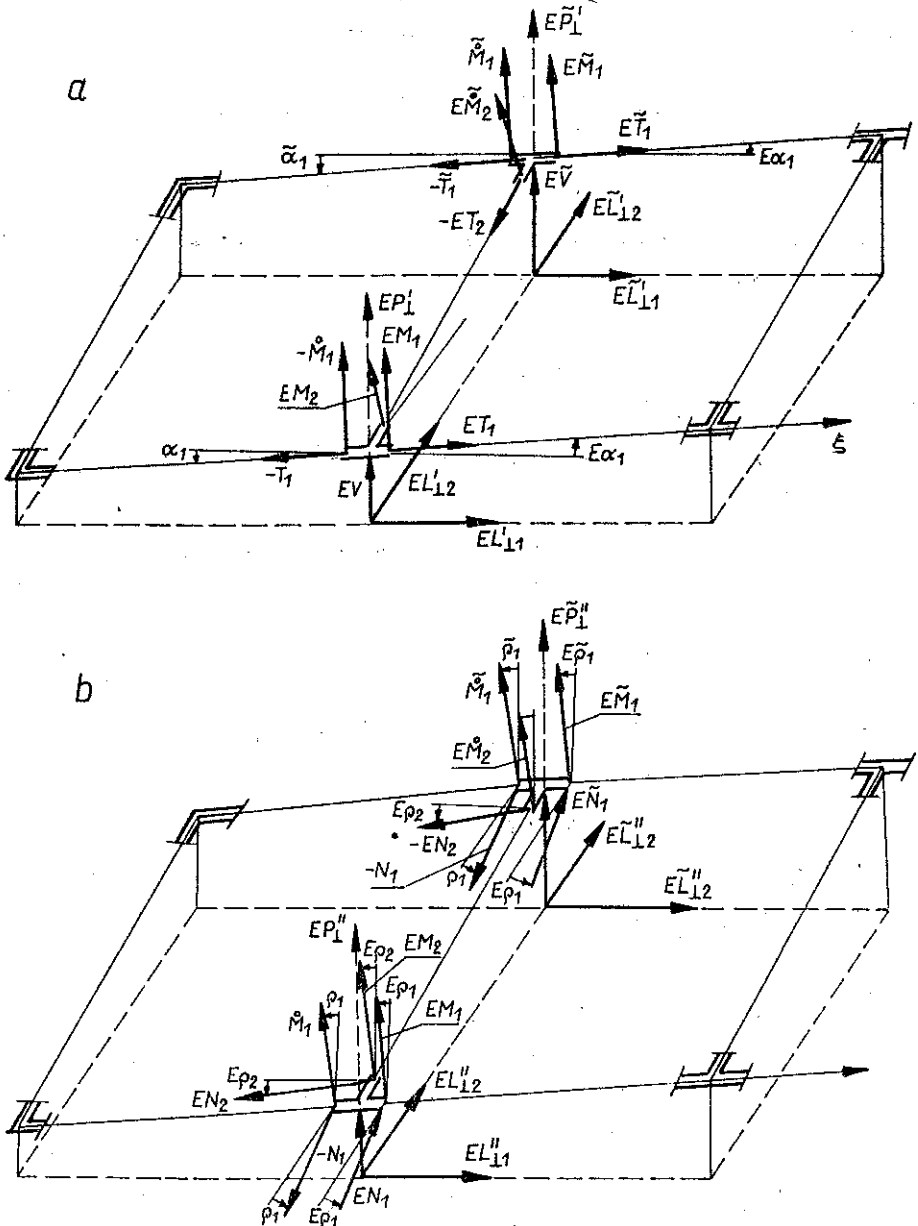
gdzie

$$\alpha_{\perp} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \beta_{\perp} = \frac{a_{11}}{a_{11}}, \quad \gamma_{\perp} = \frac{b_2}{a_{11}}, \quad \varphi_{\perp} = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad \psi_{\perp} = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

## 3. OBCIĄŻENIA PŁYTOWE WYWOŁANE TARCZOWYM STANEM NAPIĘCIA

Jeśli nadać węzłom tarczy przesunięcia  $v_i, \tilde{v}_i$  oraz obroty  $\Omega_i, \tilde{\Omega}_i$  (rys. 2c), to pręty znajdujące się pomiędzy węzłami przyjmują położenie pokazane na rys. 14a i 14b.

Zgodnie z przyjętym we wstępie założeniem odcinki prętów tarczy pomiędzy węzłami przy przejściu tarczy w płytową konfigurację wyboczeniową pozostają proste



Rys. 14

i nie wyginają się. Założenie to obowiązuje na etapie obliczenia obciążenia płytowego wywołanego tarczowym stanem napięcia.

Suma rzutów sił na kierunek  $e_3$  oraz momentów na  $e_1$  i  $e_2$  działających na węzły  $A$  i  $B$  (rys. 14a i 14b), pochodzące od oddziaływania poszczególnych łączników przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
 Ep_1^3 &= -T_1 \alpha_1 + ET_1 \alpha_1 + ET_2 \alpha_2 - N_1 \rho_1 + EN_1 \rho_1 + EN_2 \rho_2, \\
 E\tilde{p}_1^3 &= -\tilde{T}_1 \tilde{\alpha}_1 + E\tilde{T}_1 \tilde{\alpha}_1 - ET_2 \alpha_2 - \tilde{N}_1 \tilde{\rho}_1 + E\tilde{N}_1 \tilde{\rho}_1 - EN_2 \rho_2, \\
 El_1^1 &= -\dot{M}_1 \alpha_1 - EM_1 \alpha_1 - EM_2 \rho_2, \\
 El_1^2 &= -EM_2 \alpha_2 - \dot{M}_1 \rho_1 - EM_1 \rho_1, \\
 El^1 &= -\dot{M}_1 \tilde{\alpha}_1 - E\tilde{M}' \tilde{\alpha}_1 - E\dot{M}_2 \rho_2, \\
 El^2 &= -E\dot{M}_2 \alpha_2 - \dot{M}_1 \tilde{\rho}_1 - E\tilde{M}_1 \tilde{\rho}_1.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Kąty obrotu łączników oraz kąty skręcania prętów są następujące:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{v_{(\xi+1)} - v_{(\xi)}}{\sqrt{g_{11}}}, & \alpha_2 &= \frac{\tilde{v}_{(\xi)} - v_{(\xi)}}{\sqrt{g_{22}}}, \\
 \tilde{\alpha}_1 &= \frac{\tilde{v}_{(\xi+1)} - \tilde{v}_{(\xi)}}{\sqrt{g_{11}}}, \\
 \rho_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{g_{11}} (\Omega_{(\xi+1)}^1 - \Omega_{(\xi)}^1), \\
 \rho_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{g_{22}} (\tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 - \Omega_{(\xi)}^2), \\
 \tilde{\rho}_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{g_{11}} (\tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 - \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1).
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Po podstawieniu do wzorów (3.1) wielkości (3.2) otrzymano siły i momenty obciążające płytę w poszczególnych węzłach.

#### 4. RÓWNIANIA STATECZNOŚCI DŹWIGARA

Jak już powiedziano we wstępie wybocheniowymi równaniami równowagi stały się równania statycznego zginania płyty ramowej — po zastąpieniu w nich dowolnego obciążenia zewnętrznego nie zrównoważonymi składowymi obciążeniami płytowego wywołanymi przesunięciami i obrotami węzłów tarczy. Dokonując w równaniach równowagi płyty (2.17) podstawienia wyrażzeń (3.3) oraz uwzględniając składowe

napięcie (2.18) otrzymano w końcu postać równań stateczności rozpatrywanego dźwigara:

$$\begin{aligned}
 & A_1^1 \Omega_{(\xi)}^1 + A_2^1 \Omega_{(\xi+1)}^1 + A_3^1 \Omega_{(\xi+2)}^1 + \kappa B_5^1 \Omega_{(\xi+1)}^2 + A_8^1 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \kappa B_{11}^1 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + \\
 & \quad + \kappa B_{13}^1 v_{(\xi)} + (A_{14}^1 + \kappa B_{14}^1) v_{(\xi+1)} + \kappa B_{15}^1 v_{(\xi+2)} + A_{17}^1 \tilde{v}_{(\xi+1)} = 0, \\
 & \kappa B_1^2 \Omega_{(\xi)}^1 + \kappa B_2^2 \Omega_{(\xi+1)}^1 + \kappa B_3^2 \Omega_{(\xi+2)}^1 + A_4^2 \Omega_{(\xi)}^2 + A_6^2 \Omega_{(\xi+2)}^2 + A_{11}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \\
 & \quad + A_{13}^2 v_{(\xi)} + \kappa B_{14}^2 v_{(\xi+1)} + A_{15}^2 v_{(\xi+2)} + \kappa B_{17}^2 \tilde{v}_{(\xi+1)} = 0, \\
 & A_2^3 \Omega_{(\xi+1)}^1 + \kappa B_5^3 \Omega_{(\xi+1)}^2 + A_7^3 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1 + A_8^3 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + A_9^3 \tilde{\Omega}_{(\xi+2)}^1 + \kappa B_{11}^3 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + \\
 & \quad + A_{14}^3 v_{(\xi+1)} + \kappa B_{16}^3 \tilde{v}_{(\xi)} + (A_{17}^3 + \kappa B_{17}^3) \tilde{v}_{(\xi+1)} + \kappa B_{18}^3 \tilde{v}_{(\xi+2)} = 0, \\
 (4.1) \quad & A_5^4 \Omega_{(\xi+1)}^2 + \kappa B_7^4 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1 + \kappa B_8^4 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \kappa B_9^4 \tilde{\Omega}_{(\xi+2)}^1 + A_{10}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 + A_{11}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + \\
 & \quad + A_{12}^4 \tilde{\Omega}_{(\xi+2)}^2 + \kappa B_{14}^4 v_{(\xi+1)} + A_{16}^4 \tilde{v}_{(\xi)} + \kappa B_{17}^4 \tilde{v}_{(\xi+1)} + A_{18}^4 \tilde{v}_{(\xi+2)} = 0, \\
 & \kappa B_1^5 \Omega_{(\xi)}^1 + (A_2^5 + \kappa B_2^5) \Omega_{(\xi+1)}^1 + \kappa B_3^5 \Omega_{(\xi+2)}^1 + A_4^5 \Omega_{(\xi)}^2 + \kappa B_5^5 \Omega_{(\xi+1)}^2 + \\
 & \quad + A_6^5 \Omega_{(\xi+2)}^2 + A_8^5 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \kappa B_{11}^5 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + (A_{13}^5 + \kappa B_{13}^5) v_{(\xi)} + \\
 & \quad + (A_{14}^5 + \kappa B_{14}^5) v_{(\xi+1)} + (A_{15}^5 + \kappa B_{15}^5) v_{(\xi+2)} + (A_{17}^5 + \kappa B_{17}^5) \tilde{v}_{(\xi+1)} = 0, \\
 & A_2^6 \Omega_{(\xi+1)}^1 + \kappa B_5^6 \Omega_{(\xi+1)}^2 + \kappa B_7^6 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1 + (A_8^6 + \kappa B_8^6) \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^1 + \kappa B_9^6 \tilde{\Omega}_{(\xi+2)}^1 + \\
 & \quad + A_{10}^6 \tilde{\Omega}_{(\xi)}^2 + \kappa B_{11}^6 \tilde{\Omega}_{(\xi+1)}^2 + A_{12}^6 \tilde{\Omega}_{(\xi+2)}^2 + (A_{14}^6 + \kappa B_{14}^6) v_{(\xi+1)} + \\
 & \quad + (A_{16}^6 + \kappa B_{16}^6) \tilde{v}_{(\xi)} + (A_{17}^6 + \kappa B_{17}^6) \tilde{v}_{(\xi+1)} + (A_{18}^6 + \kappa B_{18}^6) \tilde{v}_{(\xi+2)} = 0.
 \end{aligned}$$

Jest to układ jednorodny sześciu równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Niewiadomymi funkcjami współrzędnej  $\xi$  węzłów dźwigara jest sześć składowych  $\Omega^1$ ,  $\Omega^2$ ,  $v$ ,  $\tilde{\Omega}^1$ ,  $\tilde{\Omega}^2$ ,  $\tilde{v}$  stanu przemieszczenia tych węzłów. Wewnętrzne siły tarczowe  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\tilde{T}_1$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\tilde{N}_1$  i momenty  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\tilde{M}_1$  dla konkretnego dźwigara będą obliczone ze statyki tarczy i wyrażone przez zewnętrzne obciążenia  $P$  i  $L$ .

Operatory równań (4.1) wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 & A_1^1 = A_3^1 = a\psi_{\perp}, \quad A_2^1 = -2a\psi_{\perp} - \frac{4\alpha_{\perp} a^2}{b}, \quad A_8^1 = A_2^3 = -\frac{2\alpha_{\perp} a^2}{b}, \\
 & A_{14}^1 = -A_{17}^3 = -A_8^6 = -\frac{6a\alpha_{\perp}}{b^2}, \quad A_{17}^1 = -A_{14}^3 = -A_2^5 = -A_8^5 = A_2^6 = \frac{6a\alpha_{\perp}}{b^2}, \\
 & A_4^2 = A_6^2 = -\frac{2b^2}{a}, \quad A_5^2 = A_{11}^4 = -8\frac{b^2}{a} - \gamma_{\perp} b, \\
 (4.2) \quad & A_{11}^2 = A_5^4 = b\gamma_{\perp}, \quad A_{13}^2 = -A_{15}^2 = -A_4^5 = A_6^5 = \frac{6b}{a^2}, \\
 & A_7^3 = A_9^3 = a\varphi_{\perp}, \quad A_8^3 = -2a\varphi_{\perp} - \frac{4\alpha_{\perp} a^2}{b}, \\
 & A_{10}^4 = A_{12}^4 = -\frac{2b^2 \beta_{\perp}}{a}, \quad A_{16}^4 = -A_{18}^4 = -A_{10}^6 = A_{12}^6 = \frac{6b\beta_{\perp}}{a^2}, \\
 & A_{13}^5 = A_{15}^5 = \frac{12}{a^3}, \quad A_{14}^5 = -\frac{24}{a^3} - \frac{12\alpha_{\perp}}{b^3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & A_{17}^5 = A_{14}^6 = \frac{12\alpha_{\perp}}{b^3}, \quad A_{16}^6 = A_{18}^6 = \frac{12\beta_{\perp}}{a^3}, \quad A_{17}^6 = -\frac{24\beta_{\perp}}{a^3} - \frac{12\alpha_{\perp}}{b^3}, \\
 & [c.d.] \\
 & B_5^1 = B_{11}^1 = B_5^3 = B_{11}^3 = -\frac{b}{2} M_{2(\xi+1)}, \quad B_{13}^1 = \frac{1}{a} \dot{M}_{1(\xi)}, \\
 & B_{14}^1 = \frac{1}{a} (-\dot{M}_{1(\xi)} + M_{1(\xi+1)}), \quad B_{18}^3 = B_{15}^3 = -\frac{1}{a} M_{1(\xi+1)}, \\
 & B_1^2 = -\frac{a}{2} \dot{M}_{1(\xi)}, \quad B_2^2 = -\frac{a}{2} (\dot{M}_{1(\xi)} + M_{1(\xi+1)}), \\
 & B_3^2 = -\frac{a}{2} M_{1(\xi+1)}, \quad B_{14}^2 = -B_{17}^2 = \frac{1}{b} M_{2(\xi+1)}, \\
 & B_{16}^3 = -B_7^4 = \frac{1}{a} \tilde{M}_{1(\xi)}, \quad B_{17}^3 = \frac{1}{a} (-\tilde{M}_{1(\xi)} + \tilde{M}_{1(\xi+1)}), \\
 & B_8^4 = -\frac{a}{2} (\tilde{M}_{1(\xi)} + \tilde{M}_{1(\xi+1)}), \quad B_9^4 = -\frac{a}{2} \tilde{M}_{1(\xi+1)}, \\
 & B_{14}^4 = -B_{17}^4 = \frac{1}{b} \dot{M}_{2(\xi+1)}, \quad B_1^5 = -\frac{a}{2} N_{1(\xi)}, \\
 & B_2^5 = \frac{a}{2} (-N_{1(\xi)} + N_{1(\xi+1)}), \quad B_5^5 = \frac{a}{2} N_{1(\xi+1)}, \\
 & B_5^5 = B_{11}^5 = \frac{b}{2} N_{2(\xi+2)}, \quad B_{13}^5 = \frac{1}{a} T_{1(\xi)}, \\
 & B_{15}^5 = \frac{1}{a} T_{1(\xi+1)}, \quad B_{14}^5 = -\frac{1}{a} (T_{1(\xi)} + T_{1(\xi+1)}) - \frac{1}{b} T_{2(\xi+1)}, \\
 & B_{17}^5 = B_{14}^6 = \frac{1}{b} T_{2(\xi+1)}, \quad B_5^6 = B_{11}^6 = -\frac{b}{2} N_{2(\xi+1)}, \\
 & B_7^6 = -\frac{a}{2} \tilde{N}_{1(\xi)}, \quad B_8^6 = \frac{a}{2} (-\tilde{N}_{1(\xi)} + \tilde{N}_{1(\xi+1)}), \\
 & B_9^6 = \frac{a}{2} \tilde{N}_{1(\xi+1)}, \quad B_{16}^6 = \frac{1}{a} \tilde{T}_{1(\xi)}, \\
 & B_{17}^6 = -\frac{1}{a} (\tilde{T}_{1(\xi)} + \tilde{T}_{1(\xi+1)}), \quad B_{18}^6 = \frac{1}{a} \tilde{T}_{1(\xi+1)}.
 \end{aligned}$$

5. WARUNKI BRZEGOWE WSPORNIKOWO ZAMOCOWANEGO DŹWIGARA

Przez uzależnienie wielkości geometrycznych, składowych stanu odkształcenia i przemieszczenia oraz stanu napięcia od jednej zmiennej  $\xi$  wystarczy spełnić warunki brzegowe na krawędziach  $A_1 B_1$  i  $A_n B_n$ . Warunki brzegowe na pozostałych krawędziach dźwigara  $A_1 A_n$  i  $B_1 B_n$  zostały spełnione przez równania równowagi płyty ramowej, które napisano dla dwóch charakterystycznych węzłów  $A_2$  i  $B_2$ . Wartości

przemieszczeń węzłów fikcyjnych dla rozpatrywanych warunków brzegowych są następujące:

dla brzegu swobodnego  $A_1 B_1$  nie obciążonego wartości przesunięć i obrotów wynoszą

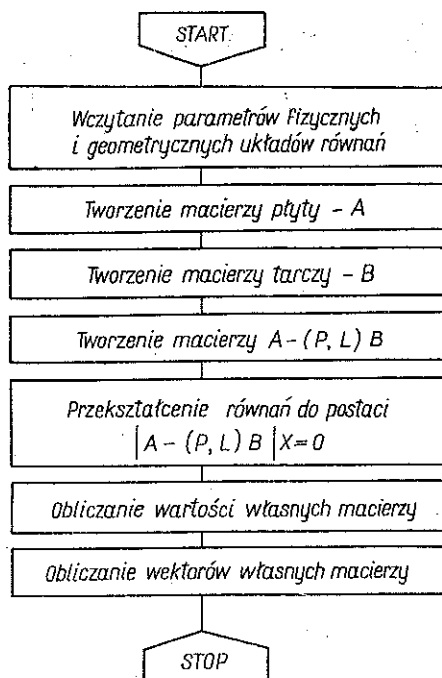
$$(5.1) \quad \begin{aligned} \Omega_{(\xi-1)}^1 &= \Omega_{(\xi)}^1, & \Omega_{(\xi-1)}^2 &= \Omega_{(\xi)}^2, \\ v_{(\xi-1)} &= v_{(\xi)} + ab\Omega_{(\xi)}^2, \\ \tilde{\Omega}_{(\xi-1)}^1 &= \tilde{\Omega}_{(\xi)}^1, & \tilde{\Omega}_{(\xi-1)}^2 &= \tilde{\Omega}_{(\xi)}^2, \\ \tilde{v}_{(\xi-1)} &= \tilde{v}_{(\xi)} + ab\tilde{\Omega}_{(\xi)}^2, \end{aligned}$$

dla brzegu sztywno zamocowanego  $A_n B_n$  przesunięcia i obroty wynoszą

$$(5.2) \quad \begin{aligned} [v]_{(\xi=n)} &= 0, & [\tilde{v}]_{(\xi=n)} &= 0, \\ [\Omega^1]_{(\xi=n)} &= 0, & [\tilde{\Omega}^1]_{(\xi=n)} &= 0, \\ [\Omega^2]_{(\xi=n)} &= 0, & [\tilde{\Omega}^2]_{(\xi=n)} &= 0. \end{aligned}$$

## 6. PRZYKŁADY LICZBOWE

Na podstawie przedstawionej metody opracowano algorytm obliczeń krytycznych obciążeń zewnętrznych i postaci wybożenia dźwigarów. Uproszczony schemat



Rys. 15

blokowy algorytmu przedstawiono na rys. 15. Na podstawie wspomnianego algorytmu opracowano program obliczeń na maszynie cyfrową CDC-3170 w języku FORTRAN.

Przedstawione zostaną rozwiązania dźwigarów ramowych (rys. 1) obciążonych siłą tarczową  $P$  i momentem  $L$ . Założono następujące wymiary dźwigarów:  $l=2a=2000$  mm,  $b=500$  mm i stosunki sztywności  $\alpha_1=\beta_1=1$ ,  $\gamma_1=\varphi_1=\psi_1=0,8$  (dla przekrojów osiowoosymetrycznych).

PRZYKŁAD 1. Dla dźwigara obciążonego siłą  $P$  w górnym węźle brzegowym wartości sił krytycznych są następujące:

$$P_{kr}^I = 2,7094 a_{11} \text{ [N]}, \quad P_{kr}^{II} = 6,1842 a_{11} \text{ [N]}, \quad P_{kr}^{III} = 102,938 a_{11} \text{ [N]}.$$

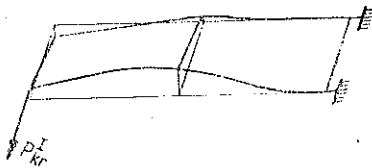
Dla dźwigara obciążonego siłą  $P$  w dolnym węźle brzegowym otrzymano następujące wartości sił krytycznych:

$$P_{kr}^I = 5,9085 a_{11} \text{ [N]}, \quad P_{kr}^{II} = 12,4906 a_{11} \text{ [N]}, \quad P_{kr}^{III} = 207,4079 a_{11} \text{ [N]}.$$

Każdej z obliczonych sił krytycznych odpowiada inna, kolejna postać wyboczenia dźwigara. Na rys. 16 i 17 przedstawiono postacie wyboczenia dźwigarów przy działaniu pierwszych (najmniejszych) sił krytycznych.



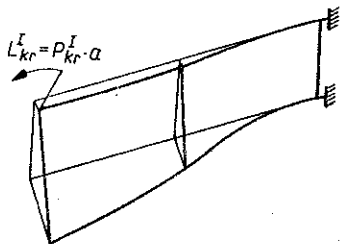
Rys. 16



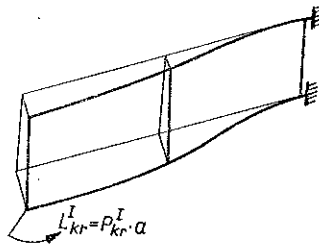
Rys. 17

PRZYKŁAD 2. Momenty krytyczne wynoszą: dla dźwigara obciążonego momentem  $L$  w górnym węźle brzegowym

$$L_{kr}^I = 2,7074 a_{11} \text{ [Nm]}, \quad L_{kr}^{II} = 8,1711 a_{11} \text{ [Nm]}, \quad L_{kr}^{III} = 1613,0921 a_{11} \text{ [Nm]},$$



Rys. 18



Rys. 19

dla dźwigara obciążonego w węźle brzegowym dolnym

$$L_{kr}^I = 3,5089 a_{11} \text{ [Nm]}, \quad L_{kr}^{II} = 6,2976 a_{11} \text{ [Nm]}, \quad L_{kr}^{III} = 664,8956 a_{11} \text{ [Nm]}.$$

Rysunki 18 i 19 przedstawiają postaci wyboczenia dźwigarów odpowiadające działaniu najmniejszych momentów krytycznych.

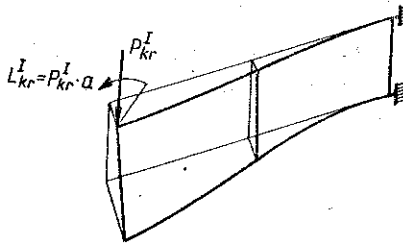
PRZYKŁAD 3. Dla dźwigara obciążonego równocześnie siłą  $P$  i momentem  $L=Pa$  w górnym węźle brzegowym otrzymano siły krytyczne następujące:

$$P_{kr}^I = 1,6821 a_{\perp 1} [N], \quad P_{kr}^{II} = 3,7226 a_{\perp 1} [N], \quad P_{kr}^{III} = 53,8145 a_{\perp 1} [N].$$

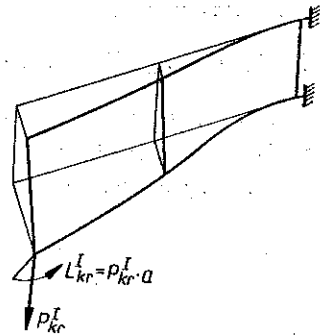
Identyczne obciążenie przyłożone w dolnym węźle brzegowym daje następujące wartości obciążeń krytycznych:

$$P_{kr}^I = 2,1364 a_{\perp 1} [N], \quad P_{kr}^{II} = 3,3201 a_{\perp 1} [N], \quad P_{kr}^{III} = 71,5262 a_{\perp 1} [N].$$

Na rys. 20 i 21 zilustrowano postacie wybozczenia dźwigarów przy działaniu najmniejszych obciążeń krytycznych.



Rys. 20



Rys. 21

Otrzymane równania stateczności dźwigara umożliwiają rozwiązanie szeregu dźwigarów o dowolnych parametrach takich, jak wymiary gabarytowe, sztywności zginania i skręcania poszczególnych prętów, sposób zamocowania oraz rodzaj zewnętrznego obciążenia tarczowego  $P$  i  $L$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, *Stateczność regularnych konstrukcji prętowych*, Arch. Inż. Łąd., 19, 1, 1973.
2. E. BLEICH, H. H. BLEICH, *Buckling strength of metal structures*, Mc Graw-Hill, 1952.
3. G. BÜRGERMEISTER, H. STEUP, *Stabilitätstheorie I*, Berlin 1957.
4. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech. Stos., 23, 4, 1971.
5. H. FRĄCKIEWICZ, J. MISIAK, *Analiza stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych*, Rozpr. Inżyn., 23, 1, 1975.
6. H. FRĄCKIEWICZ, J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dwupasowych dźwigarów kratowych przy działaniu siły skierowanej do bieguna*, Rozpr. Inżyn., 23, 2, 1975.
7. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
8. J. LEWIŃSKI, *Stateczność rusztów siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 1972.
9. J. LEWIŃSKI, *Zagadnienia płyty siatkowej obciążonej w węzłach i między węzłami*, Rozpr. Inżyn., 22, 2, 1974.
10. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej formy zginania dźwigarów siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska 1972.
11. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów siatkowych o pasach równoległych*, Rozpr. Inż., 21, 1, 1973.



12. J. MISIAK, *Analiza stateczności dźwigarów kratowych poddanych działaniu sił zachowawczych*, Rozpr. Inżyn., 23, 1, 1975.
13. J. NALESZKIEWICZ, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, PWN, Warszawa 1974.
14. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1974.
15. S. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of elastic stability*, Mc Graw-Hill 1961; *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
16. A. C. WOŁMIR, *Ustojliwość deformirujemych sistem*, Moskwa 1967.
17. CZ. WOŹNIAK, *Statkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
18. *Handbook of structural stability*, edited by Column Research Committee of Japan Corona Publishing Company LTD, Tokyo 1971.

## Резюме

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ВИДА ИЗГИБА ДВУХПОЯСНЫХ РАМОЧНЫХ БАЛОК ПОДВЕРГНУТЫХ ДЕЙСТВИЮ КОНСЕРВАТИВНЫХ НАГРУЗОК

Предметом работы является задача устойчивости плоского вида изгиба прямоугольных рамочных балок нагруженных системой консервативных сил и моментов. Получена однородная система шести линейных разностных уравнений, дающая возможность вычислить критические силы и моменты для ряда балок с произвольными конструктивными параметрами. Работа иллюстрирована числовыми примерами полученными численным путем.

## SUMMARY

## STABILITY OF THE PLANE FORM OF BENDING OF DOUBLE GIRDER FRAMES SUBJECT TO CONSERVATIVE LOADS

The paper deals with stability of plane bending of rectangular frame cranes loaded by the system of conservative forces and moments. The homogeneous system of six linear difference equations allowing to compute the critical forces and moments for a series of cranes with arbitrary structure parameters is obtained. The paper is illustrated by the numerical examples.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA, FILIA W BIELSKU—BIAŁEJ

i

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1976 r.*

---